

Handbook of Turbulence

Volume 1
*Fundamentals
and Applications*

Edited by
WALTER FROST
and
TREVOR H. MOULDEN
The University of Tennessee
Space Institute
at Tullahoma

PLENUM PRESS
NEW YORK and LONDON
1977

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ принципы и применения

Под редакцией
У. Фроста, Т. Моулдена

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
В. В. АЛЬТОВА, В. И. ПОНОМАРЕВА
и канд. физ.-мат. наук А. Д. ХОНЬКИНА

С ПРЕДИСЛОВИЕМ
академика В. В. СТРУМИНСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1980

Книга представляет собой первый том двухтомного фундаментального руководства по теории турбулентности и ее приложениям (второй том еще не вышел из печати в США). Впервые подробно анализируются современное состояние этой области знания и результаты многочисленных теоретических и экспериментальных исследований явления турбулентности. Широта охвата материала удачно сочетается с ясностью и конкретностью изложения.

Для специалистов по гидро- и газодинамике, физике окружающей среды и инженеров-механиков в различных областях техники.

Редакция литературы по новой технике

Центральная научная
БИБЛИОТЕКА
АН КазССР

1703040000

Ф 20303—171
041(01)-80 171-80

© 1977 Plenum Press, New York

© Перевод на русский язык, «Мир», 1980

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Исследование турбулентных течений, начавшееся еще в прошлом веке, по-прежнему остается одной из центральных тем в аэродинамике, метеорологии и химической технологии. Столь постоянный интерес определяется тем, что турбулентные течения являются самой распространенной формой движения жидкостей и газов. Не будет преувеличением сказать, что знакомство с методами анализа турбулентных течений будет способствовать расширению кругозора современного инженера или физика. В то же время книг на русском языке по проблеме турбулентности выходило очень мало. Одни уже давно стали библиографической редкостью; многие устарели.

Предлагаемая читателям книга написана коллективом известных американских ученых, которые взяли на себя большой труд и систематически изложили ряд важных теоретических и экспериментальных методов изучения турбулентности. В первом томе наряду с изложением основных идей значительное внимание уделяется также проблемам атмосферной турбулентности. Простой математический аппарат, ясное и четкое изложение, сопровождаемое многочисленными иллюстрациями, делают книгу доступной широкому кругу читателей.

В книге используются некоторые ранние достижения советских ученых, однако более поздние результаты, полученные в СССР, по-видимому, менее известны за рубежом. Некоторое представление о проводимых в нашей стране исследованиях читатель может получить, ознакомившись со сборниками «Турбулентные течения», вышедшими в издательстве «Наука» в 1970, 1974 и 1977 гг.

При подготовке перевода к изданию исправлен ряд опечаток.

Академик В. В. Струминский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Турбулентность существует практически во всех течениях независимо от того, происходят они в естественных условиях или в современных технических системах. Поэтому были затрачены большие усилия, чтобы попытаться понять это очень сложное физическое явление и разработать эмпирические и математические модели для его описания и надежного расчета характеристик турбулентных течений. Цель настоящей книги состоит в том, чтобы изложить в одном месте и в удобной форме основные понятия турбулентности, а также существующие модели и экспериментальные методы ее исследования. Мы надеемся, что эти методы найдут общее применение в повседневных конструкторских расчетах. Выражение «общее применение» используется здесь в связи с тем, что теория турбулентности все еще находится в стадии разработки, так что полный расчет турбулентности пока невозможен и вряд ли будет возможен в ближайшем будущем.

Описанные в этой книге понятия и модели турбулентности характеризуют существующие методы, которые в настоящее время используются для расчета различных характеристик турбулентных течений.

Как всегда при анализе турбулентных течений, методы расчета являются комбинацией аналитических и эмпирических соотношений и данных, и читатель должен иметь ясное представление о принятых допущениях и существующих ограничениях методов при использовании их в физических ситуациях, отличных от тех, для которых они были развиты.

В этой книге не ставится цель обсудить все проведенные исследования турбулентности. В ней будет дано описание с единых позиций некоторых наиболее фундаментальных понятий, моделей турбулентности и экспериментальных методов, разработанных к настоящему времени. Предполагается, что читатель, который изучит книгу, будет располагать практическими сведениями о турбулентности и получит необходимый запас теоретических знаний, который позволит легко понять сущность будущих исследований,

а также разобраться в уже проведенных исследованиях, которые из-за недостатка места не вошли в эту книгу.

В первых четырех главах книги выводятся основные уравнения механики жидкости (этот вывод, хотя и полный, не является детальным, так как предполагается, что читатель знаком с механикой жидкости в объеме курса высшего учебного заведения) и подробно описываются статистические принципы применительно к случайным турбулентным процессам. В пятой главе рассматриваются некоторые противоречия между применением детерминистических уравнений механики жидкости, с одной стороны, и теорией случайных процессов, с другой, а в заключение отмечается аналогия с квантовыми эффектами. В шестой главе рассматриваются некоторые вопросы перехода от ламинарного течения к турбулентному, а в главах с седьмой по десятую рассматриваются модели турбулентности различной степени сложности. В гл. 11 и 12 описываются экспериментальные методы, которые применяются соответственно в лабораторных и естественных условиях. В тринадцатой главе подробно описываются последние достижения в измерении турбулентности с помощью приборов, в которых используются акустические и электромагнитные волновые явления. Аналоговые и цифровые методы формирования случайных турбулентных сигналов, имеющих одинаковые статистические характеристики с моделируемым турбулентным процессом, обсуждаются в четырнадцатой главе. И наконец, в пятнадцатой главе описываются с точки зрения инженера-строителя некоторые практические проблемы, возникающие вследствие турбулентности при проектировании зданий.

Книга возникла на основе краткого курса лекций, прочитанных в Институте космических исследований при Университете шт. Теннесси; каждая глава написана крупными специалистами в соответствующей области. Дж. Бернارد, руководитель программы курса, оказал очень большую помощь в организации серии лекций, объединенных общей целью и оказавшихся необходимыми для создания книги. Наконец, авторы отдают должное дальновидности бывшего декана факультета д-ра Б. Гёттерта, который явился инициатором курса лекций в Институте космических исследований при Университете шт. Теннесси, и декана Чарльза Вивера, который продолжает развивать этот эффективный метод распространения информации среди технических и научных работников.

Необходимо было провести большую работу по исправлению и перепечатке первоначального текста лекций, чтобы обеспечить связность и единство изложения и в то же время избежать дублирования. В связи с этим большая работа по перепечатке была выполнена Риной Норткат, Мэри Гендерсон, Джун Джаррел, Джуди Райт и Фэй Фуллер, за что редакторы выражают им свою благодарность.

Прежде чем закончить это предисловие, необходимо сказать

несколько слов о построении книги. Каждая глава имеет собственный список литературы. Кроме того, в каждой главе имеется собственный перечень обозначений; это оказалось необходимым, поскольку, несмотря на стремление сделать обозначения едиными, некоторые расхождения все же остались вследствие индивидуальных вкусов авторов. С другой стороны, номеру уравнения или рисунка предшествует номер главы, что делает возможным перекрестные ссылки между главами.

У. Фрост
Т. Моулден

Явление турбулентного движения жидкости

Т. МОУЛДЕН, У. ФРОСТ, А. ГАРНЕР¹⁾

1.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе не вводится формальное определение турбулентности, а используются интуитивные представления об этой форме движения жидкости и газа. Обсуждаются свойства турбулентного движения; особое внимание будет обращено на методы его описания. Понять и научиться рассчитывать турбулентность — такую задачу ставит перед читателем настоящая книга.

Сначала будут рассмотрены фундаментальные свойства турбулентного движения жидкости и обоснована необходимость статистического описания этого явления. Затем описываются современные методы расчета турбулентности. В заключение дается обзор ряда методов экспериментальных исследований турбулентных течений. Этот анализ не является исчерпывающим; даже книга Молина и Яглома [1] размером в две тысячи страниц не может претендовать на полноту описания турбулентности.

Турбулентное движение является хаотическим. Термин «хаотическое» в данном случае представляет собой почти синоним слова «турбулентное». В хаотичности заключается основное свойство такого движения. Кроме того, при описании турбулентных движений часто используется термин «случайный», однако следует отметить, что такое движение никогда не может быть полностью случайным, поскольку составляющие скорости частиц должны удовлетворять законам сохранения. Следовательно, если предполагается, что поведение одной из составляющих скорости является случайным, то флуктуации остальных составляющих должны быть ограничены в соответствии с уравнениями сохранения. Уверенно (по крайней мере с практической точки зрения) можно сказать только, что движение является недетерминированным и должно рассматриваться в рамках статистических подходов.

¹⁾ Trevor H. Moulden, Walter Frost, Albert H. Garner, The University of Tennessee Space Institute, Tullahoma, Tennessee 37388.

Какие свойства движения жидкости необходимо считать отличительными признаками турбулентных течений? Одно из основных условий заключается в том, что скорость в любой данной точке потока должна зависеть от времени. Хотя это условие является необходимым, его недостаточно для определения турбулентного движения. Более характерным свойством турбулентности является то, что флуктуации скорости в данной точке должны быть хаотическими. Эти флуктуации скорости не связаны каким-либо образом с некоторой введенной извне зависимостью течения от времени, как это имеет место, например, при ламинарном обтекании медленно колеблющегося тела. Однако при турбулентном обтекании колеблющегося тела существует одно явное противоречие этому условию. В этом случае имеет место корреляция граничных условий с колебаниями местной скорости на частоте, характерной для движения границы, однако широко-

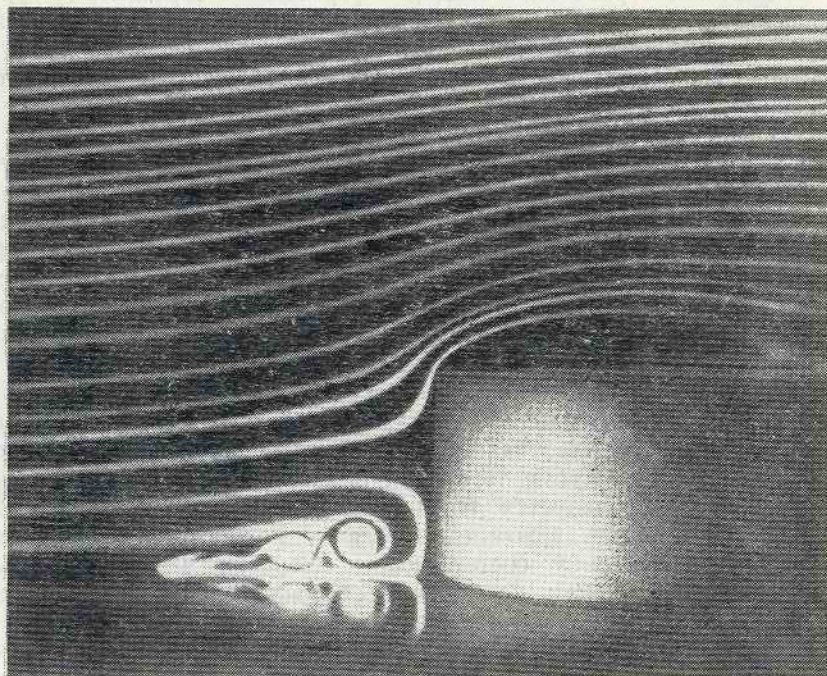


Рис. 1.1. Обтекание с малой скоростью цилиндрического препятствия, установленного на пластине нормально по отношению к набегающему потоку. Высота препятствия и толщина пограничного слоя являются величинами одного порядка, а скорость набегающего течения — очень малой. Воспроизводится с разрешения Е. Саттона из научно-исследовательской лаборатории Кембриджского ун-та. Более подробное описание приведено в сб. *Incompressible Aerodynamics* (B. Thwaites, ed.), Oxford University Press, 1960 г.

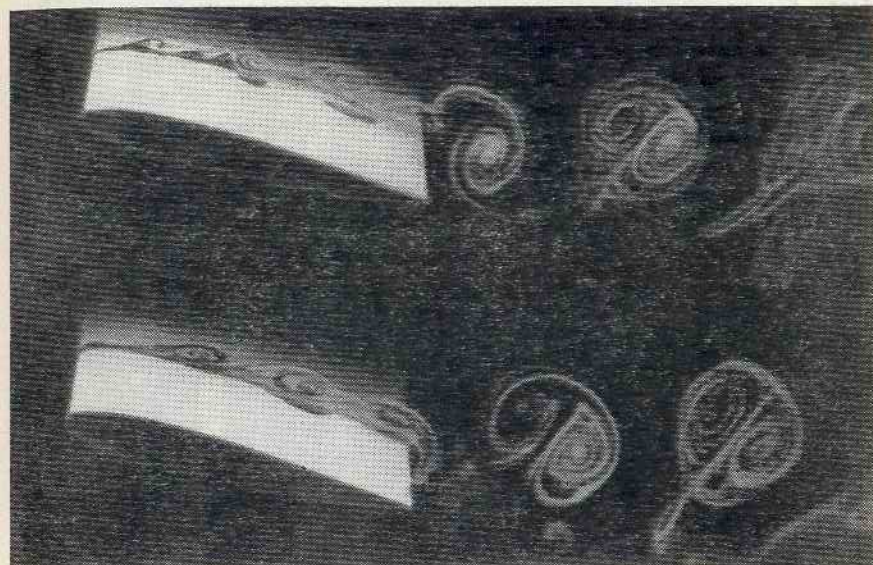


Рис. 1.2. Обтекание с малой скоростью профиля, который для моделирования нестационарного схода вихрей колеблется по углу тангажа.

Воспроизводится с разрешения Х. Верле (ONERA, Париж). Более подробное описание приведено в работе *Hydrodynamic flow visualization, Annual Review of Fluid Mechanics*, Annual Reviews Inc., Palo Alto, California, 1973, p. 361—382.

полосный спектр турбулентности не указывает на существование заметной связи с наложенной извне временной зависимостью. Повидимому, флуктуации скорости в турбулентном течении возникают вследствие возмущений, последующее развитие которых обычно неизвестно, и поэтому такие флуктуации нельзя непосредственно связать с какими-либо внешними воздействиями.

Можно указать на некоторые другие свойства движения жидкости, более или менее связанные с рассматриваемым явлением. На рис. 1.1 показано ламинарное сдвиговое течение у пластины с установленным перпендикулярно к ней цилиндрическим препятствием. При таком обтекании около основания препятствия образуется вихревая система. В данном случае распределенная завихренность в пограничном слое под действием градиентов скорости вблизи препятствия преобразуется в систему дискретных вихрей. Другой характерный пример движения жидкости представляет вихревая дорожка, образующаяся при обтекании профиля под углом атаки. На рис. 1.2 показаны полученные Верле фотоснимки этого явления.

Указанные факты свидетельствуют о том, что возмущенное движение жидкости является намного более сложным, чем можно

было бы ожидать на основании заданных граничных условий. Интуитивное представление о турбулентном движении жидкости позволяет предвидеть вихревую структуру типа представленной на рис. 1.1. Однако аналогичный подход в случае, рассматриваемом на рис. 1.2, вряд ли был бы успешным, поскольку линии тока внутри жидкости в этом случае очень плохо согласуются с заданными граничными условиями. Те же самые соображения остаются в силе и для течений типа показанных на рис. 1.3, где иллюстрируется обтекание при малых скоростях одного, двух и трех круговых цилиндров.

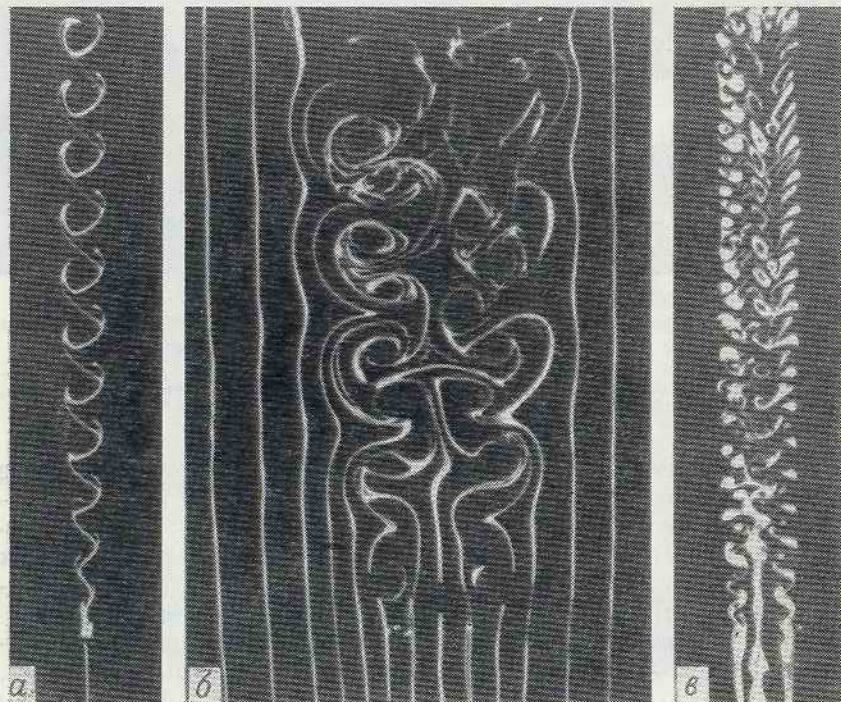


Рис. 1.3. Обтекание с малой скоростью одного, двух и трех круговых цилиндров.

а — визуализация следа за цилиндром (исследование в гидротомке с малыми скоростями, $Re \approx 100$). Из работы М. Гэстера (отдел аэродинамики Национальной физической лаборатории, Теддингтон, Англия): M. Gaster, Vortex shedding from slender cones at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 38, 565—576 (1969).

б — течение за двумя цилиндрами (исследование в аэродинамической трубе, $Re \approx 2 \times 10^4$). Из работы П. Бирмана и А. Уэдкока (кафедра аэродинамики Королевского колледжа, Лондон): P. W. Bearman, A. J. Wadcock, The interaction between a pair of circular cylinders normal to a stream, *J. Fluid Mech.* 61, 499—511 (1973).

в — течение за тремя цилиндрами (исследование в аэродинамической трубе, $Re \approx 300$). Из работы М. Здравковича (Белградский ун-т): M. M. Zdravkovich, Smoke observations of the wake of a group of three cylinders at low Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.* 32, 339—351 (1968).

Воспроизводится с разрешения изд-ва Кембриджского ун-та.

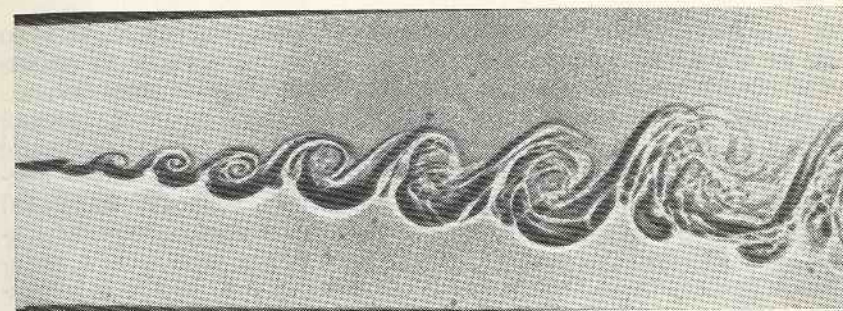


Рис. 1.4. Слой смешения, образующийся на границе между газообразными гелием и водородом; на фотоснимке внутри слоя смешения ясно видны когерентные образования ($Re \sim 10^5$).

Из работы А. Рошко и Дж. Брауна (Калифорнийский технологический ин-т): A. Roshko, G. Brown, On density effects and large structures in turbulent mixing layers, *J. Fluid Mech.* 64, 775—816 (1974).

Воспроизводится с разрешения изд-ва Кембриджского ун-та.

вых цилиндров. Очевидно, что картина образования вихрей здесь повторяется. Вихри располагаются периодически, на расстояниях, во много раз превышающих характерный размер тел, послуживших причиной возникновения вихревого движения. Несмотря на то что периодическая картина вихревого движения очень устойчива, она существует не на всем протяжении течения; в конце концов вихри разрушаются и движение становится более хаотическим. На рис. 1.3, б видно начало этого процесса.

Законно спросить: имеет ли это обсуждение, которое в основном относится к ламинарным течениям, какую-либо связь с предметом исследования в данной работе — турбулентностью? Ответ на такой вопрос должен быть утвердительным без каких-либо оговорок. Это в большой степени обусловлено тем, что динамика вихревого движения занимает центральное место в теории турбулентности. Характер взаимодействия вихрей почти полностью определяет тонкую структуру турбулентности; кроме того, движение часто приобретает крупномасштабную когерентную структуру. Как было показано в исследованиях Рошко (рис. 1.4), такие структуры имеют вихревую природу. Подобно их аналогам в ламинарном течении, эти вихревые структуры сохраняются на больших расстояниях. Когерентные образования были замечены в турбулентных течениях много лет назад, однако до недавнего времени на необходимость их исследования не обращалось внимания [2]. Так, в свое время Прандтль [3] обнаружил крупномасштабные структуры в турбулентном пограничном слое на стенке, а Никурадзе [4] — большие вихревые образования в течениях в канале. Недавние достижения в разработке метода условных выборок и применение его для анализа турбулентных течений [5] обеспечили исследования когерент-

ных структур более удобным математическим аппаратом. Однако еще не ясно, какое влияние это окажет в дальнейшем на разработку вычислительных методов анализа турбулентных течений.

Дальнейшее обсуждение характеристик турбулентных течений будет отложено до того момента, когда будут получены основные уравнения движения. Поскольку в литературе имеется много превосходных работ [6—8], посвященных этому вопросу, в данной книге процедура получения этих уравнений подробно не описывается. Внимание будет сосредоточено на анализе физических механизмов движения жидкости и в особенности турбулентного движения. Однако основные моменты вывода уравнений движения жидкости в рамках механики сплошной среды все же будут представлены. Все это позволит изложить и обосновать некоторые принципиальные соображения о турбулентных течениях.

1.2. О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В РАМКАХ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Определим набор из N значений индекса как $I_N \equiv \{n : n = \text{целое число} \leq N\}$, и пусть $R \equiv \{r : r \text{ действительное число}\}$ обозначает бесконечное множество действительных чисел. Тройка чисел $\{r_i\}$, $i \in I_3$ будет определять в пространстве положение точки с координатами r_i по отношению к удобно выбранному началу отсчета. Бесконечное множество таких троек представляет полное евклидово пространство $E (\equiv R \times R \times R)$; предполагается, что движение жидкости происходит в области X пространства E .

Заполненная жидкостью область D состоит из счетного множества жидких частиц, каждую из которых можно обозначить как ξ_k , $k \in I_\infty$. Вдобавок к этому подобласть D_l области D определяется ее формой, т. е. подобластью X_l области X физического пространства. Далее предположим, что существует взаимно-однозначное соответствие жидких частиц ξ_k и точек подобласти X_l , а также что каждую жидкую частицу можно охарактеризовать тройкой координат $\{x_i\}$, соответствующих некоторой исходной точке пространства x_i . Необходимо четко различать собственно жидкую частицу и ее местоположение в пространстве $\{x_i\} \in X$.

Аксиома 1. Жидкость рассматривается как сплошная среда в том смысле, что соседние жидкие частицы в подобласти D_l взаимно-однозначно соответствуют соседним точкам подобласти X_l , положение которых определяется координатными тройками $\{x_i\}$, т. е.

$$\begin{aligned} \{x_i\} &= Z(\xi_k), \\ \xi_k &= Z^{-1}(\{x_i\}). \end{aligned}$$

В аксиоме 1 предполагается, что жидкие частицы распределены непрерывно в пространственной области X в соответствии с действительными числами, характеризующими координаты x_i . Следовательно, если $S_r(\bar{p}) \equiv \{\bar{x} : d(\bar{x}, \bar{p}) < r\}$ является сферой в пространственной области X , где $d(\bar{x}, \bar{p})$ — удобная метрика области X , то $\lim_{r \rightarrow 0} S_r(\bar{p})$ определяет радиус-вектор $\bar{p}$ точки пространства, занимаемой жидкой частицей $\xi_{\bar{p}}$. Такое понимание неразрывности жидкости противоречит с физической точки зрения молекулярной структуре реальной жидкости, и в рамках этого подхода теория является приближенной. Кроме того, в аксиоме 1 предполагается, что на протяжении всего времени течения выбранную жидкую частицу всегда можно отличить от других частиц. Можно также отметить, что множество жидких частиц, заполняющих подобласть D_l , остается неизменным во времени. Это последнее условие является принципиальным требованием, выполнение которого необходимо для применения к заполненному жидкостью пространству законов сохранения.

Дополнительные ограничения необходимо наложить на определение подобластей D_l , а именно

$$\bigcup_{l=1, \infty} D_l = D$$

и $D_l \cap D_k = 0$ для каждого значения $l, k \in I_\infty$, таких, что $l \neq k$.

Вообще говоря, в процессе движения жидкости данная жидкая частица ξ_k (с начальным местоположением $\{\bar{x}_i\}$) перемещается и остается идентифицируемой в других пространственных точках $\{x_i\}$. Таким образом,

$$\{x_i\} = \chi(\{\bar{x}_i\}, t)$$

и, наоборот,

$$\{\bar{x}_i\} = \chi^{-1}(\{x_i\}, t).$$

При этом для последующего анализа необходимо, чтобы преобразования χ и χ^{-1} были достаточное число раз дифференцируемы.

Следствие 1. Якобиан преобразования $J(\xi_i, \bar{\xi}_i) \equiv \partial(\xi_i)/\partial(\bar{\xi}_i)$ между конфигурациями X_l и $\bar{X}_l$ подобласти D_l не равняется нулю. Поскольку $[\partial(\xi)/\partial(\bar{\xi})] \times [\partial(\bar{\xi})/\partial(\xi)] = 1$, якобиан не может быть бесконечной величиной.

Движение жидкости можно теперь рассматривать, как последовательность параметрически зависящих от времени отображений данной подобласти в физическом пространстве. Другими словами, движение определяется как отображение пространственной под-

области X_i , занимаемой жидкой подобластью D_i в момент времени t , в подобласть новой формы в момент $t + \Delta t$.

Аксиома 2. Физические свойства жидкости предполагаются таковыми, что существуют все необходимые производные от функций, характеризующих ее состояние.

Обозначим через M_i массу жидкости внутри подобласти D_i ; тогда из аксиомы 2 и теоремы Радона—Никодима [9] следует существование функции $\rho(\xi_i)$, такой, что

$$M_i = \int_{D_i} \rho(\xi_i) d\xi_i, \quad i \in I_3.$$

Функция $\rho(\xi_i)$ называется плотностью жидкости и является ее локальным свойством. Более ясный физический смысл понятию плотности можно придать, если обратиться к лемме о среднем значении интеграла, из которой следует

$$M_i = \rho(\bar{\zeta}) V_i,$$

где

$$V_i = \int_{D_i} d\xi_i$$

— объем подобласти D_i , а $\bar{\zeta}$ — радиус-вектор некоторой точки внутри D_i . Теперь плотность можно определить просто как отношение массы жидкой частицы к занимаемому ею объему, поскольку из введенного в аксиоме 1 понятия сплошной среды следует, что предел

$$\rho(\bar{\zeta}) = \lim_{D_i \rightarrow 0} \frac{M_i}{V_i}$$

для каждой подобласти $D_i \subset D$ существует и равняется значению плотности в точке $\bar{\zeta}$. Следует отметить, что понятие этого предела является прямым следствием вышеупомянутых предположений и не включает в себя статистических представлений о молекулярном движении.

Предположение о том, что жидкость является сплошной средой, снимает какие-либо вопросы о размере подобласти D_i при определении условий в точке. Однако для реальной жидкости эти вопросы остаются, поскольку в этом случае может оказаться необходимым учитывать молекулярное движение, когда масштаб, характеризующий движение жидкости, становится очень малым. Важным при исследовании турбулентных течений является вопрос о величине масштаба наименьших вихревых образований в сравнении с длиной свободного пробега молекул. Ясно, что уточненные параметры движения реальной жидкости должны зависеть от ха-

рактеристик молекулярного движения и что в рамках модели сплошной среды некоторые существенные свойства могут быть упущены. Тем не менее в турбулентных течениях был обнаружен некоторый минимальный размер вихревых образований. Для течения в цилиндрической трубе при условиях экстремального характера ($Re \sim 10^6$, $\varnothing_{тр} = 10$ мм) минимальный диаметр вихрей имел порядок 10^{-4} мм. При этих же условиях длина свободного пробега молекул имеет порядок 10^{-7} мм в потоке жидкости и 10^{-5} мм — в потоке газа. Из этих данных следует, что средняя длина свободного пробега молекул меньше размера вихрей в турбулентных течениях и что такие результаты не опровергают модели сплошной среды.

Можно сделать еще одно замечание относительно объема V_i жидкой частицы. Пусть V_0 — объем подобласти D_i при некоторых заданных (например, начальных) условиях; тогда

$$V_0 = \int_{D_0} d\bar{\xi}_i = \int_{D_i} J(\bar{\xi}_i, \bar{\xi}_i) d\bar{\xi}_i,$$

и из леммы о среднем значении интеграла следует

$$V_0 = J(\bar{\xi}_i; \bar{\zeta}) V_i.$$

Теперь якобиан преобразования представляет собой просто отношение объемов жидкой частицы в процессе движения подобласти в пространстве, и его величина остается постоянной при изохорическом движении.

Аналогично тому, как была введена для жидкости модель сплошной среды, предполагается, что движение жидкости можно описать с помощью определенных аксиом, выражающих законы сохранения. Например, любые сомнения в том эмпирическом факте, что масса жидкости неизменна, устраняются путем введения закона сохранения массы в виде аксиомы. Теперь можно построить на логической основе теорию движения жидкости в рамках механики сплошной среды и сопоставить выводы этой теории с результатами наблюдений реальных течений.

Аксиома 3. Масса совокупности определенных жидких частиц в подобласти D_i с течением времени остается постоянной.

Эта аксиома, выражающая закон сохранения массы, утверждает, что

$$\frac{d}{dt} \int_{D_i} \rho(\xi_i, t) d\xi_i = 0, \quad (1.1)$$

где d/dt обозначает субстанциональную (полную) производную. По существу движение жидкости состоит в том, что подобласть D_i деформируется в процессе движения. Поэтому величину производ-

ной в уравнении (1.1) легче вычислить, если движение отсчитывается от некоторого известного в момент времени $t = t_0$ положения подобласти D_i . Это известное положение обозначается как D_0 , и в этой области вводятся локальные значения координаты ξ_i . Теперь выражение

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho(\xi_i, t_0) J[\xi_i(t), \xi_i] d\xi_i = 0, \quad (1.1a)$$

где $J(\xi_i, \zeta_i) \equiv \partial(\xi_i)/\partial(\zeta_i)$ — значение якобиана преобразования D_0 в D_i в момент времени t , которое является аналогом соответствующего выражения в уравнении (1.1). После дифференцирования получаем

$$\int_{D_0} \left(\frac{d\rho}{dt} J + \rho \frac{dJ}{dt} \right) d\xi_i = 0.$$

Использование тождества Эйлера [10]

$$\frac{dJ}{dt} = J \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

где v_i — составляющие скорости жидкой частицы в физическом пространстве, приводит к следующему уравнению:

$$\int_{D_0} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) J(\xi_i; \zeta_i) d\xi_i \equiv \int_{D_i} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\xi_i = 0.$$

Если теперь учесть, что функции под знаком интеграла удовлетворяют требованиям непрерывности (согласно аксиоме 2) и что подобласть D_i была выбрана внутри D произвольным образом, то применение леммы Дюбуа—Реймонда [11] дает

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

что представляет собой условие неразрывности в дифференциальной форме. Если использовать выражение для субстанциональной производной, то это условие принимает другую форму:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.2)$$

В случае несжимаемой жидкости уравнение неразрывности приобретает следующий упрощенный вид:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.3)$$

В этом случае аксиома, выражающая закон сохранения массы, сводится к чисто кинематическому соотношению, в которое не вхо-

дит плотность жидкости. Из уравнения (1.1a) далее следует, что якобиан преобразования при постоянной плотности жидкости становится постоянной величиной, т. е. течение несжимаемой жидкости является изохорическим.

Получение уравнения сохранения количества движения становится возможным при использовании следующих предположений. Первое и основное предположение заключается в предложении Эйлера обобщении гипотезы Ньютона: скорость изменения количества движения прямо пропорциональна действующей на тело силе. Эту гипотезу можно применять к каждой жидкой подобласти D_i при условии, что вместе с этим предположением используется соответствующее определение поверхностных сил, посредством которых каждая подобласть воздействует на соседнюю. Определение этих поверхностных сил является вторым основным предположением, которое необходимо сделать.

Аксиома 4. На две жидкие подобласти, находящиеся в соприкосновении, действуют одинаковые, но противоположно направленные силовые поля, приложенные к их взаимной границе.

Аксиома 5. Суммарная сила F_i , действующая на жидкую подобласть D_i , приводит в движение эту подобласть в направлении действующей силы, так что

$$F_i \sim \frac{d}{dt} (M_i U_i),$$

где U_i — вектор скорости движения подобласти D_i .

Если f_i — сила, действующая на единицу массы, а τ_{ij} — тензор поверхностных напряжений, то выражающую закон сохранения количества движения аксиому можно записать в виде следующего уравнения:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_i} \rho v_j d\xi_i = \int_{D_i} \rho f_j d\xi_i + \int_{\partial D_i} \tau_{kj} n_k d\sigma.$$

Здесь n_k — единичная нормаль к поверхности ∂D_i подобласти D_i , а $d\sigma$ — элемент этой поверхности. С помощью доводов, аналогичных использованным выше, можно показать, что при выполнении уравнения неразрывности имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{D_i} \rho v_j d\xi_i &= \int_{D_i} \left[\rho \frac{dv_j}{dt} + v_j \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \right] d\xi_i = \\ &= \int_{D_i} \rho \frac{dv_j}{dt} d\xi_i. \end{aligned}$$

Если в заполненной жидкостью области компоненты тензора

напряжений τ_{ik} являются достаточно гладкими функциями, то в согласии с теоремой Гаусса — Остроградского можно написать

$$\int_{\partial D_l} \tau_{kj} n_k d\sigma = \int_{D_l} \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial x_k} d\tilde{x}_i.$$

С учетом этого аксиома о сохранении количества движения сводится к соотношению для объемного интеграла

$$\int_{D_l} \left(\rho \frac{dv_j}{dt} - \rho f_j - \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial x_k} \right) d\tilde{x}_i = 0.$$

Применение леммы Дюбуа—Реймонда приводит к уравнению сохранения количества движения в дифференциальной форме:

$$\rho \frac{\partial v_j}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \rho f_j + \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial x_k}. \quad (1.4)$$

Обозначая через P статическое давление в жидкости, а через δ_{ij} — символ Кронекера и используя предложенное Стоксом соотношение для тензора напряжений, можно сформулировать следующую аксиому [12].

Аксиома 6. Локальные значения тензоров напряжений и скоростей деформаций связаны между собой линейным образом.

Аксиому 6 можно записать в виде следующего соотношения:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + 2\mu \left(V_{ij} - \frac{1}{3} V_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (1.5)$$

где

$$V_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

есть тензор скоростей деформаций, а μ — вязкость жидкости. Известно, что соотношение (1.5) является всего лишь предположением и в его пригодности для точного описания движения жидкости можно сомневаться [13]. Однако опыт использования этого соотношения показывает, что оно хорошо соответствует действительности.

Математическая формулировка проблемы замыкается установлением граничных условий, которым должно удовлетворять движение жидкости. Таким образом, вводится еще одна аксиома.

Аксиома 7. Жидкость на поверхности ∂V твердого тела V , погруженного в заполненное жидкостью пространство, является неподвижной относительно этого тела.

За исключением уравнения сохранения энергии, которое здесь можно не выводить, получение классических уравнений движения жидкости закончено. Эти уравнения были получены без обращения

к тем свойствам реальных течений, которые не описываются законами сохранения и выражением (1.5) для тензора напряжений. Вследствие этого возникает несколько вопросов, имеющих непосредственное отношение к проблеме турбулентности. Классические уравнения движения обычно применяются к турбулентным течениям без какого-либо предварительного обсуждения. Так, Панчев [14] вводил уравнения Навье—Стокса аксиоматически и оправдывал это тем, что результаты теории и экспериментальные данные хорошо согласуются между собой. Лесли [15] представлял некоторые дополнительные доводы в пользу использования уравнений Навье—Стокса, а другие авторы [16, 17] не обсуждали вопроса применимости этих уравнений перед использованием их в исследованиях проблемы турбулентности.

Предположим, что весь набор граничных условий, которым должно удовлетворять движение жидкости внутри области D , никак не зависит от времени. Тогда, если не обращать внимания на свидетельствующие об обратном экспериментальные данные, для течения несжимаемой жидкости естественно предположить, что математическая краевая задача для уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (1.6)$$

должна описывать реальное движение жидкости. Тот факт, что в действительности течение зависит от времени t (эта зависимость не учитывается в рассматриваемой формулировке задачи), должен быть предметом тщательного изучения. Экспериментально было установлено, что если число Рейнольдса превышает некоторую критическую величину, то течение становится турбулентным. Эти наблюдения согласуются со сформулированным в разд. 1.1 относительно течений рис. 1.1 — 1.4 выводом о том, что реальные течения намного сложнее, чем можно было бы ожидать на основании поставленных граничных условий. Нужно отметить, что для реального течения граничные условия в соответствующей математической краевой задаче для уравнений (1.6) нельзя считать независимыми от времени. Кроме того, поверхность реальных тел не может быть абсолютно гладкой вплоть до молекулярного уровня. Этими фактами можно объяснить расхождения между идеальными и реальными течениями; любые течения необходимо исследовать на устойчивость, так как неустойчивость движения может служить причиной возникновения турбулентности.

Прямое отношение к указанной выше проблеме может иметь неединственность решения уравнений (1.6). Другими словами, вопрос заключается в следующем: определяется ли единственным

образом расположение жидких частиц по их расположению в предыдущий момент времени? Этот вопрос до сих пор остается без ответа и не будет подробно обсуждаться в настоящей книге; однако при исследованиях турбулентности и при применении полуэмпирических моделей он должен возникать обязательно. Даже если полное поле скоростей в пространстве и во времени является полностью детерминированным, возникает другая не менее интересная проблема: можно ли рассчитать турбулентное течение без каких-либо исходных статистических данных.

Одно из условий, необходимых для получения уравнений сохранения, заключалось в том, что в процессе движения жидкости подобласть D_i должна содержать одни и те же жидкие частицы. Это условие также имеет принципиальное значение в отношении применимости дифференциальных уравнений движения, поскольку использование леммы Дюбуа—Реймонда при замене интегрального соотношения дифференциальным уравнением не снимает указанного условия. Конечно, его можно обосновывать тем, что перед применением леммы Дюбуа—Реймонда подобласть D_i можно выбрать сколь угодно малой, однако при этом возникает вполне уместный вопрос о нижнем пределе размера подобласти в случае турбулентного течения. Многое нужно еще узнать о турбулентных течениях, прежде чем предпринимать основательную попытку ответить на этот вопрос. С уверенностью можно только сказать, что полученные в эксперименте спектры характеристик турбулентности еще содержат энергию на частотах, превышающих 50 кГц. Вследствие сильного хаотического смещения, присущего турбулентному течению, характерные размеры рассматриваемой подобласти не могут превышать размеров самых малых вихрей, существующих в этом течении. Ответ на этот вопрос в рамках модели сплошной среды в соответствии с аксиомой 1 не представляет трудности, однако в случае реальных жидкостей не очевидно, что молекулярное движение не дает непосредственного вклада в вязкую диссипацию малых вихревых образований, и отсутствие такого вклада может лишь отражать структуру модельных уравнений. Чтобы использовать для описания движения жидкости модель сплошной среды, необходимо предположить, что наименьший размер обнаруживаемых в эксперименте вихрей остается еще достаточно большим для того, чтобы течение можно было рассматривать как течение жидкости с обычными физическими свойствами.

Поскольку при обсуждении никакое сопоставление с молекулярным движением при помощи числа Кнудсена не делалось, понятие о нижнем пределе масштаба длины не вводилось при выводе уравнений движения в рамках механики сплошной среды. Кроме того, поскольку уравнения были получены только на основе учета поверхностного взаимодействия между соседними подобластями D_i и D_j , ничего не говорилось о движении внутри этих подобластей.

По существу, это замечание относится к оправданности соотношения для напряжений трения и к его применимости для любых масштабов длины, характеризующих движение. Лоренц [18] показал, что характеристики малых вихревых образований необходимо точно учитывать в любых вычислительных методах, поскольку погрешности быстро распространяются на вихри разных масштабов. В частности, даже когда среднее движение остается двумерным, характер вихревых образований является существенно пространственным. Более детальное обсуждение свойств турбулентности будет продолжено в последующих главах.

В заключение этого раздела можно отметить, что результаты решения полных уравнений Навье—Стокса весьма удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Это относится как к ламинарным, так и к турбулентным течениям. Последнее утверждение можно проиллюстрировать тем, что экспериментальные данные Стюарта [19] для изотропной турбулентности очень хорошо согласуются с результатами теории Кармана—Хоуарта.

1.3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В разд. 1.1 на примере некоторых конкретных течений обсуждались особенности турбулентного движения жидкости, однако необходимо отметить, что до настоящего времени нет ясного понимания того, как движение жидкости становится турбулентным. Недавно был достигнут значительный прогресс в понимании процесса развития в ламинарном течении автоколебаний и появления в нем некоторых особенностей, характерных для турбулентности. Подробно эти вопросы будут обсуждаться в главе 6. До сих пор остается еще загадкой, почему ламинарное течение переходит в турбулентное. Классическая теория устойчивости, основанная на решении уравнения Орра—Зоммерфельда, является существенно линейной в том смысле, что она имеет дело только с бесконечно малыми возмущениями. Вероятнее всего, такая теория может дать верное описание лишь начальной стадии перехода ламинарного течения. Однако совершенно ясно, что на конечной стадии переход является существенно нелинейным процессом, в котором по крайней мере внутри области перемежаемости проявляются многие свойства полностью развитого турбулентного течения.

Вопросам гидродинамической устойчивости было посвящено довольно много исследований [20—22], и повторять их содержание здесь не имеет смысла. Однако, прежде чем оставить эту тему, рассмотрим два примера. На рис. 1.5 представлен полученный Брененом фотоснимок интересной волновой неустойчивости на поверхности кавитационной области; волны движутся со скоростью, примерно равной скорости жидкости, но не остаются в плоскостях,

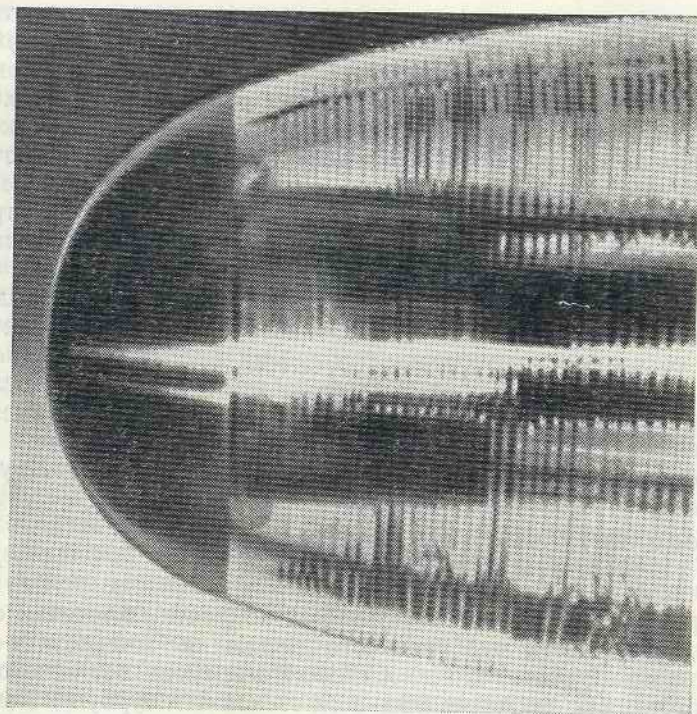


Рис. 1.5. Волновая неустойчивость на поверхности кавитационной области за обтекаемым полусферическим телом.

Из работы К. Бреннена (Калифорнийский технологический ин-т): С. Brennen, Cavity surface wave patterns and general appearance, *J. Fluid Mech.*, 44, 33—49 (1970).
Воспроизводится с разрешения изд-ва Кембриджского ун-та.

перпендикулярных к направлению течения. Процесс развития возмущений и переход от ламинарного течения к турбулентному можно также проследить на примере течения, показанного на рис. 1.6. На этом рисунке изображена полученная с помощью интерферометра картина течения в струе, которое развивается от ламинарного режима через переходный к турбулентному. Здесь целесообразно, по-видимому, напомнить об основных свойствах течения. Вначале течение является ламинарным с очень малой диффузионной скоростью, и линии постоянной плотности остаются по существу прямолинейными. Затем возникают и развиваются (сначала медленно) спиралевидные колебания струи, которые в конце концов приводят к полностью развитому турбулентному течению. За время этого процесса перехода ширина струи возрастает на по-

рядок своей величины, что вызвано значительным усилением процессов перемешивания в турбулентном движении.

Сильным средством превращения ламинарного течения в турбулентное являются препятствия в потоке. На рис. 1.7 показано течение около системы препятствий из прямоугольных блоков и большой турбулентный след, образующийся внизу по потоку за ними. Масштаб длины, характерный для вызванного препятствиями движения, имеет порядок размеров самого препятствия. Правда, из фотоснимка не очевиден полностью пространственный характер течения, в частности не видна система концевых вихрей, сходящих с углов препятствий. Течения типа, показанного на этом рисунке, также представляют интерес в связи с атмосферными течениями вблизи зданий и с характером силового поля, действующего на них. При этом между соседними зданиями возникает ветровая обстановка определенного типа, которая влияет на обитателей этого района.

Центральное положение в механике жидкости занимает теория турбулентного пограничного слоя на твердых стенках, в котором наиболее интересными являются две области.

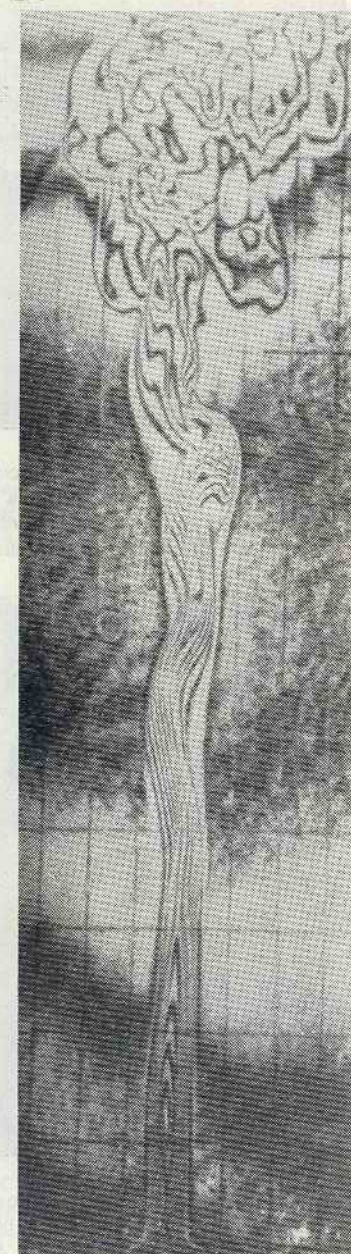


Рис. 1.6. Неустойчивость нагретой ламинарной струи ($Re \approx 250$).

Из работы Дж. К. Моллендорфа (Western Electric Co.) и В. Джебхарта (Корнелльский ун-т): J. C. Mollendorf, B. Gebhart, An experimental and numerical study of the viscous stability of a round laminar vertical jet with and without thermal buoyancy for symmetric and asymmetric disturbances, *J. Fluid Mech.*, 61, 367—399 (1973).
Воспроизводится с разрешения изд-ва Кембриджского ун-та.

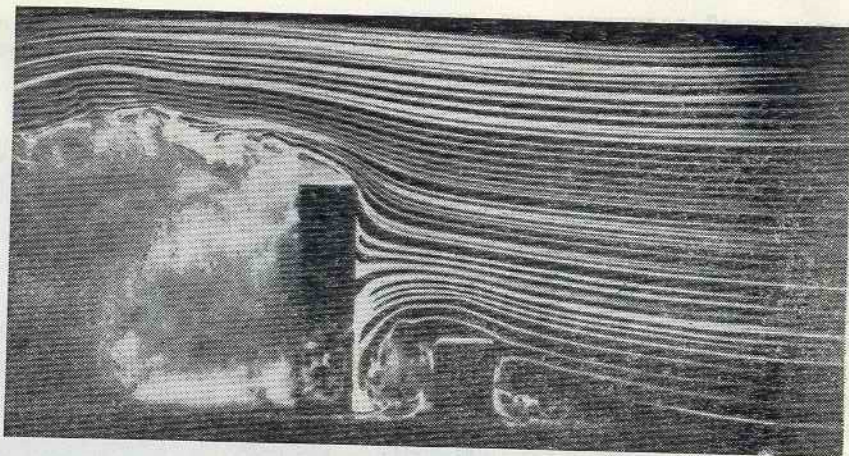


Рис. 1.7. Обтекание с малыми скоростями моделей зданий.

Фото снимок Ингельмана — Зундберга (Швейцарская высшая техническая школа, Цюрих) из работы Г. Томана: Thomann H., Wind effects on buildings and structures. *Am. Sci.*, 63, 278—287 (1975).
Воспроизводится с разрешения редакции журнала *American Scientist*.

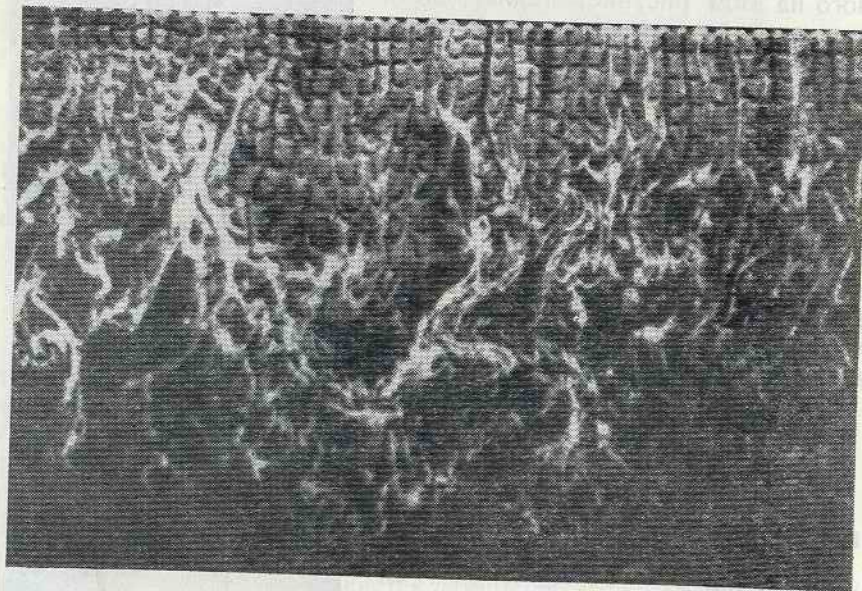


Рис. 1.8. Исследование с помощью водородных пузырьков течения воды в пограничном слое.

Проволочка расположена внутри логарифмического участка пограничного слоя при $y^+ = 82$. Течение в гидротомке с малыми скоростями при нулевом градиенте давления. Из работы С. Клайна, У. Рейнольдса, Ф. Шрауба и П. Ранстедлера (Стэнфордский ун-т): S. J. Kline, W. C. Reynolds, F. A. Schraub, P. W. Runstadler, The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, 30, 741—773 (1967).
Воспроизводится с разрешения изд-ва Кембриджского ун-та.

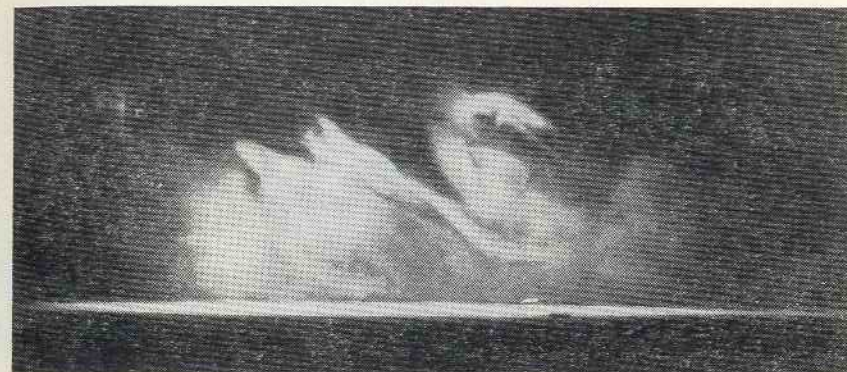


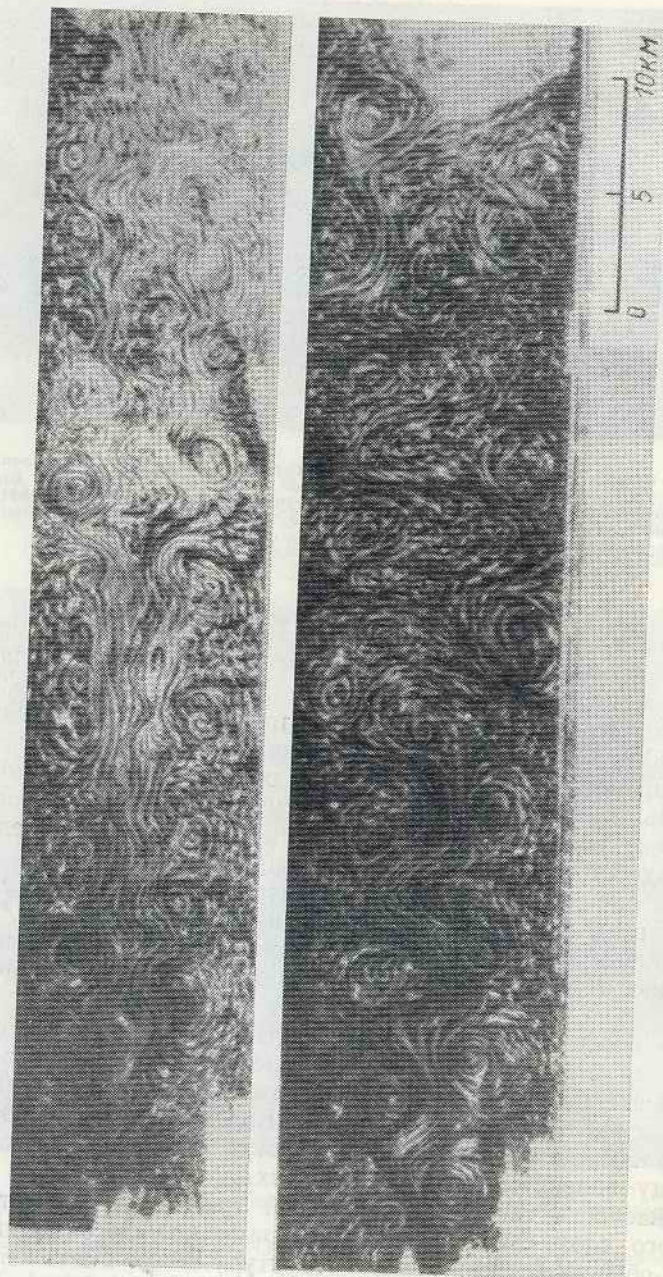
Рис. 1.9. Визуализация с помощью дыма течения с малой скоростью в пограничном слое.

Течение справа налево. Показана интенсивно пульсирующая и сильно искривленная внешняя граница турбулентного сдвигового течения с малой скоростью. Из работы П. Бредшоу (кафедра аэродинамики Королевского колледжа, Лондон): P. Bradshaw, The understanding and prediction of turbulent flow. *Aeronaut. J.*, 76, 403—418 (1972).
Воспроизводится с разрешения Королевского об-ва авиации.

Одна из них — пристеночная область (рис. 1.8), в которой происходят периодические разрушения сильно завихренного течения, что служит источником количества движения для основной части турбулентного потока; вторая — область перемежаемости, которая определяет внешнюю границу турбулентного пограничного слоя. На рис. 1.6 область перемежаемости можно видеть там, где вниз по потоку от области ламинарного течения граница между струей и окружающей неподвижной жидкостью сильно искривлена. Резче выражена эта ситуация на рис. 1.9. Граница турбулентного пограничного слоя не является гладкой и стационарной. Однако несмотря на то, что на этой границе имеет место сильная перемежаемость, турбулентное и внешнее ламинарное течения остаются четко разграниченными.

Хаос во внешней области турбулентного пограничного слоя отражается на структуре течения в пристеночном слое. Однако это не обязательно приводит к взаимозависимости явлений во внутренней и внешней областях потока. Более того, двухточечные корреляции скорости [23] свидетельствуют о слабой взаимозависимости между явлениями в этих областях.

Перемежаемость течения на внешней границе турбулентного пограничного слоя связана со структурами большого масштаба в основной области течения. Такую структуру может иметь каскадный вихревой процесс, существование которого предполагается



Из работы Д. Папаллиу и П. Ликудиса (Лафайетский ун-т): D. P. Papailiou, P. S. Lykoudis, Turbulent vortex streets and the entrainment mechanism of the turbulent wake, *J. Fluid Mech.*, 62, 11–31 (1974).
 Воспроизводится с разрешения изд-ва Кембриджского ун-та.

Рис. 1.10. Вихревая дорожка в турбулентном следе ($Re \approx 10^4$).

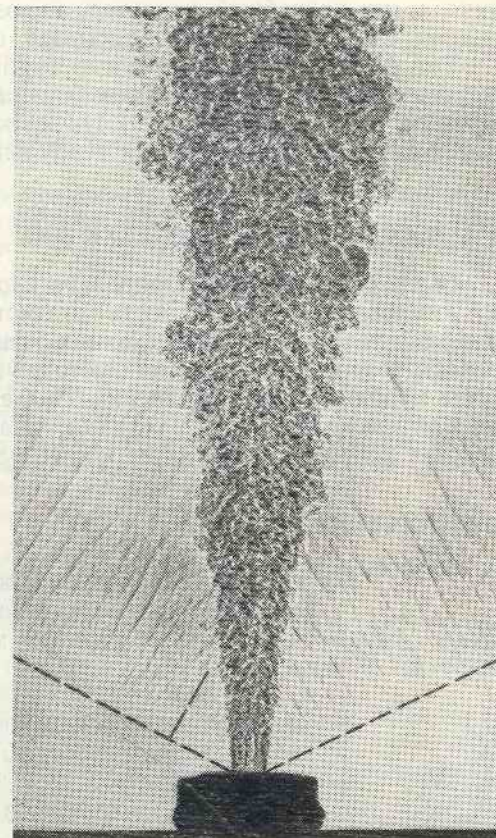


Рис. 1.11. Распространение звука от сверхзвуковой гелиевой струи с $P_{\text{полн}} = 3,85 \text{ кг/см}^2$.

Из работы К. Тама (ун-т шт. Флорида): С. К. W. Tam, Directional acoustic radiation from a supersonic jet generated by shear layer instability, *J. Fluid Mech.*, 46, 757–768 (1971).
 Воспроизводится с разрешения изд-ва Кембриджского ун-та.

в турбулентных течениях, или когерентные образования, показанные на рис. 1.4 и 1.10.

Представляет значительный интерес вопрос о том, как сильная завихренность, образующаяся в турбулентном течении вблизи стенки, проникает в основную область турбулентного пограничного слоя; визуальные исследования движения водородных пузырьков, выполненные Клайном, дают хорошее объяснение этому процессу. На рис. 1.8 показан типичный фотоснимок, полученный с помощью проволоочки, расположенной в точке $y^+ = 82$. Крупномасштабные вихревые образования,двигающиеся в направлении течения, проникают из нижней области во внешнюю область слоя, обычно называемую областью действия закона следа. Этот процесс сам по себе должен быть детерминированным (хотя расчет его не является простым делом), но местоположение и время таких событий на прак-

тике носит случайный характер, и поэтому такой процесс в конечном счете приходится описывать статистически [24].

Тот факт, что рассмотренные турбулентные образования приводят к распространению возмущений во внешнем ламинарном течении, подтверждает рис. 1.11, из которого можно установить, что показанная сверхзвуковая турбулентная струя генерирует шум.

1.4. О СОДЕРЖАНИИ ПОСЛЕДУЮЩИХ ГЛАВ

Выше была продемонстрирована сложность движения жидкости и установлена необходимость статистического описания турбулентных течений. В последующих главах будут обсуждаться как основы теории статистических методов в гидродинамике, так и вопросы моделирования уравнений Навье—Стокса с помощью современной вычислительной техники. Наконец, будут рассмотрены методы измерений характеристик турбулентных течений.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

D	— область, заполненная жидкостью;
E	— евклидово пространство;
F, f	— сила, сила на единицу массы;
i, j, k, l	— индексы;
I	— набор индексов;
J	— якобиан преобразования;
M	— масса жидкой частицы;
n, N	— целые числа;
P	— статическое давление в жидкости;
t	— время;
v_i	— составляющая скорости в направлении x_i ;
V_{ij}	— тензор скоростей деформаций;
V	— объем жидкой частицы;
X	— подобласть E ;
x_i, ξ_i, ζ_i	— прямоугольные координаты;
δ_{ij}	— символ Кронекера;
ρ	— плотность жидкости;
μ	— коэффициент вязкости;
τ_{ij}	— тензор напряжений;
∂D	— граница области D ;
U	— знак объединения;
$\cap$	— знак пересечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, части I и 2. — М.: Наука, 1965.
2. Davies P. O. A. L., Yule A. J., Coherent structures in turbulence, *J. Fluid Mech.*, **69**, 513—537 (1975).
3. Prandtl L., Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung, *Z. Verein. Dtsch. Ing.*, **77**, 105—114 (1933).
4. Nikuradse J., Kinematographische Aufnahme einer turbulenten Strömung, *Z. Angew. Math. Mech.*, **9**, 495—496 (1929).
5. Van Atta C. W., Sampling techniques in turbulence measurements, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 6 (M. Van Dyke, W. G. Vincenti, J. V. Wehausen, eds.), Annual Review Inc., Palo Alto, California, 1974, p. 75—91.
6. Serrin J., Mathematical principles of classical fluid mechanics, *Handbuch der Physik*, Vol. 8/1 (S. Flügge, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1959, p. 125—263. [Имеется перевод: Серрин Дж., Математические основы классической механики жидкостей. — М.: ИЛ, 1963.]
7. Truesdell C., The Elements of Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1966. [Имеется перевод: Трусделл К., Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.]
8. Shinbrot M., Lectures on Fluid Mechanics, Gordon and Breach, London, 1973.
9. Колмогоров А. М., Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
10. Jeffreys H., Swirls B. S., Methods of Mathematical Physics, third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1966. [Имеется перевод: Джеффрис Г., Свирлс Б., Методы математической физики, вып. 1, М., Мир, 1969, вып. 2 и 3. — М.: Мир, 1970.]
11. Lin C. C., Segel L. A., Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences, Macmillan Publishing Company, New York, 1974.
12. Aris R., Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
13. Rosenhead L., The second coefficient of viscosity: A brief review of fundamentals (и другие статьи на ту же тему), *Proc. R. Soc. (London)*, **A226**, 1—69 (1954).
14. Панчев С., Случайные функции и турбулентность (Исследование атмосферы). — Л.: Гидрометеонадат, 1967.
15. Leslie D. C., Developments in the Theory of Turbulence, Clarendon Press, Oxford, 1973.
16. Batchelor G. K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, Cambridge, 1970. [Имеется перевод: Бетчелор Д. К., Теория однородной турбулентности. — М.: ИИЛ, 1955.]
17. Townsend A. A., The Structure of Turbulent Shear Flow (second edition), Cambridge University Press, Cambridge, 1976. [Имеется перевод: Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М.: ИИЛ, 1959.]
18. Lorenz E. N., Investigating the predictability of turbulent motion в книге: Statistical Models and Turbulence (M. Rosenblatt, C. W. Van Atta, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1972, p. 195—204.
19. Stewart R. W., Triple velocity correlations in isotropic turbulence, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **47**, 146—157 (1951).

20. Chandrasekhar S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford University Press, Oxford, 1961.
21. Lin C. C., The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge University Press, Cambridge, 1966. [Имеется перевод: Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИИЛ, 1958.]
22. Stewart J. T., Nonlinear stability theory, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 3 (M. Van Dyke W. G. Vincenti, J. V. Wehauser, eds.), Annual Reviews Inc., Palo Alto, California, 1971, p. 347—370.
23. Cliff W. C., Sandborn V. A., Correlation between the outer flow and the turbulence production in a boundary layer, NASA Report № TMX 64935, 1975.
24. Chorin A. J., Lectures on Turbulence Theory, Publish or Perish Inc., Boston, Massachusetts, 1975.

2

Введение в описание явления турбулентности

Т. МОУЛДЕН¹⁾

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования явления турбулентности привели к не решенной до настоящего времени дилемме:

Туда, сюда, вниз, вверх, огромным роем;
 Им нет надежды на смягчение мук
 Или на миг, овеянный покоем.
 Как журавлиный клин летит на юг
 С унылой песнью в высоте надгорной,
 Так предо мной, стеная, неся круг
 Теней, гонимых вьюгой неборной...

«О души скорби! — я воззвал. — Сюда!
 И отзовитесь, если Тот позволит!»²⁾

13347
 Турбулентность, подобно любому другому не детерминированному строго физическому процессу, приходится рассматривать в рамках статистической теории, и плодотворные исследования таких процессов должны содержать как теоретическую, так и экспериментальную части. При экспериментальном исследовании обычно рассматриваются средние по времени значения изучаемых физических величин. С другой стороны, теоретические представления более логично развивать в рамках вероятностных подходов, поскольку при этом устраняются трудности с определением весовых функций в операторах осреднения. Если турбулентные процессы являются эргодическими, то проблема интерпретации экспериментальных данных разрешается [1], а более глубокий философский вопрос о возможности сопоставления теории и эксперимента в общем случае остается открытым.

Обычно предполагается, что логическую разработку теории можно продолжить и что ответ на вопрос: согласуется ли эта теория с наблюдаемыми явлениями или нет — дадут результаты последующих сравнительных исследований. Однако без ясного по-

¹⁾ Trevor H. Moulden, The University of Tennessee Space Institute, Tullahoma, Tennessee 37388.

²⁾ Данте Алигьери. Божественная комедия, Ад, Песнь пятая, с. 28—29. Пер. с итал. М. Лазинского. — М.: Наука, 1968.



нимания физических процессов ни форма необходимых аксиом, ни направление теоретических исследований не являются очевидными. Поскольку же в настоящее время физические процессы турбулентности нельзя считать полностью известными, любое теоретическое исследование этого явления приходится в значительной степени основывать на предположениях. Действительно, теория турбулентности, используемая на практике для расчетов турбулентных течений у стенок, включает в себя в той или иной форме эмпирические данные. Сущность этих различных основанных на экспериментах предположений будет обсуждаться позднее.

Другими словами, без общих гипотез, основанных на экспериментальных данных, нельзя провести в терминах теории вероятностей полное логически последовательное теоретическое исследование данного явления. Обнадеживающим фактом является то, что с использованием более сложной экспериментальной техники понимание физической природы турбулентности быстро улучшается. Необходимость этого особенно остро ощущается в случае неоднородной турбулентности.

Общие свойства течений жидкости, имеющие непосредственное отношение к турбулентности, можно продемонстрировать довольно просто. (Отметим, однако, что последующие замечания носят иллюстративный характер и не могут моделировать ситуаций в реальных течениях.) Пусть вязкая жидкость, физические свойства которой остаются постоянными, движется внутри плоской области D . Если через ζ обозначить завихренность течения, то уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{D\zeta}{Dt} = \lambda \nabla^2 \zeta, \quad (2.1)$$

где

$$\zeta = -\nabla^2 \psi.$$

Здесь ψ — функция тока, а λ — величина, обратная числу Рейнольдса, которое выражено через характерные для данной задачи длину и скорость.

Если граничные условия таковы, что набегающее течение является безвихревым и стационарным, то подстановка в выражение (2.1)

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad \zeta = \zeta_0 + \zeta_1, \quad (2.2)$$

где $\nabla^2 \psi_0 = 0$ и ψ_0 удовлетворяет граничным условиям вдали от тела, показывает, что

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_1 = -\nabla^2 \psi_1, \quad (2.3)$$

и, следовательно, полная завихренность течения определяется функцией ψ_1 .

После этого уравнение (2.1) принимает вид

$$\frac{D\zeta_1}{Dt} = \lambda \nabla^2 \zeta_1, \quad (2.4)$$

откуда следует, что любая зависимость от времени и любые изменения завихренности, которые могут возникнуть в течении, непосредственно связаны с вязкими свойствами жидкости; так, при $\lambda \equiv 0$ имеет место $D\zeta_1/Dt \equiv 0$, и для выполнения граничных условий в набегающем потоке необходимо, чтобы завихренность равнялась нулю во всем поле течения.

В начальный момент возникновения турбулентности в окрестности твердой поверхности такая зависимость турбулентного движения от вязкости жидкости соответствует действительности. Она также в основном является правильной для заключительной стадии диссипации энергии в мелкомасштабных вихревых образованиях. Однако с помощью вышеупомянутой двумерной модели нельзя объяснить многие фундаментальные свойства турбулентных течений. Невозможность полного описания механизма растяжения вихревых трубок является примером недостатков этой модели. Указанный механизм связан с каскадным процессом дробления вихрей в турбулентных потоках и определяет передачу энергии от основного движения к мелкомасштабным вихревым образованиям, в которых происходит вязкая диссипация. Полная энергия крупномасштабных вихрей в этом процессе остается приблизительно постоянной [2]. В гл. 3 обсуждение механизма растяжения вихревых трубок будет продолжено.

В неоднородной пристеночной турбулентности на внешней границе вязкого подслоя происходят спонтанные разрушения структуры течения. Значительная завихренность, образовавшаяся на стенке, развивается в отчетливо выраженные продольные вихри, которые затем уносятся из пристеночного подслоя и переносят с собой количество движения во внешнюю область. Существование такой структуры течения было установлено визуальными исследованиями Клайна и др. [3], Кима и др. [4], а также Корино и Бродки [5]. Исследования с помощью термоанемометров, выполненные Уилмартом и Лю [5], помогли лучше понять это явление, а в работе Гупта и др. [7] были описаны пространственные эффекты в пристеночном слое. Здесь необходимо также упомянуть более ранние визуальные исследования Фёрнхольца [8].

Было найдено, что на большом расстоянии от стенки структура турбулентного течения подобна структуре течения в следе (Коулс [9]) и характеризуется сильной перемежаемостью. Фидлер и Хэд [10], Коважный и др. [11], Антониа [12], а также многие другие авторы исследовали различными методами характер этой перемежаемости. Крупномасштабная перемежаемость существует не только во внешней области турбулентного течения, и ее исследования начали более быстро развиваться с разработкой метода условных выборок (Лауфер [13], Девис и Юл [14]), обсуждение которого мы отложим на будущее.

Теперь можно описать некоторые общие свойства турбулентных

течений. Тейлором было сделано предположение о том, что течение ведет себя так, как если бы оно имело бесконечное число степеней свободы. Эта гипотеза могла бы оказаться полезной для обоснования необходимости статистического описания течений, если бы она, кроме всего прочего, не означала, что возмущения внутри течения носят неупорядоченный характер. Однако сделанные выше замечания показывают, что турбулентное течение (в особенности турбулентность в окрестности стенки) имеет, наоборот, хорошо упорядоченную структуру. Но даже и без учета этого факта течение должно удовлетворять законам сохранения. По-видимому, более плодотворно рассматривать поле турбулентного течения как недетерминированное в том смысле, что полный набор начальных условий всегда остается неизвестным. Эта задача имеет тот же самый смысл, что и задачи статистической механики, хотя с физической точки зрения они сильно различаются.

Турбулентность характеризуется интенсивными процессами диффузии и большими пульсациями завихренности. Эти процессы сопровождаются диссипацией энергии в мелкомасштабных вихревых образованиях и означают, что турбулентность может существовать только при непрерывном подводе энергии. Из литературы хорошо известно, что скорость диффузии и диссипация энергии в турбулентных потоках намного превосходят аналогичные величины в ламинарном течении.

Можно еще отметить [15], что турбулентность является свойством течения, а не физической характеристикой жидкости.

Энергия, необходимая для поддержания турбулентности течения, может поступать за счет работы либо архимедовых сил, либо напряжений трения в основном течении. Внешние силы (например, магнитные) также могут влиять на каскадный процесс передачи энергии, если посредством этих сил подводится значительная часть энергии.

2.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

2.2.1. Общие соображения

Исследования, описываемые в настоящем разделе, будут основаны на рассмотрении жидкости как сплошной среды. Это предположение сразу же ограничивает диапазон чисел Кнудсена, в котором данный анализ является справедливым. Кроме того, из этой же гипотезы следует вывод о существовании нижнего предела масштабов длины, связанных с турбулентным движением. Например, внутренний масштаб Колмогорова должен быть большим по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул. Для большинства представляющих практический интерес течений это требование выполняется.

Предположение о том, что жидкость является сплошной средой, делает ненужным рассмотрение ансамблей молекул и позволяет использовать уравнения движения, полученные Навье и Стоксом. Обусловленное этим упрощение весьма полезно, однако необходимо сделать одно замечание, касающееся следствия такого перехода от анализа молекулярного движения жидкости к анализу сплошной среды. Задача с начальными данными в кинетической теории допускает лишь единственное решение, тогда как решение уравнений Навье—Стокса может быть неединственным [16]. При аппроксимации, заключающейся в определении функции распределения и в последующем интегрировании уравнения Больцмана, математические свойства задачи могут меняться.

Для того чтобы приступить к выводу уравнений движения, определим в пространстве и времени область D в прямоугольной системе координат (x_i, t) , $i = 1, 2, 3$, и введем условие суммирования по одинаковым индексам, обычно используемое для анализа тензорных величин в декартовых координатах. Предполагается, что пространственная область Ω характеризуется метрикой евклидова пространства E^3 . Таким образом, движение жидкости можно описать с помощью оператора Γ_t , который преобразует элемент $\delta\Omega$ в пространстве E^3 . Необходимо наложить соответствующее требование гладкости оператора Γ_t и обратного ему (Мейер [17]). Поскольку дифференциальные уравнения, описывающие движение жидкости, были получены при условии выполнения вышеупомянутых требований, очевидно, что вытекающие из них решения должны также удовлетворять этим требованиям. Необходимо еще, конечно, обсудить существование и единственность решения уравнений Навье—Стокса (работы Ладыженской [18, 19] и Шинброта [16]).

Уравнения движения будут получены в рамках определенных ограничений. Предполагается, что физические свойства жидкости остаются неизменными, а поле внешних сил отсутствует. Эти предположения вводятся лишь с целью упрощения анализа и не являются необходимыми по смыслу задачи. В действительности плотность движущейся жидкости (а в особенности газа) никогда не является в точности постоянной. Этот факт может оказывать влияние на результаты детальных исследований структуры мелкомасштабных вихревых образований, обладающих значительной завихренностью. Если же в течении присутствуют пульсации плотности, из уравнений движения сжимаемой жидкости следует, что необходимо рассматривать корреляции плотности и составляющих скорости. Кроме того, пренебрежение внешними силами не означает, что течения, подобные рассматриваемым в магнитной гидродинамике, не представляют ни интереса, ни практической важности.

Следовательно, хотя накладываемые ограничения значительно

упрощают анализ, результаты теоретических исследований необходимо оценивать с точки зрения возможных последствий этих предположений. Если при теоретическом исследовании не принимались во внимание обнаруженные экспериментально существенные свойства явления, то нельзя рассчитывать, что такое исследование будет правильно отражать характеристики реальных течений. В частности, турбулентные течения *никогда* не бывают двумерными, даже если накладываемые на них граничные условия позволяют на это надеяться. Аналогично, нельзя рассматривать диссипацию энергии в мелкомасштабных вихревых образованиях, не учитывая молекулярного строения жидкости или по крайней мере непостоянство ее физических свойств. Несмотря на это, модель сплошной среды позволяет получить полезные результаты.

Механизм влияния на течение полимерных добавок, состоящих из длинных молекул, не укладывается в рамки настоящей работы и поэтому здесь рассматриваться не будет.

2.2.2. Подробный анализ

При условии выполнения сделанных выше предположений уравнения движения можно записать (если не вдаваться в детали вывода) в следующем виде [20]:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение количества движения:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.6)$$

Уравнение энергии:

$$\Phi + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial e}{\partial x_i}. \quad (2.7)$$

В последнем уравнении e обозначает удельную внутреннюю энергию, а Φ — член, характеризующий диссипацию, который имеет вид

$$\Phi = \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (2.8a)$$

где

$$\bar{\sigma}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8b)$$

выражает составляющие тензора напряжений, из которого исключено давление.

Применяя операцию дивергенции к соотношению (2.6), получим уравнение Пуассона для поля давления

$$\nabla^2 P = -\rho \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j} = -\rho \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (2.9)$$

правая часть которого зависит от градиентов скорости. Необходимо отметить, что в уравнение (2.9) не входит вязкость жидкости. Однако от вязкости зависят граничные условия типа Неймана, которым должно удовлетворять решение уравнения (2.9).

Описываемые уравнения основываются на гипотезе Ньютона о том, что напряжения и скорости деформаций в течениях жидкости связаны между собой линейными соотношениями. Известно, однако, что истинность этой гипотезы подвергается сомнению применительно ко многим течениям, представляющим практический интерес. Это относится, в частности, к течениям с большими поперечными градиентами скорости (например, в мелкомасштабных вихревых образованиях) и течениям многофазной жидкости. Тем не менее здесь мы оставим эти уравнения без изменений и будем обсуждать следующие из них выводы.

Стюарт [21] представил некоторые доказательства применимости уравнений Навье—Стокса для описания турбулентных течений жидкости. Он проверил экспериментально динамические уравнения Кармана—Хуарта для изотропной турбулентности, которые следуют из уравнений Навье—Стокса.

Для последующих приложений полезно отметить, что с помощью уравнения (2.5) можно записать уравнение количества движения (2.6) в другом виде:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.6a)$$

Подобно тому как применение операции дивергенции к уравнению (2.6) дает уравнение для определения поля давления, операция ротора от того же самого уравнения позволяет получить уравнение, описывающее изменение завихренности [15]:

$$\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \rho \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.10)$$

С математической точки зрения уравнения (2.5) — (2.7) и (2.9) вместе с соответствующими граничными условиями представляют собой краевую задачу для переменных, характеризующих течение.

Во многих представляющих практический интерес задачах можно считать поле течения вдали от обтекаемого тела полностью стационарным. При рассмотрении течения жидкости в рамках модели сплошной среды считается, что жидкость на твердой граничной поверхности находится в покое. Турбулентные пульсации

на твердых границах также должны равняться нулю. Более точно их поведение было экспериментально найдено Лауфером [22], который показал, что при приближении к стенке u_2/x_2 стремится к нулю, а u_1/x_2 и u_3/x_2 стремятся к некоторым постоянным. Кроме того, предполагается $u_1/U_1 \rightarrow \text{const}$. Механизм, посредством которого генерируемая на стенке большая завихренность спонтанно преобразуется в турбулентные образования (см., например, работу Клайна и др. [3]), не связан с граничными условиями. Этот механизм является неотъемлемым свойством турбулентного течения в окрестности стенки.

Таким образом, граничные условия можно сформулировать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} v_i &\rightarrow U_\infty \\ v_i &= 0 \text{ на поверхности тела} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Завихренность вдали от тела считается известной (обычно предполагается, что она равна нулю), а пульсации завихренности на твердой поверхности тела, связанные с локальными величинами трения на стенке, неизвестны заранее. Полученные из уравнения количества движения (2.6) граничные условия для поля давления соответствуют стенке и имеют вид

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x_i} \right|_{\text{ст}} = \mu \left. \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right|_{\text{ст}}. \quad (2.12)$$

Вообще говоря, давление на стенке не стационарно, поскольку градиенты скорости определяются из турбулентного течения. В пристеночном подслое Уилмартом и Лю [6] экспериментально были обнаружены большие флуктуации скорости. В дальнейшем исследования полей давления на стенках проводили Лилли и Ходгсон [23], Уилмарт и Вулдридж [24], а также Уиллс [25]. Эти исследования показали, что временные и пространственные корреляционные функции имеют острый максимум в начале отсчета и быстро затухают с увеличением расстояния или с течением времени. Пространственные корреляции становятся равными нулю на расстояниях порядка толщины пограничного слоя [26], а импульсы давления перемещаются относительно стенки со скоростью, составляющей 80% скорости набегающего течения.

2.3. ПОДХОД РЕЙНОЛЬДСА

Рейнольдс [27] впервые ввел представление турбулентного движения жидкости в виде случайных отклонений относительно некоторых средних величин. Однако точные условия, которым должен удовлетворять оператор осреднения, не являются очевидными.

Наиболее общее выражение для такого оператора (Монин и Яглом [28]) имеет вид

$$U = \langle u, f \rangle \equiv \int_D u(x_i - \xi_i, t - \tau) f(\xi_i, \tau) d\Theta_i, \quad (2.13)$$

где $d\Theta_i$ обозначает элемент объема (ξ_i, τ) в пространстве. Весовую функцию в выражении (2.13) удобно нормализовать следующим образом:

$$\int_D f(\xi_i, \tau) d\Theta_i \equiv 1. \quad (2.14)$$

Любая функция $f(\xi_i, \tau)$, для которой интеграл в выражении (2.13) существует (хотя бы в смысле Лебега), должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \langle u + v, f \rangle = \langle u, f \rangle + \langle v, f \rangle, \\ \text{б)} \quad & \langle au, f \rangle = a \langle u, f \rangle, \\ \text{в)} \quad & \langle a, f \rangle = a, \\ \text{г)} \quad & \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, f \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u, f \rangle, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где a — постоянная величина.

Если вид весовой функции f известен, то при записи можно для удобства эту величину опустить. В этом случае $\langle u \rangle$ обозначает среднее значение u . В экспериментальных работах обычно используются величины u , средние по времени, которые обозначаются чертой над символом и определяются следующим образом:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u_i(\tau) d\tau.$$

Если такой вид осреднения имеет смысл, то физическое явление, к которому оно применяется, должно обладать определенными свойствами, в частности период исследуемых пульсаций должен быть малым по сравнению с характерным временем изменения среднего движения. Другими словами, должен существовать большой разрыв между высокочастотными и низкочастотными составляющими течения [28]. Это условие в действительности не всегда удовлетворяется, однако часто его можно считать выполненным с достаточной степенью точности.

Рассмотрим пример использования оператора осреднения. Пусть при некоторой известной весовой функции f через U_i обозначено среднее значение функции v_i , т. е.

$$U_i \equiv \langle v_i, f \rangle. \quad (2.16)$$

Тогда пульсационную составляющую u_i можно определить как

$$v_i = U_i + u_i. \quad (2.17)$$

Применяя к этому выражению оператор осреднения (2.13), получим

$$\langle v_i, f \rangle = \langle U_i, f \rangle + \langle u_i, f \rangle \equiv U_i.$$

Если можно выбрать функцию f , для которой имеет место

$$\langle U_i, f \rangle = U_i, \quad (2.18)$$

то $\langle u_i, f \rangle \equiv 0$.

Анализ уравнения неразрывности (2.5) показывает, что среднее значение U_i удовлетворяет условию

$$\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, f \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle v_i, f \rangle = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.19)$$

и поэтому из выражения (2.17) следует

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Это соотношение выполняется для любой функции f при условии существования интеграла в выражении (2.13) независимо от того, выполняется ли условие (2.18) или нет.

Конкретный вид весовой функции f зависит от требующейся информации об исследуемом явлении. Выбор f в простейшем виде

$$\begin{aligned} f &= \delta(\xi_i)/2T, & |\tau| < T, \\ f &= 0, & |\tau| > T \end{aligned} \quad (2.20)$$

определяет среднее по времени. Данная весовая функция удовлетворяет условию (2.18), однако трудности, связанные с исследованием нестационарных явлений, при таком выборе f не устраняются.

Интервал времени T , необходимый для получения стационарных средних значений при условиях (2.20), может быть слишком большим, и многие интересные свойства течений могут быть упущены [13]. Интересным примером, иллюстрирующим этот эффект, могут служить измерения перемежаемости. Предположим, что датчики помещены во внешней области, в переходной области и в пристеночном подслое турбулентного пограничного слоя. Ясно, что в случае стационарного среднего течения определенные с помощью выражений (2.20) средние величины будут функциями параметра T . Изменения T в диапазоне малых значений этого параметра будут приводить к значительным изменениям средних величин, а стационарные значения будут получаться при $T \rightarrow \infty$. С физической точки зрения причина этого явления состоит в том, что поток будет турбулентным только в течение некоторой части полного времени

измерений. Более эффективно выделять записи измерений, в течение которых существует турбулентность, а затем характеристики на этих участках осреднять. Отношение суммарной длины этих участков к полному времени регистрации дает непосредственное измерение перемежаемости.

В методе условных выборок для определения статистических средних используется только часть регистрируемых сигналов. При применении этого метода требуется сложная аппаратура для обработки данных. Вид весовой функции в таких исследованиях определяется изучаемыми физическими процессами. В принципе $f=1$ или $f=0$ может выбираться автоматически в зависимости от выполнения заданных условий в определенной точке потока. Коважный и др. [11] при исследованиях перемежаемости во внешней области турбулентного течения у стенки в качестве сигнала для выбора f использовали локальное значение завихренности. Когда это значение превышало заданный уровень, сигнал датчика регистрировался. В противном случае измерительное устройство отключалось. Аналогичный метод измерений использовали Каплан и Лауфер [29]. Регистрация сигналов, превышающих заданный уровень, позволила получать стационарные средние величины.

Очевидно, что метод условных выборок является довольно-таки искусственным, так как условия приемлемости результатов измерений устанавливаются более или менее произвольно. Трудность вновь заключается в определении весовой функции. Однако, несмотря на такое несколько искусственное определение условий выборки, с помощью этого метода можно значительно лучше понять процессы, происходящие в течениях. С появлением метода условных выборок стало возможным ответить на многие интересные вопросы о природе разрушения сильно завихренного течения в пристеночном подслое турбулентного потока и о возможной связи этого явления с перемежаемостью во внешней области.

2.3.1. Уравнения для средних значений

Для применения оператора осреднения к уравнению количества движения (2.6а) необходимо выполнение условия (2.18). Необходимость этого можно продемонстрировать, рассмотрев нелинейное выражение

$$I \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} [(U_i + u_i)(U_j + u_j)].$$

Если применить к этому выражению оператор осреднения с весовой функцией f , то можно получить

$$\langle I, f \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \{ \langle U_i U_j, f \rangle + \langle U_i u_j, f \rangle + \langle U_j u_i, f \rangle + \langle u_i u_j, f \rangle \}.$$

В общем случае очевидно, что если соотношение (2.18) имеет место, а область D достаточно велика, чтобы корреляции составляющих скорости U_i и u_i отсутствовали, то справедливо равенство

$$\langle U_i u_j, f \rangle = 0, \quad (2.21)$$

которое приводит к следующему результату:

$$\langle I \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle U_i U_j + \langle u_i u_j \rangle \rangle.$$

Функция f теперь исключена из записи, поскольку используется специальный вид этой функции, обеспечивающий выполнение соотношения (2.18). Если v_i и v_j не коррелированы между собой, то ковариация $\tau_{ij} \equiv \langle u_i u_j \rangle$ равняется нулю. Более подробно методика получения корреляционных функций будет описана в разд. 2.4.

Уравнение количества движения для среднего течения имеет вид

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2.22)$$

где полный тензор напряжений σ_{ij} определяется следующим выражением:

$$\sigma_{ij} = \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \tau_{ij} - \langle P \rangle \delta_{ij}.$$

Уравнение, подобное уравнению (2.22), можно получить и для флуктуаций скорости. Из уравнения (2.6а) следует соотношение

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j + U_i u_j + U_j u_i + u_i u_j) + \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

которое с учетом уравнения (2.22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i u_k + U_k u_i) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \rho u_i u_k + \rho \tau_{ik} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из уравнения (2.10) можно получить аналогичное уравнение для средней завихренности Ω_i :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} + \rho U_i \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} + \rho \langle u_j \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \rangle = \rho \langle \omega'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle + \\ + \rho \Omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_j \partial x_j}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где пульсации завихренности ω'_i определяются разностями

$$\omega'_i = \omega_i - \Omega_i.$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \omega'_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} + \rho u_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} + \rho \langle u_j \frac{\partial \omega'_i}{\partial x_j} \rangle = \rho \omega'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \\ + \rho \Omega_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \rho \langle \omega'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle + \mu \frac{\partial^2 \omega'_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{aligned} \quad (2.24a)$$

описывает пульсации завихренности.

В уравнениях для флуктуаций скорости, так же как и в уравнениях для средних значений, входит ковариация $\tau_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$. Аналогичные уравнения для завихренности содержат корреляции составляющих скорости со вторыми производными от них (т. е. со вторыми производными от составляющих тензора напряжений). Роль динамики завихренности в турбулентности превосходно описана Теннекесом и Ламли [15].

Теперь рассмотрим главную трудность в теории турбулентности. С введением разложения Рейнольдса и сопутствующего ему осреднения появляется новый неизвестный тензор τ_{ij} . Это разложение, более или менее произвольное, тем не менее имеет с физической точки зрения некоторые достоинства, поскольку оно проясняет сущность турбулентных процессов переноса. Методам моделирования тензора напряжений в настоящей книге уделено значительное внимание.

Как будет показано позже, для получения ковариационных уравнений нужно вычислить моменты от уравнений количества движения. В эти уравнения войдут уже тройные произведения $\langle u_i u_j u_k \rangle$, и вновь возникает проблема замыкания системы уравнений, описывающих турбулентное движение.

2.3.2. Некоторые замечания

Уравнение (2.22) обладает некоторыми интересными свойствами. В случае весовой функции, удовлетворяющей условию $\langle U_i, f \rangle = U_i$, уравнение для средних значений отличается от исходного уравнения (2.6) добавочным членом, связанным с нелинейностью инерционного члена $\partial U_i U_j / \partial x_j$. Вообще говоря, ковариации с произвольными функциями g_i вида $\langle u_i g_i \rangle$ всегда возникают при определении средних значений нелинейных членов. Для функций f , не удовлетворяющих условию (2.18), в уравнения для средних значений могут также войти добавочные члены. Однако, так как эти уравнения зависят от вида функций f , физический смысл их неясен.

В случае жидкости с постоянными физическими свойствами член $\partial(v_i v_j)/\partial x_j$ в уравнении (2.6) будет единственным нелинейным членом. Конечно, если корреляция между v_i и v_j отсутствует или эти функции являются ортогональными, то член $\langle u_i u_j \rangle$ равен нулю. Факт корреляции между v_i и v_j означает, что существует большое различие в скоростях диффузии ламинарного и турбулентного течений. Результаты экспериментов показывают, что (за исключением близкой к окрестности стенки в случае неизотропной турбулентности) τ_{ij} по порядку величины превышает обусловленное молекулярной вязкостью напряжение трения.

Величина $\partial\langle u_i u_j \rangle/\partial x_j$ в уравнении (2.22) объединена с членом, характеризующим вязкие напряжения. Смысл этой операции не только в математическом удобстве. Функция $\langle u_i u_j \rangle$, называемая тензором напряжений Рейнольдса, характеризует перенос количества движения вследствие наличия корреляции между пульсационными составляющими u_i и u_j . Общеизвестно, что член, характеризующий напряжения Рейнольдса, не зависит от вязкости, хотя для того, чтобы турбулентное движение существовало, жидкость должна быть вязкой.

Здесь имеется некоторое сходство с кинетической теорией газов в том смысле, что частицы некоторым случайным образом переносят энергию и количество движения. Однако попытка провести слишком близкую аналогию с кинетической теорией является опасной. Течение жидкости не является системой частиц, хаотически движущихся в пространстве и не взаимодействующих между собой. В данном случае жидкость рассматривается как сплошная среда, в которой движение жидких частиц описывается уравнениями (2.5) — (2.7).

Прямая аналогия с кинетической теорией газов приводит к такому понятию, как длина смешения, и к наложению на ковариации $\langle u_i u_j \rangle$ условий, несовместимых с уравнениями движения.

2.3.3. О пульсациях давления

До сих пор мы практически не уделили внимания пульсациям давления, которые представляют интерес при исследованиях аэродинамического шума. Рассмотрим их теперь. Из уравнения (2.9)

$$\nabla^2 P = -\rho \frac{\partial^2 v_i v_j}{\partial x_i \partial x_j}$$

следует соотношение

$$\nabla^2 (\langle P \rangle + p) = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (U_i U_j + U_i u_j + U_j u_i + u_i u_j).$$

Если операция осреднения удовлетворяет условию (2.18), то в результате осреднения имеем

$$\nabla^2 \langle P \rangle = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (U_i U_j + \langle u_i u_j \rangle). \quad (2.25)$$

Вычитая это уравнение из выведенного перед ним соотношения, получим уравнение для пульсаций давления в следующем виде:

$$\nabla^2 p = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (U_i u_j + U_j u_i + u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle). \quad (2.26)$$

Из уравнения (2.12) следуют граничные условия на стенке, которым должны удовлетворять пульсации давления p , а именно:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x_i} \right|_{\text{ст}} = \mu \left. \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right|_{\text{ст}}. \quad (2.26a)$$

Уравнение (2.26) показывает, что пульсации давления зависят как от тензора напряжений Рейнольдса, так и от квадратичных членов, образованных из составляющих скорости.

Если поле средней скорости и тензор напряжений Рейнольдса известны, то из уравнения (2.25) с помощью теоремы Грина можно получить поле среднего давления:

$$\langle P \rangle = \Gamma(x_i) - \rho \int_D G(x_i; \xi_i) \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (U_i U_j + \langle u_i u_j \rangle) d\xi_i. \quad (2.27)$$

В этом выражении интеграл по поверхности, характеризующий граничные условия, представлен в виде функции $\Gamma(x_i)$, а через $G(x_i; \xi_i)$ обозначена функция Грина для оператора Лапласа в области D .

С помощью аналогичной процедуры можно показать, что

$$p = \bar{\Gamma}(x_i) - \rho \int_D G(x_i; \xi_i) \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (U_j u_i + U_i u_j + u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle) d\xi_i \quad (2.28)$$

представляет собой решение для пульсаций давления и что эти пульсации в заданной точке определяются интегралом от пульсационных составляющих скорости, взятым по всей области течения. Уравнение (2.28) можно использовать для определения корреляций давления со скоростью. Если обозначить

$$N(\xi_i) \equiv \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} (U_i u_j + U_j u_i + u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle),$$

то можно получить, например, следующее выражение:

$$\langle u_i p \rangle = \langle u_i \bar{\Gamma}(x_i) \rangle - \rho \int_D G(x_i; \xi_i) \langle u_i N \rangle d\xi_i. \quad (2.29)$$

Можно ожидать, что для условий вблизи стенки первый член этого выражения окажется малым [24].

При изотропной и однородной турбулентности, как было показано Панчевым [30], корреляция давления с составляющими скорости отсутствует. В случае же неоднородной турбулентности (особенно в окрестности стенки) корреляция давления и скорости значительна. Более подробно поля давления у твердых стенок описываются в работе Лилли и Ходгсона [23].

2.3.4. Обращение к статистической теории

Вопросы, касающиеся вида весовой функции f в выражении (2.13), остались неразрешенными. Единственное ограничение, наложенное на f , заключалось в том, что эта функция должна удовлетворять условию $\langle U_i, f \rangle = U_i$. Однако в случае существования такой функции нет оснований полагать, что она единственная. Введенное ранее осреднение по времени показывает, что по крайней мере одна такая функция существует. Интервал времени, по которому производится осреднение, остается произвольным, так же как и определение порогового уровня сигнала в методе условных выборок. Преимущество вводимого в настоящем разделе определения средних значений будет заключаться в его единственности.

Предположим, что физический процесс является таким, что эргодическая гипотеза Неймана [31] и Биркгофа [32] выполняется. Тогда определение среднего значения с помощью соотношения (2.13) (понятие эргодичности рассматривается в гл. 3) можно заменить эквивалентным выражением в терминах теории вероятностей. В такой формулировке весовая функция f заменяется плотностью вероятности P , удовлетворяющей выражению [28, 30]

$$U_i = \int u_i P du_i,$$

где P нормируется следующим образом:

$$\int P du_i = 1.$$

При таком определении средних величин соотношения (2.15) выполняются. В то же время очевидно, что

$$\int U_i P du_i = U_i \int P du_i = U_i$$

и анализ разд. 2.3.2 можно проводить без ограничений, налагаемых соотношением (2.18). Такая теория является самосогласованной и исключает произвол в определении весовой функции.

Задача теперь сводится к определению условий, при которых эргодическая гипотеза выполняется, поскольку в большинстве экспериментов измеряются более простые средние по времени, а не по ансамблю.

2.4. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И УСЛОВИЯ ЗАМЫКАНИЯ ЗАДАЧИ

Вследствие наличия тензора напряжений Рейнольдса τ_{ij} соотношения (2.19) и (2.22) представляют собой незамкнутую систему уравнений. Разложение, при котором скорость определяется как $v_i = U_i + u_i$, где $U_i = \langle v_i, f \rangle$, превращает первоначально замкнутую задачу [уравнения (2.5) и (2.6)] в незамкнутую. Однако невозможность достаточно точного определения начальных данных делает и исходную задачу недетерминированной. Трудность теперь состоит в том, что поведение тензора напряжений τ_{ij} также описывается незамкнутой системой уравнений.

Для замыкания задачи можно использовать два принципиально разных подхода: разработку эмпирических гипотез и анализ точных уравнений движения. Несмотря на то что последний подход является более предпочтительным, исследования в этом направлении практически невозможны. В настоящее время все методы замыкания системы уравнений движения являются эмпирическими или основаны на аппроксимации.

При анализе экспериментальных данных для любых двух или более функций, корреляции которых не равны нулю, можно определить ковариации. Это можно сделать либо посредством разделения во времени или в пространстве двух записей измерений, используя промежуток времени или разность координат в качестве параметра ковариаций, либо путем измерения двух составляющих скорости в данной точке. Для определения структуры турбулентных течений могут оказаться полезными измерения двухточечных корреляций скорости в сочетании с методом условных выборок [13]. Этим методом Гупта и др. [7] показали, что поле турбулентного течения в непосредственной близости от стенки изменяется и в поперечном направлении, т. е. является пространственным.

В настоящей главе будут рассматриваться только одноточечные корреляции.

Вывод уравнения для тензора одноточечных корреляций τ_{ij} начинается с записи уравнения (2.23) в виде (Хинце [33])

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i u_k + U_k u_i) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \rho u_i u_k + \rho \tau_{ik} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

вместе с аналогичным уравнением для составляющей скорости u_j

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (U_j u_k + U_k u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_j} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \rho u_j u_k + \rho \tau_{jk} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Затем уравнение (2.30) умножается на u_j , а уравнение (2.31) — на u_i , и полученные соотношения складываются. После этого, используя преобразования типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j U_k) &= U_k \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j), \\ \rho u_i \frac{\partial}{\partial x_k} (u_j u_k) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k) &= \rho \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j u_k), \end{aligned}$$

правильность которых легко проверить дифференцированием с учетом уравнения неразрывности, можно получить следующий результат:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} (u_i u_j) + \rho (u_j u_k) \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \rho (u_i u_k) \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \rho U_k \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j p) + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i p) - \rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\rho \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_j u_k) + \\ + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} (u_i u_j) - 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \rho \left(u_j \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_k \rangle + u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_j u_k \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Применяя к этому соотношению оператор осреднения, получим уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \tau_{ij} + \rho \tau_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \rho \tau_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \rho U_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \rho u_j \rangle + \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \rho u_i \rangle - \langle \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rangle - \langle \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle = -\rho \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_j u_k \rangle + \\ + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \tau_{ij} - 2\mu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.33)$$

В результате этих преобразований, позволивших получить уравнение для τ_{ij} , появились добавочные тройные (неизвестные) корреляции вида $\langle u_i u_j u_k \rangle$. Вновь их появление обусловлено нелинейными инерционными членами уравнения количества движения (2.6). Кроме того, сюда вошли корреляции составляющих скорости и поля давления, которые обсуждались в разд. 2.3.3.

Таким образом, центральная проблема турбулентности — незамкнутость уравнений для средних величин — становится очевидной.

При $i = j$ уравнение (2.33) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \rho U_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q^2}{2} \right) + \rho \tau_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u_k \left(p + \rho \frac{q^2}{2} \right) \right\rangle = \\ = \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{q^2}{2} \right) - \mu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $q^2/2 \equiv \langle u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \rangle/2$ — турбулентная кинетическая энергия.

Из выполненного выше анализа следует, что в уравнение для момента любого порядка входят корреляции более высокого порядка. Следовательно, для точного описания поля турбулентного течения необходима бесконечная система уравнений (остающаяся незамкнутой), содержащая бесконечное число корреляционных функций. Поэтому в практических методах расчета для замыкания такой системы уравнений требуется обращение к эмпирическим данным.

Необходимость классификации методов замыкания в зависимости от порядка корреляционных функций, для аппроксимации которых применяются эмпирические соотношения, и от трудоемкости получения решения является очевидной.

Простейшая форма замыкания заключается в непосредственной аппроксимации тензора напряжений и приводит к таким понятиям, как турбулентная вязкость или длина смешения. Несмотря на простоту этого подхода и привлекательность его с физической точки зрения, с помощью такого подхода невозможно с достаточной степенью точности описать какое-либо не слишком простое течение и получить всю необходимую информацию.

В методах, использующих понятие турбулентной вязкости, проводится прямая аналогия с молекулярной вязкостью жидкости, и сила трения связывается с градиентом средней скорости в виде $\langle u_1 u_2 \rangle = \epsilon \partial U_1 / \partial x_2$. Обычно коэффициент турбулентной вязкости ϵ зависит от местоположения рассматриваемой точки.

Распределение напряжений Рейнольдса поперек турбулентного пограничного слоя очень похоже по форме на соответствующее распределение завихренности в ламинарном пограничном слое. Поэтому результаты применения концепции турбулентной вязкости в целом могут оказаться довольно точными, однако с физической точки зрения они будут некорректными, поскольку она основана на идее турбулентной жидкости, отличной по своим свойствам от вязкой жидкости в турбулентном движении.

На следующем уровне аппроксимации используется уравнение для турбулентной кинетической энергии (2.25). Этот, а также другие методы такого типа будут подробно описаны в последующих главах. Многие аспекты классификации методов замыкания обсуждались Лаундером и Сполдингом [34], а также Меллором и Ямадой [35]. Эти вопросы рассматривались также в работах Брэдшоу [36] и Меллора и Херринга [37].

Альтернативой эмпирическим, или аппроксимационным, методам замыкания являются попытки использовать точное численное решение полных уравнений движения. С этой точки зрения данная проблема обсуждалась Эммонсом [38], а также Орсогом и Израэли [39]. Однако даже при этом подходе от проблемы замыкания не

удается полностью избавиться, поскольку в мелкомасштабных вихревых образованиях, которые нельзя рассчитать с помощью используемых в настоящее время сеток, диссипирует большое количество энергии.

2.5. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Для многих интересных с практической точки зрения течений было обнаружено, что характерный масштаб длины вязкой области в направлении невозмущенного течения намного превышает поперечный размер этой области. Когда это имеет место (например, в турбулентном течении у стенки или в слоях смещения), можно использовать аппроксимацию типа пограничного слоя, чтобы получить уравнения, более простые для решения по сравнению с уравнениями Навье—Стокса. Несмотря на существенное упрощение, достигаемое с помощью такого подхода, в задаче остаются многие не разрешенные как с формальной, так и с практической точек зрения трудности.

При выводе уравнений турбулентного пограничного слоя возможны два различных подхода. Согласно одному из них на основе метода сращиваемых асимптотических разложений анализируются уравнения Навье—Стокса (2.5) — (2.7), а затем применяется оператор осреднения. В другом в качестве исходных используются уравнения для средних значений [аналогичные уравнениям (2.19) и (2.22)], а затем с целью получения уравнений пограничного слоя привлекаются методы сингулярных возмущений.

Как в том, так и в другом случае определенные трудности возникают при оценке величин пульсационных характеристик течения. Обычно описанные в литературе процедуры вывода уравнений пограничного слоя начинаются с предположений относительно порядка величин рассматриваемых характеристик течения (Нэш и Пейтел [40]).

2.5.1. Предварительный анализ

В рассматриваемом методе получения уравнений пограничного слоя для анализа выбраны уравнения (2.5) — (2.7). Процедура начинается с введения в эти уравнения (при помощи характерных для рассматриваемой задачи значений длины L и скорости U_∞) безразмерных переменных. Вводится также безразмерное время $U_\infty t/L$. Хотя это выражение аналогично выражению для числа Струхала, оно никак не связано с периодическим движением жидкости.

Теперь, если через λ обозначить величину, обратную числу Рейнольдса ν/UL , уравнение (2.6) принимает вид

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (2.35)$$

где все переменные являются безразмерными. Форма уравнения (2.5) сохраняется:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.36)$$

Далее вводятся асимптотические разложения в виде

$$\begin{aligned} v_i &\sim {}_o\varepsilon_1(\lambda) {}_ov_i^1 + {}_o\varepsilon_2(\lambda) {}_ov_i^2 + \dots \\ P &\sim {}_o\gamma_1(\lambda) {}_oP^1 + {}_o\gamma_2(\lambda) {}_oP^2 + \dots, \end{aligned} \quad (2.37)$$

где индекс o означает внешнее разложение. Коэффициенты разложения ${}_ov_i^n$ и ${}_oP^n$ являются величинами порядка $O(1)$ и не зависят от числа Рейнольдса, а калибровочные функции ε_n и γ_n , определяющие порядок членов разложения, зависят от числа Рейнольдса и удовлетворяют условиям

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon_n/\varepsilon_{n-1} \rightarrow 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \gamma_n/\gamma_{n-1} \rightarrow 0.$$

Подстановка разложений (2.37) в уравнения (2.35) и (2.36) и переход к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ позволяют получить соотношения

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial {}_ov_i^1}{\partial t} + \rho {}_ov_j^1 \frac{\partial {}_ov_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial {}_oP^1}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial {}_ov_i^1}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Для того чтобы получить эти соотношения (см. работу Ван-Дайка [41]), необходимо обратить внимание на тот факт, что функции ${}_ov_i^1$ и ${}_oP^1$ должны удовлетворять условиям в набегающем потоке, которые не зависят от числа Рейнольдса. Отсюда следует, что для каждой калибровочной функции ε_1 и γ_1 должно выполняться порядковое соотношение следующего вида:

$${}_o\varepsilon_1(\lambda) \sim {}_o\gamma_1(\lambda) \sim O(1).$$

Уравнения (2.38) представляют собой первое приближение к решению задачи во внешней области, аналогичное системе уравнений для потенциального течения. Они описывают локальное поведение скорости течения, и поэтому применение оператора

осреднения аналогично тому, как это было сделано в разд. 2.3.1, приводит к следующему результату:

$$\rho \frac{\partial \circ u_i^1}{\partial t} + \rho \circ U_j^1 \frac{\partial \circ u_i^1}{\partial x_j} + \frac{\partial \circ P^1}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \circ \langle u_i u_j \rangle^1. \quad (2.38a)$$

В это уравнение входит ковариация $\circ \langle u_i u_j \rangle^1$, эффект которой аналогичен воздействию на течение поля внешних сил.

Поскольку образующиеся в турбулентных сдвиговых течениях пульсации распространяются во внешней области, присутствие члена $\circ \langle u_i u_j \rangle^1$ в решении для этой области является с физической точки зрения естественным¹⁾. Этот факт приводит к проблеме граничных условий для $\circ \langle u_i u_j \rangle$ [42]. Например, можно потребовать, чтобы $\circ \tau_{ij}^1 \equiv \circ \langle u_i u_j \rangle^1$ равнялось нулю вдали от тела и сращивалось с некоторым определенным значением на внешней границе пограничного слоя. Если допускается присутствие турбулентности в набегающем потоке, то поведение $\circ \tau_{ij}^1$ в поле течения на бесконечности должно быть известно. Меллор [43] игнорировал возможность ненулевого значения τ_{ij} во внешнем течении. Однако шумы во внешнем течении могут быть связаны с этим членом.

Может оказаться, что прямая процедура сращивания с решением во внутренней области невозможна, поскольку граница области турбулентного течения с внешним «потенциальным» течением отчетливо выражена и поля пульсаций в двух рассматриваемых областях сильно различаются. Другими словами, ковариация $\circ \tau_{ij}^1$ во внешнем течении мала и в большинстве случаев ею можно пренебречь. Применительно к течению в сверхзвуковой аэродинамической трубе эти вопросы обсуждались Лауфером [44].

Шумы наиболее непосредственно связаны с пульсациями давления, поведение которых в первом приближении, аналогично уравнению (2.38), описывается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \circ u_i^1}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\circ U_i^1 \circ u_j^1 + \circ U_j^1 \circ u_i^1) + \frac{\partial \circ P^1}{\partial x_j} = \\ = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} [\circ u_i^1 \circ u_j^1 - \circ \langle u_i u_j \rangle^1]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Установлено, что пульсации давления $\circ P^1$ коррелируют с пульсациями давления на стенке в турбулентном пограничном слое.

Полученные выше уравнения связаны с распространением во внешней области течения шумов, генерируемых турбулентностью [45]. Точный вид условий на границе с внутренней областью, который должно удовлетворять решение, до сих пор не известен.

¹⁾ Конечно, корреляция отсутствует, если пульсации являются безвихревыми.

2.5.2. Замечания

Начатое выше формальное применение теории сингулярных возмущений к турбулентным течениям нельзя довести до конца без ясного понимания физических механизмов турбулентности. В последующем анализе мы ограничимся случаем неоднородной турбулентности в окрестности стенки, где область вязкого течения разделяется на внешнюю зону действия закона дефекта скорости и внутренний пристеночный слой. Основные трудности, которые при этом возникают, заключаются в оценке порядка напряжений Рейнольдса в каждом из этих слоев и в определении их толщин. Обе эти проблемы, конечно, взаимосвязаны.

Выведенные выше уравнения неприменимы ко внутренним слоям, поскольку турбулентные напряжения оказывают на решение лишь косвенное влияние. Без учета соответствующих членов приравнивание вязких и инерционных членов (в деформированной системе координат) приводит к уравнениям, описывающим ламинарное течение. Поэтому в уравнениях необходимо соответствующим образом учесть напряжения Рейнольдса. Яником [46] и Меллором [43] был достигнут в этом направлении некоторый прогресс, в результате которого многие эвристические предположения, обычно используемые при получении уравнений турбулентного пограничного слоя, сделались ненужными.

Последующий анализ основан на следующих простых предположениях:

1. Течение в пристеночной области в основном имеет вязкий характер.
2. Течение в области действия закона дефекта скорости имеет в основном вихревой характер и в первом приближении остается невязким.
3. Компоненты тензора напряжений Рейнольдса имеют один и тот же порядок поперек всего пограничного слоя.
4. Порядки всех величин, характеризующих турбулентное течение, определяются в конечном счете условиями замыкания.

Дальнейшее обсуждение уравнений пограничного слоя будет ограничено рамками стационарных плоских течений. То, что турбулентные процессы всегда имеют трехмерный характер (в особенности мелкомасштабные структуры [47]), в настоящем исследовании не учитывается.

Конечно, имеются существенные неясности относительно физического смысла примененного к тензору турбулентных напряжений асимптотического разложения, в котором зависимость от числа Рейнольдса входит только в параметры разложения, определяющие порядок членов. Одно из возможных объяснений состоит в том, что члены каждого порядка соотносятся с характери-

зуемыми некоторым масштабом длины вихревыми образованиями, которыми определяется диссипация энергии на различных уровнях.

Обычно при использовании метода сращиваемых асимптотических разложений [41] задача становится полностью замкнутой в том смысле, что порядок каждого последующего члена разложения можно определить либо при удовлетворении граничных условий, либо при сращивании с решением в соседней области. В случае же турбулентного сдвигового течения такую процедуру нельзя довести до конца, поскольку основные уравнения для осредненных величин являются незамкнутыми.

В настоящее время пока нельзя дать полного описания поставленной задачи; последующий анализ имеет пробный характер и предназначен для стимулирования дальнейших исследований. Прежде всего предполагается, что турбулентный пограничный слой достаточно точно описывается уравнениями, полученными с помощью некоторых упрощений уравнений Навье—Стокса. Для описания среднего движения это предположение может быть удовлетворительным; однако, как теперь установлено, незамкнутой системой уравнений нельзя описать структуру турбулентных течений.

Другим основным допущением является то, что интересующие нас характеристики течения можно разложить в асимптотические ряды по малым параметрам, зависящим только от числа Рейнольдса. Затем определяются подходящие порядки величин и соответствующие им масштабные множители, такие, что для каждой области течения получаются свои уравнения. Кроме того, исходя из характера рассматриваемого течения, определяются области, на которые необходимо его разделить.

На первый взгляд кажется, что промежуточную зону следует рассматривать как часть вязкого подслоя или по крайней мере как член высшего порядка. Можно ожидать, что таким путем удастся получить какое-либо соотношение вроде закона стенки Сполдинга. Однако в данном анализе этот подход не используется, а вместо этого предполагается, что промежуточная зона вместе с областью логарифмического распределения скорости находится несколько дальше от стенки. Такой подход мотивируется тем фактом, что нижняя граница промежуточной зоны разделяет две основные области в окрестности стенки и максимум генерации турбулентной энергии находится в соответствующем диапазоне безразмерных расстояний y^+ . В вязком подслое движение можно описать, ничего не зная о напряжениях Рейнольдса, кроме того, как они влияют на величину трения на стенке. Хотя течение в основном определяется вязкими свойствами жидкости, очевидно, что оно не похоже на течение в ламинарном пограничном слое. Хорошо известно [3], что в вязком подслое имеется большая нестационарная составляющая завихренности.

Над внешней границей области логарифмического распределе-

ния скорости течение имеет перемежающийся характер, типичный для зоны действия закона дефекта скорости. В настоящем анализе предполагается, что зона действия дефекта закона скорости отделяет от основного течения внешний вязкий подслой, который необходимо исследовать отдельно, поскольку течение здесь характеризуется сильной перемежаемостью с коэффициентом порядка 0,1. В этом внешнем подслое необходимо снова учитывать вязкие свойства жидкости и принимать в расчет как включения невозмущенной жидкости в турбулентное течение, так и довольно сильное влияние турбулентности набегающего потока на развитие течения.

2.5.3. Дальнейший анализ

Предположим, что во внутренней (пристеночной) области течение можно описать асимптотическими разложениями по малым параметрам, зависящим от числа Рейнольдса. Такие ряды для функции тока и завихренности имеют вид

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{i1} + \varepsilon_{i2}\psi_{i2} + \dots, \\ \zeta &= \beta_{i1}\zeta_{i1} + \beta_{i2}\zeta_{i2} + \dots, \\ T &= \gamma_{i1}T_{i1} + \gamma_{i2}T_{i2} + \dots, \\ y_i &= \Delta_i x_2.\end{aligned}\quad (2.40)$$

Масштаб длины Δ_i и малые параметры ε , β и γ зависят от числа Рейнольдса и должны удовлетворять условию

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a_{n+1}(\lambda)}{a_n(\lambda)} \rightarrow 0. \quad (2.41)$$

Соотношение между завихренностью и функцией тока разлагается в ряд следующим образом:

$$\begin{aligned}\beta_{i1}\zeta_{i1} + \beta_{i2}\zeta_{i2} + \dots &= -\frac{\partial^2 \psi_{i1}}{\partial x_1^2} - \varepsilon_{i2} \frac{\partial^2 \psi_{i2}}{\partial x_1^2} - \Delta_i^2 \frac{\partial^2 \psi_{i1}}{\partial y_i^2} - \\ &- \Delta_i^2 \varepsilon_{i2} \frac{\partial^2 \psi_{i2}}{\partial y_i^2} + \dots\end{aligned}$$

Поскольку масштабный множитель Δ_i не является величиной порядка 1, предположим, что в пределе, при $\lambda \rightarrow 0$, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}\beta_{i1} &\approx \Delta_i^2, \\ \beta_{i2} &\approx \varepsilon_{i2} \Delta_i^2.\end{aligned}$$

Тогда выражения для членов первого и второго порядков принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_{i1} &= -\frac{\partial^2 \psi_{i1}}{\partial y_i^2} \\ \xi_{i2} &= -\frac{\partial^2 \psi_{i2}}{\partial y_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Вследствие такого выбора соотношения между масштабами длины в направлениях координат x_1 и x_2 теория может применяться только к безотрывным течениям с умеренными градиентами давления.

Если определить параметры разложения так, чтобы при $\lambda \rightarrow 0$ получалось

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\lambda \Delta_i} &\rightarrow \infty, \\ \frac{\beta_{i1}}{\lambda \Delta_i^2 \beta_{i2}} &\rightarrow \infty, \\ \frac{\gamma_{i1}}{\lambda \Delta_i^2 \gamma_{i1}} &\sim O(1), \end{aligned} \right\}$$

то из уравнения количества движения в пристеночном слое следуют такие выражения для членов первого и второго порядков:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_{i1}}{\partial y_i^2} &= 0 \\ \frac{\partial \xi_{i2}}{\partial y_i^2} + T_{i1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Из частного решения

$$\xi_{i1} = f(x_1)$$

первого из уравнений (2.43) следует, что в вязком подслое

$$u^+ = y^+, \quad (2.44)$$

где

$$u^+ = U_1/v^*,$$

$$y^+ = v^* x_2/v$$

есть внутренние переменные для турбулентного пристеночного слоя; здесь v^* обозначает динамическую скорость $(\tau_w/\rho)^{1/2}$, связанную с трением τ_w на стенке.

Разложение скорости вблизи стенки в ряд Тейлора и учет граничных условий дают

$$\tau \approx \tau_w + \frac{dP}{dx_1} x_2 + \dots \quad (2.45)$$

Поскольку вязкий подслой располагается в области размером $y^+ < 10$, из соотношения (2.45) следует, что при больших величинах трения на стенке градиент давления в первом приближении не оказывает влияния на решение в этой области. Предполагается, что $(dP/dx_1)x_2 \ll \tau_w$, так как решение в окрестности точки отрыва не рассматривается. Эти соображения, по-видимому, позволяют разрешить противоречие, заключающееся в том, что граничные условия на стенке связывают градиент давления с второй производной $\partial^2 U_1/\partial x_2^2 \equiv \partial \tau/\partial x_2$, тогда как в эмпирические законы трения на стенке градиент давления явно не входит. Некоторые экспериментальные данные все же свидетельствуют об очень небольшом (второго или более высокого порядка малости) влиянии градиента давления на течение в вязком подслое [3]. Из того факта, что как y_i , так и y^+ являются величинами порядка 1, следует выражение для внутреннего масштаба длины

$$\Delta_i \sim \frac{v^*}{v} \sim \frac{(\tau_w)^{1/2}}{\lambda} \quad (2.46)$$

и, если масштабный множитель известен, то известна зависимость трения на стенке от числа Рейнольдса λ^{-1} .

В данном анализе предполагается, что область логарифмического распределения скорости с промежуточной зоной необходимо исследовать отдельно, а не на основе сращивания решения в подслое и в зоне действия закона дефекта скорости, как предлагалось в работе Меллора [43]. Поскольку в этой области генерируется максимальное количество турбулентной энергии, она заслуживает более подробного описания.

В данном подходе предполагается, что на развитие течения в этой области оказывают значительное влияние как вязкие напряжения, так и напряжения Рейнольдса. Однако не ясно, в каком соотношении с этими напряжениями находятся инерционные члены уравнений движения. Напишем разложения в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \psi &\approx \psi_{i1} + \epsilon_{i2} \psi_{i2} + \dots, \\ \xi &\approx \beta_{i1} \xi_{i1} + \beta_{i2} \xi_{i2} + \dots, \\ T &\approx \gamma_{i1} T_{i1} + \gamma_{i2} T_{i2} + \dots, \\ y_i &\approx \Delta_i x_2. \end{aligned} \right\}$$

Аналогично тому как это было сделано при анализе вязкого подслоя, будем считать, что завихренность связана с функцией тока следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{i1} &= -\frac{\partial^2 \psi_{i1}}{\partial y_i^2} \\ \xi_{i2} &= -\frac{\partial^2 \psi_{i2}}{\partial y_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Параметры разложения выбираются такими, что при $\lambda \rightarrow 0$ имеет место

$$\beta_{11} \approx \Delta_1^2, \quad \beta_{12} \approx \varepsilon_{12} \Delta_1^2.$$

Если предположить, что силы трения в первом порядке преобладают над инерционными силами, то из уравнения количества движения следует соотношение

$$\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial y^2} + T_{11} = 0, \quad (2.48)$$

которое непосредственно связывает вязкие напряжения и напряжения Рейнольдса. Уравнение (2.48), переписанное в более привычных терминах скорости и напряжений Рейнольдса,

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial U_{11}}{\partial x_2} + \tau_{11} \right) = 0,$$

и проинтегрированное по x_2

$$\mu \frac{\partial U_{11}}{\partial y} + \tau_{11} = f(x_1), \quad (2.48a)$$

определяет с точностью первого порядка решение в области логарифмического распределения скорости.

Здесь следует сделать несколько замечаний. Во-первых, необходимо отметить, что решение уравнения (2.48a) невозможно до тех пор, пока относительно τ_{11} не будут сделаны определенные предположения, и дальнейший анализ сдерживается незамкнутостью задачи описания турбулентного течения. Кроме того, можно еще отметить, что логарифмический профиль скорости не является решением уравнения (2.48a). При классическом подходе пренебрегается вязким членом, а напряжение Рейнольдса связывается с трением на стенке соотношением

$$\tau_{11} = \tau_w,$$

которое при интегрировании в предположении, что коэффициент турбулентной вязкости пропорционален расстоянию от стенки, приводит к логарифмическому профилю скорости. Другой способ получения этого профиля основывается на приравнивании друг другу в уравнении турбулентной кинетической энергии членов, определяющих генерацию и диссипацию этой энергии, причем масштаб диссипации принимается пропорциональным координате по нормали к стенке.

Однако уравнение (2.48a) является несколько более общим, чем уравнение, описывающее движение в области логарифмического распределения скорости; оно также описывает движение в промежуточной зоне. Можно отметить, что если

$$U \sim \ln(x_2),$$

то $\partial U / \partial x_2 \sim 1/x_2$ и очевидно, что в области логарифмического распределения скорости при $y^+ \approx 10^2$ вязкий член будет меньше члена, обусловленного напряжениями Рейнольдса. Однако это условие не выполняется в промежуточной зоне, где $y^+ \approx 10$.

Анализ решения в зоне действия закона дефекта скорости начинается с введения разложений

$$\left. \begin{aligned} \psi &\approx \psi_{d1} + \varepsilon_{d2} \psi_{d2} + \dots, \\ \xi &\approx \beta_{d1} \xi_{d1} + \beta_{d2} \xi_{d2} + \dots, \\ T &\approx \gamma_{d1} T_{d1} + \gamma_{d2} T_{d2} + \dots, \\ y_d &\approx \Delta_d (x_2 - \xi_d). \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Вследствие предположения о существовании внешнего слоя, разделяющего эту зону и область невозмущенного течения, точное положение зоны действия закона дефекта скорости в данной формулировке задачи не известно. Поэтому в уравнение для y_d введена характерная длина ξ_d .

С физической точки зрения течение в зоне действия закона дефекта скорости является сильно перемежающимся и включает конечные полосы большой длины, заполненные вихревыми образованиями. Кроме того, градиенты составляющих средней скорости в этой зоне малы, а напряжения Рейнольдса постепенно уменьшаются в направлении ее внешней границы.

Предполагается, что в этой области турбулентного пограничного слоя завихренность связана с функцией тока выражениями

$$\left. \begin{aligned} \xi_{d1} &= - \frac{\partial^2 \psi_{d1}}{\partial y_d^2} \\ \xi_{d2} &= - \frac{\partial^2 \psi_{d2}}{\partial y_d^2} \end{aligned} \right\}, \quad (2.50)$$

а уравнение количества движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tau_{d1}}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_{d1}}{\partial y_d} - \frac{\partial \psi_{d1}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \tau_{d1}}{\partial y_d} = T_{d1}. \quad (2.51)$$

Предполагается, что в зоне действия закона дефекта скорости напряжения Рейнольдса дают вклад в изменение завихренности вдоль линий тока.

Процедуру построения решения необходимо закончить сращиванием решения в зоне действия закона дефекта скорости с решением во внешнем слое, а следовательно, и с решением, описывающим невозмущенное течение.

Данный анализ нельзя считать завершенным. Он только показывает трудности, связанные с разработкой теории пограничного слоя для турбулентных течений, и свидетельствует о необходимости

включения эмпирических данных. В последующих главах описываются способы использования экспериментальных данных для создания практически эффективных вычислительных методов.

2.6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Изложенное выше вводное описание явления турбулентности представляет собой попытку проанализировать современное состояние исследований турбулентности и наметить пути дальнейшего их развития.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

a	— постоянная величина;
e	— внутренняя энергия на единицу объема;
f	— весовая функция в определении среднего значения;
g_i	— произвольная функция;
$G(x_i, \xi_i)$	— функция Грина;
L	— характерная длина;
p	— мгновенное значение давления или плотность вероятности;
p	— пульсационная составляющая давления;
q^2	— турбулентная кинетическая энергия;
t	— время;
T	— температура или интервал времени;
$T = \langle u_i \partial \omega' / \partial x_2 \rangle$	— функция напряжений Рейнольдса;
U_∞	— скорость набегающего потока;
U_i	— составляющие средней скорости;
u_i	— флуктуации составляющих скорости ($v_i = U_i + u_i$);
u, v	— составляющие скорости;
v_i	— мгновенные значения составляющих скорости;
x, y	— прямоугольные координаты;
x_i	— координатные направления;
∇^2	— оператор Лапласа;
D/Dt	— субстанциальная производная;
$\langle \rangle$	— среднее значение;
$(\bar{})$	— среднее по времени значение;
$\varepsilon_i, \beta_i, \gamma_i$	— параметры разложения;
$\delta(x)$	— дельта-функция;
λ	— величина, обратная числу Рейнольдса;
ρ	— плотность;
μ	— вязкость;
ψ	— функция тока;

ξ	— завихренность;
σ_{ij}	— тензор напряжений;
τ	— вспомогательная переменная для t ;
ξ_i	— вспомогательная переменная для x_i ;
Θ	— совокупность (ξ_i, τ) ;
ω_i	— мгновенные значения составляющих завихренности;
ω'_i	— пульсации составляющих завихренности;
Δ	— масштаб длины;
$\tau_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$	— ковариация;
Ω_i	— средняя завихренность;
τ_w	— напряжение трения на стенке;
u^*	— динамическая скорость.

ЛИТЕРАТУРА

- Jenkins G. M., Watts D. G., Spectral Analysis and Its Applications, Holden-Day, San Francisco, California, 1968.
- Gartshore I. S., An experimental examination of the large-eddy equilibrium hypotheses, *J. Fluid Mech.*, **24**, 89—98 (1966).
- Kline S. J., Reynolds W. C., Schraub F. A., Runstadler P. W., The structure of turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **30**, 741—773 (1967). [Имеется перевод: Клайн С., Рейнольдс У., Штрауб Ф. Ранстедлер П., Структура турбулентных пограничных слоев. — *Механика*, 1969, № 4, с. 41—78.]
- Kim H. T., Kline S. J., Reynolds W. C., The production of turbulence near a smooth wall in turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **50**, 133—160 (1971).
- Corino E. R., Brodkey R. S., A visual investigation of the wall region in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, **37**, 1—30 (1969). [Имеется перевод: Корино Е. Р., Бродки Р. С., Визуальное исследование пристеночной области в турбулентном течении. — *Механика*, 1971, № 1, с. 56—82.]
- Willmarth W. W., Lu S. S., Structure of the Reynolds stress near the wall, *J. Fluid Mech.*, **55**, 65—92 (1972).
- Gupta A. K., Laufer J., Kaplan R. E., Spatial structure in the viscous sublayer, *J. Fluid Mech.*, **50**, 493—512 (1971).
- Fernholz H., Three-dimensional disturbances in a two-dimensional incompressible turbulent boundary layer, Aeronautical Research Council, London, R and M № 3368, 1962.
- Coles D., The law of the wake in the turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **1**, 191—226 (1956).
- Fiedler H., Head M. R., Intermittency measurements in the turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **25**, 719—735 (1966).
- Kovaszny L. S. G., Kibens V., Blackwelder R. F., Large scale motion in the intermittent region of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **41**, 283—326 (1970).
- Antonia R. A., Conditionally sampled measurements near the outer edge of a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **56**, 1—18 (1972).
- Laufer J., New trends in experimental turbulence research в книге: Annual

- Review of Fluid Mechanics, Vol. 7 (M. Van Dyke, W. G. Vincenti, J. V. Wehausen, eds.), Annual Review, Inc., Palo Alto, California, 1975, p. 307—326.
14. Davies P. O. A. L., Yule A. J., Coherent structures in turbulence, *J. Fluid Mech.*, **69**, 513—537 (1975).
 15. Tennekes H., Lumley J. L., A First Course in Turbulence, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
 16. Shinbrot M., Lectures in Fluid Mechanics, Gordon and Breach, New York, 1973.
 17. Meyer R. E., Introduction to Mathematical Fluid Dynamics, Wiley-Interscience, New York, 1971.
 18. Ладыженская О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
 19. Ladyzhenskaya O. A., Mathematical analysis of Navier-Stokes equations for incompressible liquids в книге: Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 7 (M. Van Dyke, W. G. Vincenti, J. V. Wehausen, eds.), Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, 1975, p. 249—272.
 20. Седов Л. И., Механика сплошной среды, т. I—II; — М., Наука, 1973.
 21. Stewart R. W., Triple velocity correlations in isotropic turbulence, *Proc. Cambridge, Phil. Soc.*, **47**, 146—157 (1951).
 22. Laufer J., The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA report № TR 1174, 1954.
 23. Lilley G. M., Hodgson T. H., On surface pressure fluctuations in turbulent boundary layers, AGARD report № 276, North Atlantic Treaty Organization, Paris, 1960.
 24. Willmarth W. W., Wooldridge C. E., Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **14**, 187—210 (1962).
 25. Wills J. A. B., Measurement of the wave number/phase velocity spectrum of wall pressure beneath a turbulent boundary layer, *J. Fluid Mech.*, **45**, 65—90 (1971).
 26. Willmarth W. W., Pressure fluctuations beneath turbulent boundary layers в книге: Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 7 (M. Van Dyke, G. W. Vincenti, J. V. Wehausen eds.), Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, 1975, p. 13—38.
 27. Reynolds O., On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, *Phil. Trans. R. Soc.*, **186**, 123—164 (1883). [Имеется перевод: сб. «Проблемы турбулентности». — М.: ОНТИ 1936, с. 185—227.]
 28. Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика, часть I. — М.: Наука, 1965.
 29. Kaplan R. E., Laufer J., The intermittently turbulent region of the boundary layer в книге: Applied Mechanics (Proceedings of the 12th International Congress of Applied Mechanics) (M. Hetényi, W. G. Vincenti, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1969.
 30. Панчев С., Случайные функции и турбулентность (Исследование атмосферы). — Л.: Гидрометеиздат, 1967.
 31. Von Neumann J., Proof of the quasi-ergodic hypothesis, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **18**, 70—82 (1932).
 32. Birkhoff G. D., Proof of the ergodic theorem, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **17**, 656—660 (1931).
 33. Hinze J. O., Turbulence: An Introduction to its Mechanism and Theory,

- McGraw-Hill Book Co., New York (1959). [Имеется перевод: Хинце И. О., Турбулентность. — М.: ГИФМЛ, 1963.]
34. Launder B. E., Spalding D. B., Lectures in Mathematical Models of Turbulence, Academic Press, New York, 1972.
 35. Mellor G. L., Yamada T., A hierarchy of turbulent closure models for planetary boundary layers, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791—1806 (1974).
 36. Bradshaw P., The understanding and prediction of turbulent flow, *Aeronaut. J.*, **76**, 403—418 (1972).
 37. Mellor G. L., Herring H. J., A survey of the mean turbulent field closure models, *AIAA J.*, **11**, 590—599 (1973). [Имеется перевод: Меллор, Обзор моделей для замыкания уравнений осредненного турбулентного течения. Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 5, с. 17—29.]
 38. Emmons H. W., Critique of numerical modeling of fluid mechanics phenomena в книге: Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 2 (M. Van Dyke, W. G. Vincenti, J. V. Wehausen, eds.), Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, 1970, p. 15—36.
 39. Orszag S. A., Israeli M., Numerical simulation of viscous incompressible flows в книге: Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 6 (M. Van Dyke, W. G. Vincenti, J. V. Wehausen, eds.), Annual Reviews Inc., Palo Alto, California, 1974, p. 281—318.
 40. Nash J. F., Patel V. C., Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, SBC Technical Books, Atlanta, Georgia, 1972.
 41. Van Dyke M., Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, New York (1964). [Имеется перевод: Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.]
 42. Phillips O. M., The maintenance of Reynolds stress in turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, **27**, 131—144 (1967).
 43. Mellor G. L., The large Reynolds number asymptotic theory of turbulent boundary layers, *Int. J. Eng. Sci.*, **10**, 851—874 (1972).
 44. Laufer J., Aerodynamic noise in supersonic wind tunnels, *J. Aerosp. Sci.*, **28**, 685—692 (1961).
 45. Morse P. M., Ingard K. U., Theoretical Acoustics, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968.
 46. Yajnik K. S., Asymptotic theory of turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.*, **42**, 411—427 (1970).
 47. Deardorff J. W., The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence, *J. Fluids Eng.*, **95**, 429—438 (1973).

Статистические концепции теории турбулентности

У. ФРОСТ, Ю. БИТТЕ¹⁾

3.1. ИСХОДНАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

В статистических моделях, с помощью которых описывают физические процессы в развитом турбулентном движении, предполагается, что такое течение порождается беспорядочно изменяющейся совокупностью вихрей (т. е. возмущений, неоднородностей или, другими словами, вихревых элементов), размеры которых изменяются в широких пределах. По порядку величины размеры самых крупных вихрей равны размеру области, занятой турбулентным движением, а размеры наименьших вихрей — размеру области, поперек которой может эффективно осуществляться перенос импульса под действием молекулярной вязкости, приводящий к сглаживанию градиентов скорости.

Столь широкий диапазон изменения размеров вихрей обусловлен механизмом растяжения вихревых трубок, под действием которого вихри приблизительно одинаковых размеров последовательно преобразуются в вихри следующего порядка малости. Этот процесс имеет каскадный характер: размеры вихрей последовательно уменьшаются, а энергия основного потока переносится в движения меньших масштабов; минимальный масштаб достигается тогда, когда энергия вихрей рассеивается под непосредственным воздействием вязких напряжений. Обычно считается, что вихри существенно различных размеров не оказывают непосредственного влияния друг на друга и лишь сравнимые по размерам вихри могут обмениваться энергией. Установлено, что вязкость слабо влияет на движение и структуру основного турбулентного течения; однако ее влияние становится определяющим на конечной стадии диссипации энергии турбулентности, когда градиенты скорости в мелких вихрях исчезают под действием вязких напряжений.

¹⁾ Walter Frost, Jürgen Bitte, The University of Tennessee Space Institute, Tullahoma, Tennessee 37388.

3.1.1. Растяжение вихревых трубок

Механизм растяжения вихревых трубок иллюстрируется рис. 3.1. Жидкая частица при ее продольной деформации растяжения удлиняется в направлении деформации, а сечение частицы в плоскости, нормальной к направлению деформации, уменьшается (рис. 3.1, а). Применяя этот подход к вихревому элементу (рис. 3.1, б и в), можно видеть, что поперечное сечение вихря или вихревой трубки, ориентированной в направлении деформации, уменьшается, тогда как для вихря, ориентированного по нормали к скорости деформации, оно увеличивается. Теннекес и Ламли [1] показали, что в отсутствие вязкости скорость изменения во времени пульсаций завихренности ω_i может быть связана с пульсационным тензором скоростей деформаций s_{ij} уравнением

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \omega_j s_{ij}, \quad (3.1)$$

где

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.2)$$

Рассмотрим двумерное поле скоростей деформаций (рис. 3.1) и предположим в целях упрощения, что $s_{11} = -s_{22} = s$, где s —

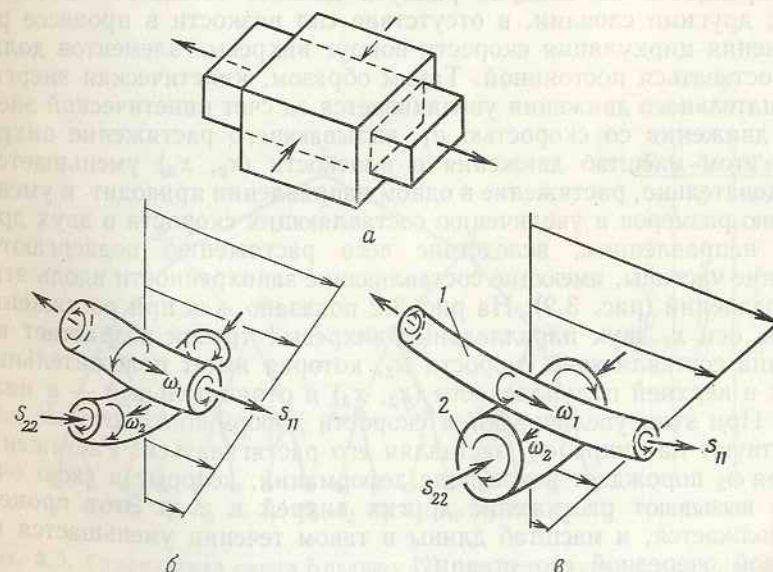


Рис. 3.1. Деформация вихревых трубок.
1 — растяжение; 2 — сжатие.

постоянная, не зависящая от времени, а $s_{12} = 0$. Тогда из уравнения (3.1) следует

$$\frac{d\omega_1}{dt} = s\omega_1, \quad \frac{d\omega_2}{dt} = -s\omega_2. \quad (3.3)$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\omega_1 = \omega_0 e^{st}, \quad \omega_2 = \omega_0 e^{-st} \quad (3.4)$$

и

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\omega_0^2 \operatorname{ch} 2st. \quad (3.5)$$

Таким образом, суммарная завихренность увеличивается при всех положительных значениях st . Составляющая завихренности в направлении растяжения ω_1 быстро увеличивается, а составляющая завихренности в направлении сжатия ω_2 медленно уменьшается с ростом st . Эти простые расчеты показывают, что вихревые трубки растягиваются (с уменьшением диаметра) очень быстро, тогда как увеличение размеров вихрей характеризуется существенно меньшей скоростью. Кроме того, процесс растяжения сопровождается вторичными эффектами, которые противодействуют медленному нарастанию ω_2 , как описывается ниже.

По-прежнему пренебрегая вязкостью, из закона сохранения момента количества движения можно получить, что произведение завихренности на квадрат радиуса должно оставаться постоянным; другими словами, в отсутствие сил вязкости в процессе растяжения циркуляция скорости вокруг вихревых элементов должна оставаться постоянной. Таким образом, кинетическая энергия вращательного движения увеличивается за счет кинетической энергии движения со скоростью u_1 , вызывающего растяжение вихря. При этом масштаб движения в плоскости (x_2, x_3) уменьшается. Следовательно, растяжение в одном направлении приводит к уменьшению размеров и увеличению составляющих скорости в двух других направлениях, вследствие чего растяжению подвергаются жидкие частицы, имеющие составляющие завихренности вдоль этих направлений (рис. 3.2). На рис. 3.2 показано, как при растяжении вдоль оси x_1 двух параллельных вихревых трубок возрастает величина составляющей скорости u_2 , которая имеет положительный знак в верхней полуплоскости (x_2, x_3) и отрицательный — в нижней. При этом увеличиваются скорости деформаций, которые воздействуют на вихрь ω_2 , заставляя его растягиваться. Растяжение вихря ω_2 порождает новое поле деформаций, которые в свою очередь вызывают растяжение других вихрей и т. д. Этот процесс продолжается, и масштаб длины в таком течении уменьшается на каждой очередной его стадии.

Брэдшоу [2] предложил графическую схему (рис. 3.3), которая показывает, как растяжение вдоль оси x_1 приводит к интенсификации

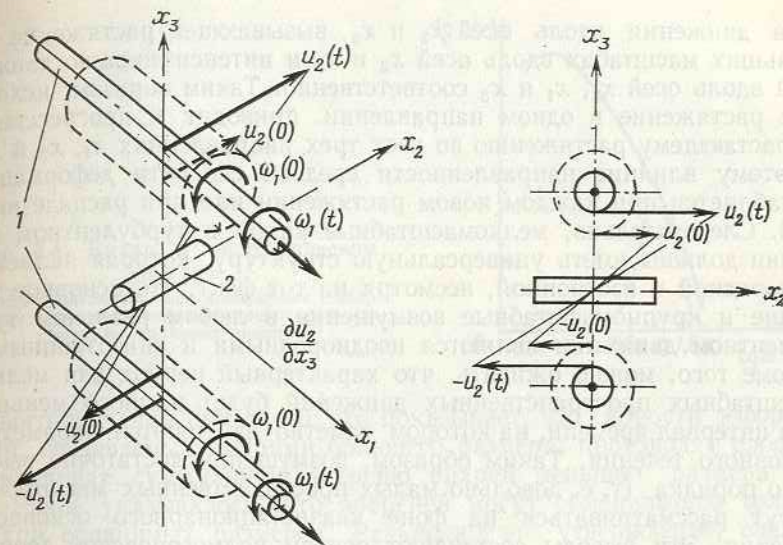


Рис. 3.2. Увеличение скорости деформации du_2/dx_3 при растяжении вихревых трубок вдоль оси x_1 .

1 — вихревые трубки, подвергнутые растяжению в момент времени t ; 2 — скорость деформации du_2/dx_3 , действующая на вихрь ω_2 , увеличивается.

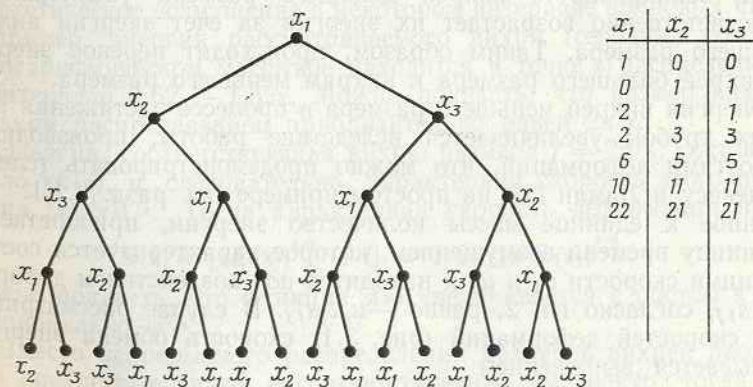


Рис. 3.3. Графическая схема Брэдшоу [2], иллюстрирующая, как при растяжении вихревых трубок происходит дробление масштабов.

Растяжение вдоль оси x_1 приводит к интенсификации движений вдоль осей x_2 и x_3 , порождению меньших масштабов и т. д.

ции движения вдоль осей x_2 и x_3 , вызывающей растяжение на меньших масштабах вдоль осей x_2 и x_3 и интенсификацию движений вдоль осей x_2 , x_1 и x_3 соответственно. Таким образом, исходное растяжение в одном направлении приводит к прогрессивно нарастающему растяжению во всех трех направлениях x_1 , x_2 и x_3 . Поэтому влияние направленности средней скорости деформации ослабляется при каждом новом растяжении или при распаде вихрей. Следовательно, мелкомасштабные вихри в турбулентном течении должны иметь универсальную структуру, которая является однородной и изотропной, несмотря на тот факт, что основное течение и крупномасштабные возмущения в любом реальном турбулентном движении являются неоднородными и анизотропными. Кроме того, можно ожидать, что характерный период для мелкомасштабных пространственных движений будет намного меньше, чем интервал времени, на котором заметно изменяются параметры основного течения. Таким образом, возмущения достаточно высокого порядка (т. е. довольно малых пространственных масштабов) могут рассматриваться на фоне квазистационарного основного течения. Эти выводы составляют основу колмогоровской теории режима универсального равновесия для локально-изотропной и статистически стационарной турбулентности.

3.1.2. Каскадный процесс переноса энергии

Когда вихри меньшего размера подвергаются воздействию скоростей деформаций, создаваемых вихрями большего размера, возникает перенос энергии между вихрями. В процессе деформирования завихренность вихрей меньшего размера увеличивается и соответственно возрастает их энергия за счет энергии вихрей большего размера. Таким образом, происходит перенос энергии от вихрей большего размера к вихрям меньшего размера.

Энергия вихрей меньшего размера в процессе растяжения вихревых трубок увеличивается вследствие работы, производимой скоростями деформаций, что можно продемонстрировать (следуя Теннекесу и Ламли [1]) на простом примере из разд. 3.1.1. Отнесенное к единице массы количество энергии, приобретаемой в единицу времени возмущением, которое характеризуется составляющими скорости u_1 и u_2 и находится под воздействием деформации s_{ij} , согласно гл. 2, равно $-u_i u_j s_{ij}$. В случае рассматриваемых скоростей деформаций (рис. 3.1) скорость обмена энергией описывается выражением

$$T = s(u_2^2 - u_1^2). \quad (3.6)$$

Как отмечалось выше, с течением времени при увеличении ω_1 скорости u_2 и u_3 возрастают, а при уменьшении ω_2 скорости u_3 и u_1 уменьшаются. Следовательно, параметр T увеличивается от ну-

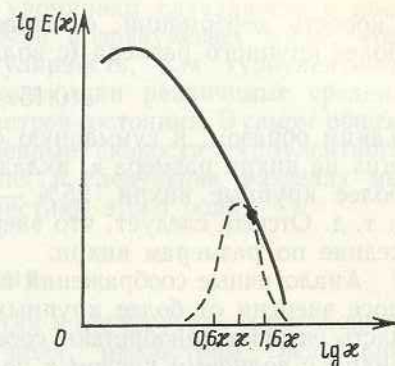


Рис. 3.4. Вихрь в энергетическом спектре.

Вихрь проявляется как возмущение с энергиями, распределенными в некотором интервале волновых чисел k .

левого значения при $t = 0$; это показывает, что скорости деформаций, создаваемых вихрями большего размера, производят работу, увеличивая суммарную энергию вихрей меньшего размера.

Ранее указывалось, что энергией могут обмениваться только вихри сравнимых размеров. Разъясним это утверждение, следуя работе Теннекеса и Ламли [1]. Рассмотрим энергетический спектр и вихрь на его фоне (рис. 3.4). Позднее энергетические спектры будут исследоваться более подробно; теперь же достаточно сказать, что размеру вихря l соответствует величина, обратная волновому числу k (т. е. малому волновому числу соответствует большой размер вихря, а большому волновому числу — малый размер вихря). Энергетический спектр характеризует количество энергии, содержащейся в интервале волновых чисел от k до $k + dk$.

В энергетическом спектре отдельный вихрь проявляется как энергетическое возмущение в некотором интервале волновых чисел. Например, энергия рассматриваемого вихря (середины которого в логарифмическом масштабе находится в точке k) распределяется в интервале $0,62 \div 1,62k$. Можно показать, что размер вихря l с таким распределением приблизительно равен $2\pi/k$.

Энергия, соответствующая вихрю размера $l = 2\pi/k$, составляет около $kE(k)$, и, следовательно, характерная скорость этого вихря равна $[kE(k)]^{1/2}$. Тогда характерная скорость деформации вихря

$$s(k) = [kE(k)]^{1/2} (1/l) = (1/2\pi) [k^3 E(k)]^{1/2}. \quad (3.7)$$

Можно показать, что функция $s(k)$ увеличивается с ростом k пропорционально $k^{2/3}$.

Вместо непрерывного распределения размеров вихрей рассмотрим дискретные вихри и соответствующий им спектр; тогда скорость деформаций, создаваемых вихрями с волновым числом $0,38k$ и воздействующих на вихри меньшего размера (с волновым числом k), равна

$$s(0,38k)/s(k) \sim [(0,38k)/k]^{2/3} \approx 0,5. \quad (3.8)$$

Скорость деформаций, создаваемых вихрями второго по порядку более крупного размера (с волновым числом $0,15\kappa$), равна

$$s(0,15\kappa)/s(\kappa) \approx 0,25. \quad (3.9)$$

Таким образом, в суммарную скорость деформаций, действующих на вихри размера κ , вклад 50% дают ближайшие по порядку более крупные вихри, 25% — следующие более крупные вихри и т. д. Отсюда следует, что энергией обмениваются в основном соседние по размерам вихри.

Аналогичные соображения позволяют заключить, что при переносе энергии от более крупных вихрей к более мелким большую часть энергии приобретают соседние по размеру вихри (например, вихри с волновым числом κ получают около $2/3$ суммарной энергии от вихрей большего размера, тогда как вихри следующего в порядке убывания размера получают лишь $1/6$ часть суммарной энергии и т. д.).

Таким образом, имеет место каскадный процесс переноса энергии турбулентного движения между соседними по размерам вихрями, причем энергия передается к вихрям все меньшего размера (в которых увеличиваются градиенты скорости) до тех пор, пока она не рассеется окончательно под действием сил вязкости в вихрях наименьшего размера. Однако в самих процессах растяжения вязкость не играет существенной роли.

В соответствии с предыдущим анализом можно предложить следующую физическую модель турбулентности: имеется беспрядочное множество вихревых трубок, которые растягиваются как в определенном направлении под действием деформаций, создаваемых основным течением, так и в случайных направлениях при своем взаимодействии. Следовательно, несмотря на наличие предпочтительного направления, т. е. направления основного течения, турбулентность является существенно трехмерным процессом. Вследствие растяжения вихрей во всех направлениях кинетическая энергия основного движения переносится к вихрям все меньшего размера и в конечном счете преобразуется во внутреннюю энергию теплового движения в результате действия сил вязкости на вихри наименьшего размера.

Хаотическое поле скоростей, создаваемых элементарными вихревыми трубками, в рамках каскадного процесса переноса энергии от вихрей одного размера к вихрям другого размера не может описываться явными математическими соотношениями, так как при каждом наблюдении этого явления будет воспроизводиться один из множества возможных результатов. Следовательно, к анализу турбулентности необходимо привлечь статистическое описание, которое не позволяет предсказать результат единственным образом, но зачастую дает возможность определить вероятность появления этого результата. В самом деле, в качестве характерной

особенности турбулентности часто упоминают случайность в пространстве и во времени. Этот термин подразумевает также, что, несмотря на существенную нерегулярность, для турбулентного движения можно определить статистически различные средние значения гидродинамических параметров состояния. В самом общем случае можно сказать, что мгновенные скорости турбулентного движения образуют случайное поле; в следующих разделах мы будем вводить и изучать характеристики этого поля.

3.2. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Чтобы ввести необходимые понятия и определения и разъяснить свойства случайного векторного поля, рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Сопло для истечения газа из камеры (рис. 3.5) оборудовано M датчиками, измеряющими три взаимно ортогональные составляющие скорости U_1 , U_2 и U_3 . В начале эксперимента открывается клапан и газ вытекает из камеры через сопло. Датчики, расположенные в различных точках поля течения, непрерывно регистрируют флуктуирующие скорости в этих точках. Запись показаний каждого датчика будем называть частной записью, или реализацией. После того как истечение газа через сопло прекращается, во всей системе восстанавливаются в точности те же условия, что и до эксперимента. Затем производится повторный запуск установки; при этом регистрируются новые реализации. При сравнении частных записей скорости в двух

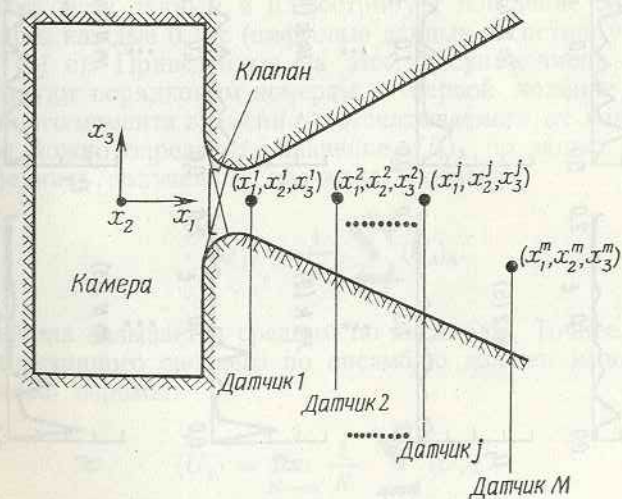


Рис. 3.5. Истечение газа из сопла.

Условия в окружающей среде воспроизводятся идеально.

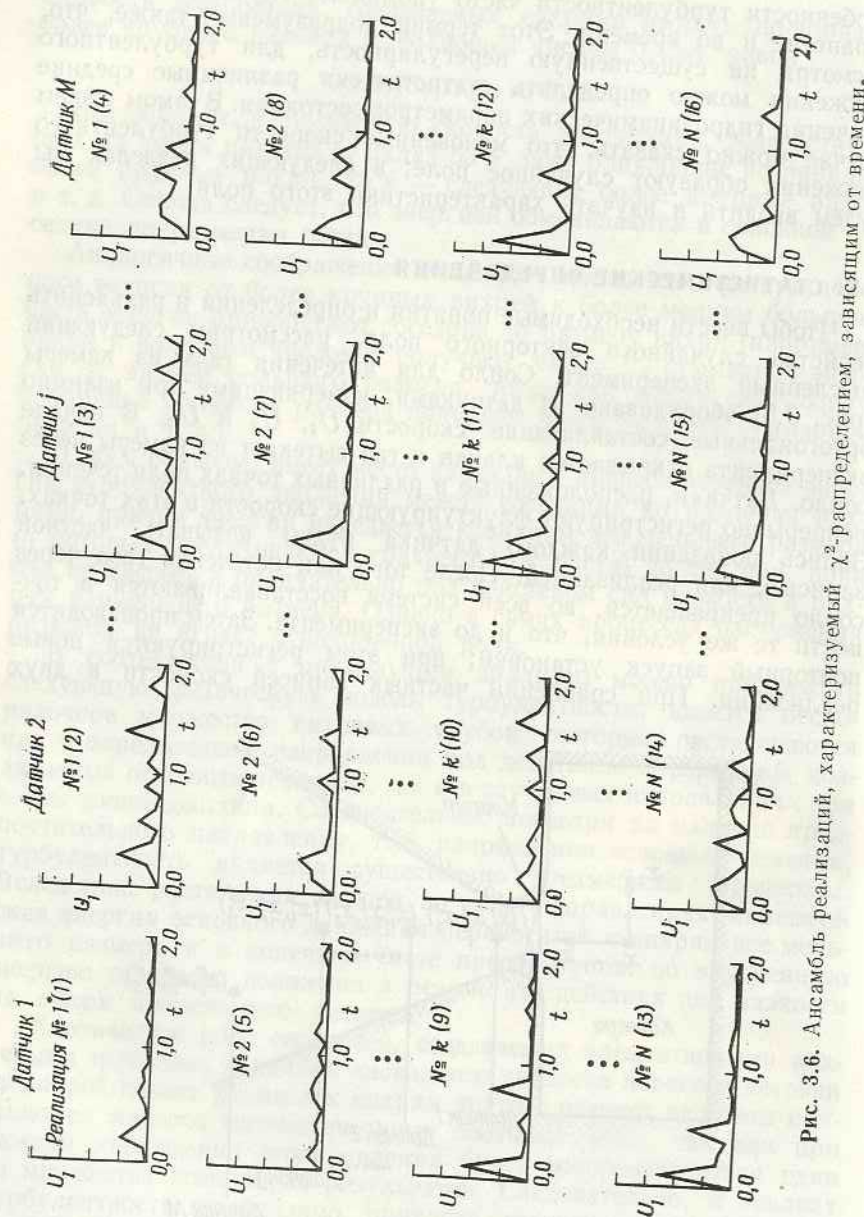


Рис. 3.6. Ансамбль реализаций, характеризующий χ^2 -распределением, зависящим от времени.

запусках, регистрируемых одним датчиком, обнаружится, что некоторые их характеристики будут совпадать, однако детальная структура записей, вообще говоря, окажется различной. Повторяя этот процесс много раз, мы будем иметь для каждого датчика некоторую совокупность частных записей; такие записи приведены на рис. 3.6. Рассматриваемая совокупность называется ансамблем реализаций. В общем случае, как показывает рисунок, экспериментальные данные представляются цифровыми величинами, которые формируются на выходе аналогового устройства, подсоединенного к датчику.

Теперь предположим, что мы имеем очень большое число N реализаций для каждого из M датчиков и что эти реализации были получены в N экспериментах при тождественных условиях. В идеальном случае требуется, чтобы число N было бесконечным, однако очевидно, что практически такое число испытаний осуществить невозможно, так же как, по-видимому, невозможно повторить эксперимент при одних и тех же условиях; однако сейчас мы не будем затрагивать эти вопросы.

Из ансамбля реализаций отберем для первоначального исследования запись скорости U_1 , регистрируемой датчиком 1, расположенным в точке (x_1^1, x_2^1, x_3^1) . Случайный выходной сигнал представлен в наглядной форме в табл. 3.1, где с шагом 0,1 с затабулированы случайные числа, имеющие χ^2 -распределение, зависящее от времени. Несмотря на то что эта совокупность данных построена искусственно, она обладает характеристиками, присущими нашему эксперименту, и используется в дальнейшем изложении. Рис. 3.6 получен по этим данным и иллюстрирует поведение средних значений через каждые 0,1 с (цифровые данные регистрируются через каждые 0,1 с). Приведенные на этом рисунке числа в скобках соответствуют порядковым номерам в первой колонке табл. 3.1. Для данного момента времени t_1 (отсчитываемого от начала эксперимента) можно определить значение $(U_1)_k$ по записи с номером k и осреднить полученные значения, полагая

$$\langle U_1 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (U_1)_k. \quad (3.10)$$

Эта величина называется средним по ансамблю. Точнее, при определении истинного среднего по ансамблю должен использоваться предельный переход:

$$\langle U_1 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (U_1)_k. \quad (3.11)$$

Отметим, что в общем случае средние $\langle U_1 \rangle$, полученные при осред-

нении значений, регистрируемых различными датчиками, или значений, регистрируемых в различные моменты времени t , будут отличаться одно от другого. Следовательно, среднее $\langle U_1 \rangle$ является функцией точки поля течения и времени, и для него можно использовать обозначение $\langle U_1(\mathbf{r}, t) \rangle$. Символом $\mathbf{r}$ обозначен радиус-вектор рассматриваемой точки.

Кроме того, N реализаций позволяют построить для данного момента времени и данной точки пространства статистическое распределение переменной $U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$, если отложить по оси ординат, как показано на рис. 3.7, относительное число (в процентах) тех из N реализаций, в которых величина U_1 , измеренная датчиком в точке $\mathbf{r}^1$ в момент времени t_1 , находится в интервале от $U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$ до $U_1(\mathbf{r}^1, t_1) + \Delta U_1$. Мы рассматриваем фиксированную точку и фиксированный момент времени; поэтому записанные в различных экспериментах значения $U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$ изменяются случайно и соответствуют значениям случайной переменной, рассматриваемой в классической статистике. Следовательно, $U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$ является случайной переменной, и кривая, изображенная на рис. 3.7, в пределе $\Delta U_1 \rightarrow 0$ перейдет в непрерывную функцию плотности распределения вероятности (или просто плотность вероятности), которая обозначается через $f[U_1(\mathbf{r}^1, t)]$. Эта функция позволяет вычислить вероятность того, что в точке $\mathbf{r}^1$ в момент времени t_1 скорость

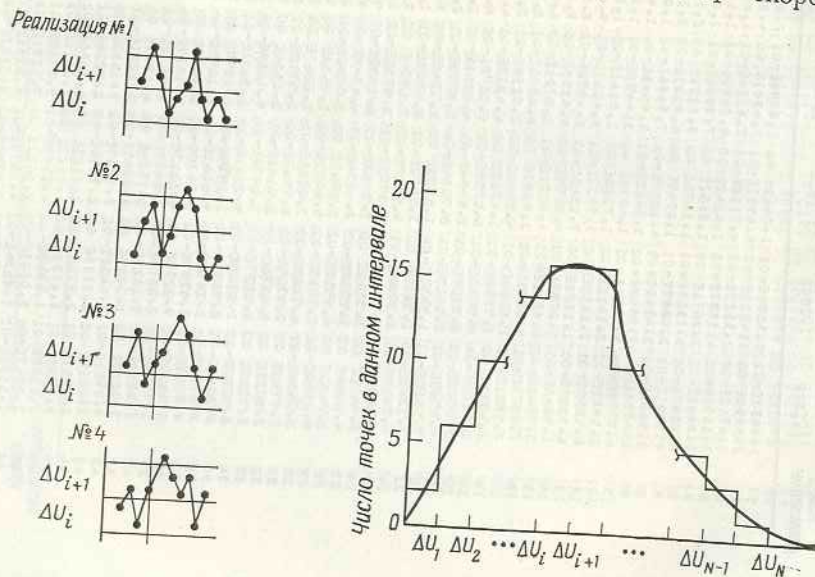


Рис. 3.7. Плотность вероятности.
● точки, по которым определяется плотность вероятности. В реализациях № 1 и № 2 есть точка в интервале ΔU_i при $t=t_1$; в реализациях № 3 и № 4 нет точки в интервале ΔU_i при $t=t_1$.

$U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$ принимает значение в интервале от $U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$ до $U_1(\mathbf{r}^1, t_1) + dU_1$.

Эта вероятность дается выражением

$$P[U_1(\mathbf{r}^1, t_1) \leq U_1(\mathbf{r}^1, t_1)_p < U_1(\mathbf{r}^1, t_1) + dU_1] = f[U_1(\mathbf{r}^1, t_1)] dU_1(\mathbf{r}^1, t_1). \quad (3.12)$$

В расчетах это выражение обычно используется в виде

$$P[U_1(\mathbf{r}^1, t_1) \leq U_1(\mathbf{r}^1, t_1)_p < U_1(\mathbf{r}^1, t_1) + \Delta U_1] = f[U_1(\mathbf{r}^1, t_1)] \Delta U_1(\mathbf{r}^1, t_1). \quad (3.13)$$

Пример 1. Предположим, что плотность вероятности для скорости $U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$ описывается нормальным законом:

$$f[U_1(\mathbf{r}^1, t_1)] = (\sigma \sqrt{2\pi})^{-1} e^{-[U_1(\mathbf{r}^1, t_1) - \langle U_1(\mathbf{r}^1, t_1) \rangle]^2 / 2\sigma^2}, \quad (3.14)$$

где стандартное (среднеквадратическое) отклонение σ равно 4 м/с и средняя по ансамблю скорость $\langle U_1(\mathbf{r}^1, t_1) \rangle$ составляет 10 м/с. Определим вероятность того, что в одном из наших экспериментов датчик зарегистрирует в точке $\mathbf{r}^1$ в момент времени t_1 от начала эксперимента скорость в интервале от $U_1(\mathbf{r}^1, t_1) = 5$ м/с до $U_1(\mathbf{r}^1, t_1) = 5,5$ м/с. Эта вероятность равна

$$P[5 \text{ м/с} \leq U_1(\mathbf{r}^1, t_1)_p < 5,5 \text{ м/с}] \approx (32\pi)^{-1/2} e^{-[(5,25-10)/4]^2/2} \times (0,5) = 0,0246. \quad (3.15)$$

Таким образом, вероятность того, что $5 \text{ м/с} \leq U_1(\mathbf{r}^1, t_1) < 5,5 \text{ м/с}$, составляет 2,5% (или, другими словами, в 2,5 из 100 частных записей показаний датчика в точке $\mathbf{r}^1$ в момент времени t_1 будет зарегистрирована скорость из интервала $5 \text{ м/с} \leq U_1(\mathbf{r}^1, t_1) < 5,5 \text{ м/с}$). Строго говоря, этот результат должен получаться посредством интегрирования:

$$P[5 \text{ м/с} \leq U_1(\mathbf{r}^1, t_1) < 5,5 \text{ м/с}] = (32\pi)^{-1/2} \int_{5 \text{ м/с}}^{5,5 \text{ м/с}} e^{-[(U_1-10)/4]^2/2} dU_1. \quad (3.16)$$

Таблицы значений этого интеграла приводятся в стандартных справочниках [3]. Точное значение искомой величины равно 0,0247, и, следовательно, наша аппроксимация является достаточно хорошей.

Как известно, функция распределения непрерывной случайной переменной задается интегралом

$$F[U_1(\mathbf{r}^1, t_1)] = \int_{-\infty}^{U_1(\mathbf{r}^1, t_1)} f(U_1) dU_1, \quad (3.17)$$

а вероятность того, что скорость меньше чем $U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$, равна

$$P[U_1(\mathbf{r}^1, t_1)_p < U_1(\mathbf{r}^1, t_1)] = F[U_1(\mathbf{r}^1, t_1)]. \quad (3.18)$$

При интегрировании этой функции в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ должна получаться единица:

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(U_1) dU_1 = 1. \quad (3.19)$$

Подытоживая результаты, можно сказать, что скорость, измеренная в данной точке турбулентного течения в фиксированный момент времени в повторяющихся экспериментах при тождественных условиях, является случайной переменной и должна описываться статистически.

3.2.1. Случайный процесс

До сих пор мы рассматривали только один датчик и исследовали частные сигналы, зарегистрированные этим датчиком в некоторый момент времени t_1 . Очевидно, что значительно большее количество информации содержится в ансамбле частных записей. Тем не менее будем по-прежнему рассматривать один датчик в точке $\mathbf{r}^1$, т. е. в данной точке турбулентного течения, однако теперь будем вычислять средние величины по ансамблю записей в различные моменты времени, начиная с $t = 0$ и продвигаясь по времени с шагом Δt . На рис. 3.8 показано, как изменяются со временем вычисленные значения $\bar{U}_1(\mathbf{r}^1, t)$. В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ рассматриваемое среднее по ансамблю становится непрерывной функцией времени. Теперь скорость $U_1(\mathbf{r}^1, t)$ изменяется случайно относительно своего среднего значения в любой момент времени и не обязана подчиняться одной и той же функции распределения. Это означает, что плотность вероятности зависит не только от $U_1(\mathbf{r}^1, t_1)$, как прежде, но также и от времени. Если бы такая плотность вероятности была известна, то можно было бы ответить на вопрос: какова вероятность того, что скорость, регистрируемая датчиком в точке $\mathbf{r}^1$ в некоторый момент времени t , заключена в интервале $U_1(\mathbf{r}^1, t) \leq U_1(\mathbf{r}^1, t)_p < U_1(\mathbf{r}^1, t) + \Delta U_1$? Эта вероятность описывается выражением

$$P[U_1(\mathbf{r}^1, t) \leq U_1(\mathbf{r}^1, t)_p \leq U_1(\mathbf{r}^1, t) + \Delta U_1; t] = f[U_1(\mathbf{r}^1, t), t] \Delta U_1. \quad (3.20)$$

В пределе ΔU_1 заменяется на dU_1 .

Пример 2. Предположим, что плотность вероятности для скорости турбулентного течения имеет вид

$$f[U_1(\mathbf{r}^1, t), t] = [2^{1/2t} \Gamma(1/2t)]^{-1} U_1^{(1/2t-1)} e^{-U_1/2}. \quad (3.21)$$

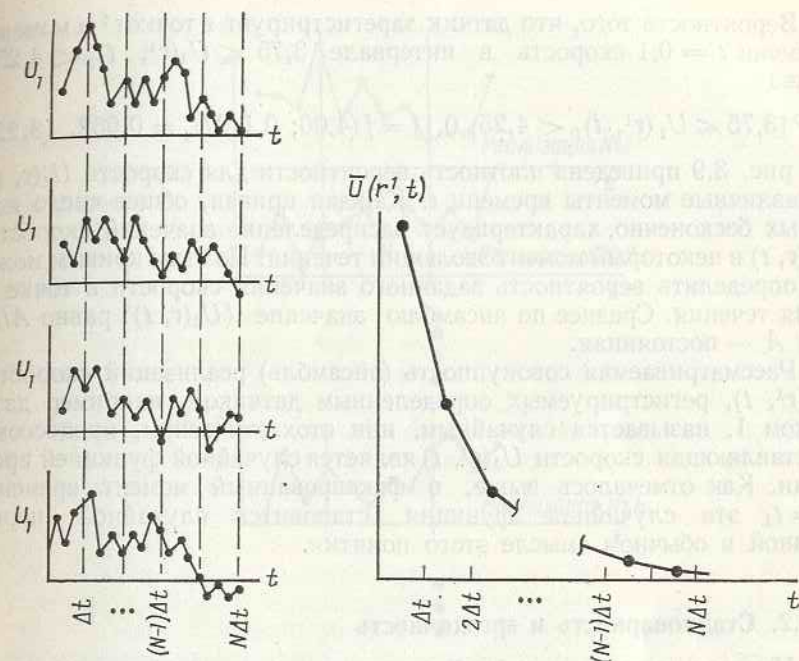


Рис. 3.8. Среднее по ансамблю как функция времени. Кривая становится гладкой при $\Delta t \rightarrow 0$; $\bullet$ средние по ансамблю вдоль линий $t = \text{const}$.

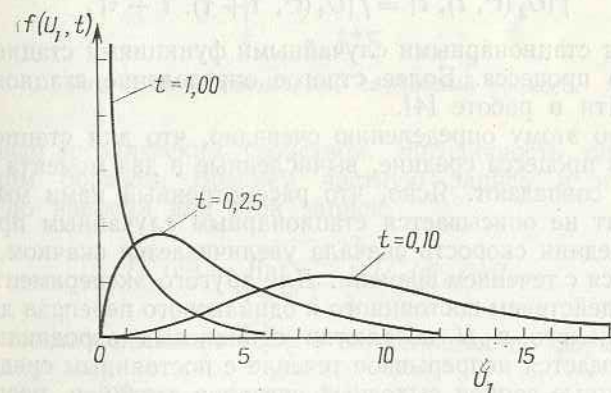


Рис. 3.9. Плотность вероятности для скорости $U_1(\mathbf{r}, t)$ в различные моменты времени.

Вероятность того, что датчик зарегистрирует в точке r^1 в момент времени $t = 0,1$ скорость в интервале $3,75 \leq U_1(r^1, t)_p < 4,25$, равна

$$P[3,75 \leq U_1(r^1, t)_p < 4,25; 0,1] = f(4,00; 0,1) \Delta U_1 = 0,052. \quad (3.22)$$

На рис. 3.9 приведена плотность вероятности для скорости $U_1(r, t)$ в различные моменты времени t . Каждая кривая, общее число которых бесконечно, характеризует распределение значений скорости $U_1(r, t)$ в некоторый момент эволюции течения. По этим кривым можно определить вероятность заданного значения скорости в точке r поля течения. Среднее по ансамблю значения скорости в точке r где A — постоянная.

Рассматриваемая совокупность (ансамбль) реализаций скорости $U_1(r^1, t)$, регистрируемых определенным датчиком, например датчиком 1, называется случайным, или стохастическим, процессом. Составляющая скорости $U_1(r^1, t)$ является случайной функцией времени. Как отмечалось выше, в фиксированный момент времени $t = t_1$ эта случайная функция становится случайной переменной в обычном смысле этого понятия.

3.2.2. Стационарность и эргодичность

Имеется один класс случайных процессов, который для нас имеет важное значение, а именно класс стационарных и эргодических случайных функций. Случайные функции, плотности вероятности которых инвариантны относительно сдвига вдоль оси времени, т. е.

$$f[U_1(r^1, t), t] = f[U_1(r^1, t + \tau), t + \tau], \quad (3.23)$$

называются стационарными случайными функциями стационарного случайного процесса. Более строгое определение стационарности можно найти в работе [4].

Согласно этому определению очевидно, что для стационарного случайного процесса средние, вычисленные в два момента времени t и $t + \tau$, совпадают. Ясно, что рассмотренный нами мысленный эксперимент не описывается стационарным случайным процессом, так как средняя скорость сначала увеличивается скачком, а затем уменьшается с течением времени. Для другого эксперимента, в котором под действием постоянного и одинакового перепада давления, поддерживаемого в N абсолютно одинаковых аэродинамических трубах, создается непрерывное течение с постоянным средним расходом, частные записи выходных сигналов датчиков, расположенных в тождественных точках этих аэродинамических труб, имеют вид кривых рис. 3.10. Ансамбль записей, регистрируемых каждым датчиком, образует стационарный случайный процесс. Большинство стационарных случайных процессов характеризуется так

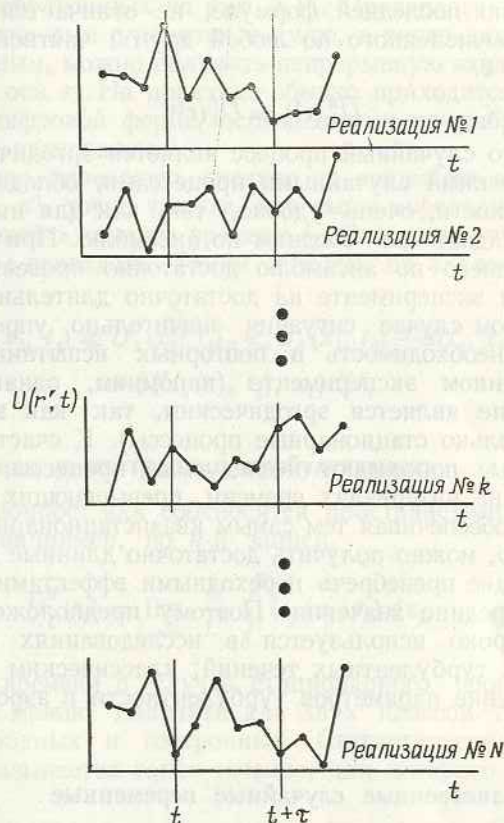


Рис. 3.10. Стационарный случайный процесс.

называемым эргодическим свойством. Эргодичность определяется следующим образом. Возьмем частную запись k и вычислим среднее по времени для этой записи:

$$\bar{U}_1^k(r^1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T U_1^k(r^1, t) dt. \quad (3.24)$$

В практических расчетах $\bar{U}_1^k(r^1)$ вычисляется по формуле

$$\bar{U}_1^k(r^1) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_1^k[r^1, (2i-1)\Delta t/2], \quad (3.25)$$

в которой используются одинаковые интервалы времени Δt . Если случайный процесс является стационарным и величина $\bar{U}_1^k(r^1)$,

вычисленная по последней формуле, не отличается от среднего по времени, вычисленного по любой другой частной записи (например, j), т. е.

$$\bar{U}_1^k(\mathbf{r}^1) = \bar{U}_1^j(\mathbf{r}^1), \quad (3.26)$$

то говорят, что случайный процесс является эргодическим. Иметь дело с физическими случайными процессами, обладающими свойством эргодичности, очень удобно, так как для них среднее по времени совпадает со средним по ансамблю. При этом для вычисления среднего по ансамблю достаточно провести измерения лишь в одном эксперименте на достаточно длительном интервале времени. В этом случае ситуация значительно упрощается, так как отпадает необходимость в повторных испытаниях, как в нашем мысленном эксперименте (напомним, однако, что наш эксперимент не является эргодическим, так как эргодическими могут быть только стационарные процессы). К счастью, часто условия, которые порождают исследуемые процессы, сохраняются постоянными на интервалах времени, превышающих длительность наблюдения, обеспечивая тем самым квазистационарность течения. Следовательно, можно получить достаточно длинные частные записи, позволяющие пренебречь переходными эффектами и вычислить адекватные средние значения. Поэтому предположение об эргодичности широко используется в исследованиях статистически стационарных турбулентных течений; классическим примером является измерение параметров турбулентности в аэродинамических трубах.

3.2.3. Пространственные случайные переменные

Выше было установлено, что параметры турбулентного течения, измеряемые в фиксированной точке в некоторый момент времени, являются случайными переменными. Если зафиксировать только точку пространства и рассматривать случайное изменение во времени, то получается случайная функция времени, и совокупность частных записей выходного сигнала конкретного датчика в тождественных экспериментах определяет случайный процесс. Тем не менее в ансамбле частных записей выходного сигнала в нашем мысленном эксперименте содержится большое количество информации, и последующее исследование этих функций приведет нас к концепции случайного поля.

Обращаясь снова к рис. 3.6, выберем значения $U_1(\mathbf{r}, t)$ из k -х записей каждого из датчиков, установленных вдоль оси x_1 (т. е. датчиков 1, 2, ..., j , изображенных на рис. 3.5), в фиксированный момент времени t_1 . Если отложить на графике соответствующие каждой такой записи значения $U_1(\mathbf{r}, t_1)$ в зависимости от x_1 и проделать эту процедуру со всеми N записями, то получается ансамбль

реализаций, изображенных на рис. 3.11. Предполагая, что расстояние между датчиками стремится к нулю, а число датчиков становится бесконечным, можно получить непрерывную запись величины $U_1(\mathbf{r}, t_1)$ вдоль оси x_1 . На практике обычно приходится иметь дело с данными в цифровой форме, осредненными по выбранным пространственным интервалам.

Теперь можно определить среднее по ансамблю для фиксированной точки x_1^1 точно так же, как выше определялось среднее для фиксированного момента времени t_1 . Очевидно, что эти две величины должны совпадать. Таким образом, по аналогии с предыдущим имеем

$$P[U_1(x_1, t_1) \leq U_1(x_1, t_1)_p < U_1(x_1, t_1) + dU_1, x_1] = \\ = f[U_1(x_1, t_1), x_1] dU_1. \quad (3.27)$$

3.2.4. Однородная и изотропная турбулентность

Возникает вопрос: как соотносятся пространственные средние, вычисленные, например, по k -й записи,

$$\bar{U}_1^k(t_1) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L U_1(x_1, t_1) dx_1, \quad (3.28)$$

со средним по времени в случае стационарного процесса? Ответ на этот вопрос можно получить для двух классов турбулентных течений: однородных и изотропных. Статистически однородным вдоль оси x_1 называется такое течение, для которого выполняется условие

$$f(x_1, t) = f(x_1 + l, t), \quad (3.29)$$

где l — сдвиг вдоль оси x_1 . Более строгое определение свойства статистической однородности дается в работе [4]. Очевидно, что понятие случайной функции, однородной вдоль прямой линии, аналогично понятию стационарного случайного процесса.

Случайная функция местоположения называется статистически однородной и изотропной, если она не изменяет своего вида при поворотах координатной оси x_1 в поле течения. Изотропное течение обязательно должно быть однородным, однако обратное утверждение в общем случае не выполняется: течение может быть однородным, но не изотропным. Понятие изотропии приложимо лишь к случайным полям и не имеет аналога в теории случайных процессов.

Для однородного течения применимо свойство эргодичности; в этом случае пространственное среднее, вычисленное по той или иной частной записи, совпадает со средним по ансамблю. Следовательно,

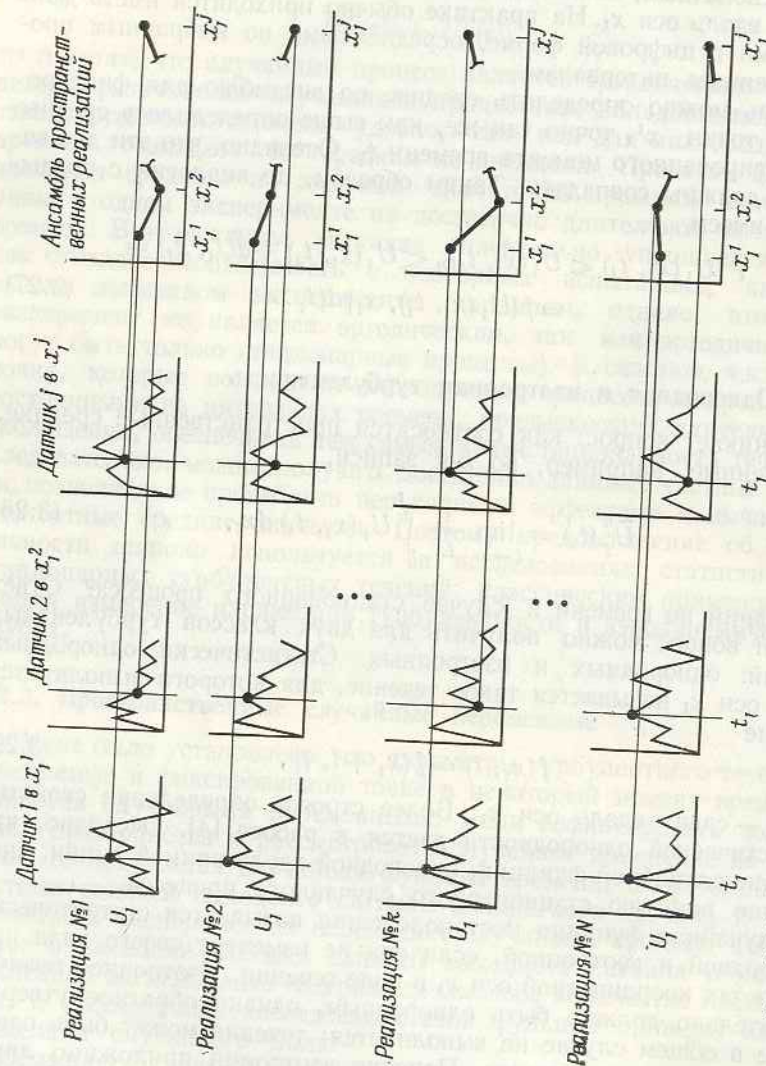


Рис. 3.11. Определение пространственной случайной переменной по N реализациям.

среднее по ансамблю получается при измерениях турбулентности с помощью ряда стационарных датчиков скорости, установленных вдоль заданной траектории в однородной турбулентной среде, или с помощью движущихся датчиков (например, установленных на самолете, пролетающем с большой скоростью через однородное турбулентное поле).

3.2.5. Гипотеза Тейлора

В связи с предыдущим обсуждением встает вопрос: имеются ли определенные классы турбулентных течений, у которых временные и пространственные флуктуации скорости взаимосвязаны? Согласно гипотезе Тейлора, при $\bar{U}_1 \gg u_1$ флуктуации скорости в фиксированной точке однородного турбулентного течения с постоянной средней скоростью $\bar{U}_1$ вдоль оси x_1 будут такими же, как в случае, когда все турбулентное поле течения перемещается через эту точку с постоянной скоростью $\bar{U}_1$. Тогда осциллограмма флуктуаций скорости в данной точке будет почти тождественна мгновенному распределению скорости вдоль линии, параллельной оси x_1 и проходящей через эту точку (для более наглядного представления этого определения используется термин «замороженная турбулентность»). Гипотеза Тейлора справедлива, когда выполняется условие

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\bar{U}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (3.30)$$

которое следует из уравнения движения при $u_1/\bar{U}_1 \ll 1$. В этом случае производная флуктуации скорости u_1 по времени линейно связана с производной по координате и флуктуации скорости u_1 значительно меньше средней скорости движения $\bar{U}_1$; следовательно, турбулентность переносится через рассматриваемую точку быстрее, чем происходит заметное изменение поля флуктуаций.

Несмотря на ограниченную область применимости, гипотеза Тейлора часто используется при анализе турбулентных течений, так как значительно проще измерить изменение скорости во времени с помощью одного датчика, чем изменение скорости в пространстве с помощью нескольких датчиков. Тем не менее очевидно, что измеренное пространственное распределение в меньшей степени подвержено влиянию скорости переноса в осредненном течении и более непосредственно связано с характеристиками турбулентности. Дополнительный критерий применимости гипотезы Тейлора был указан Линем [5]. Согласно этому критерию, гипотеза Тейлора должна выполняться, когда в сдвиговых течениях вихри столь малы, что перепадами скорости поперек этих вихрей можно пренебречь по сравнению со скоростью переноса. Однако Ламли и Панов-

ский [6] нашли, что эта гипотеза применима к сдвиговым полям турбулентного ветра выше предела, указанного Линем. Таким образом, пределы применимости гипотезы Тейлора пока до конца не выяснены и должны анализироваться в каждом отдельном случае.

3.2.6. Случайное поле

Если мы продвинемся еще на один шаг в нашем обсуждении и вместо измерений вдоль линии будем измерять скорость $U_1(\mathbf{r}, t_1)$ в каждой точке поля течения, то получим случайную функцию координат x_1, x_2, x_3 , которая называется случайным полем. Изменяя, кроме того, время, как указывалось выше, мы получим случайное поле, зависящее от времени. Теперь выражение «случайная функция переменных $\mathbf{r}$ и t » будет означать, что в каждой точке $(\mathbf{r}, t)$ четырехмерной пространственно-временной области значение $U_1(\mathbf{r}, t)$ является случайной переменной и может быть предсказано лишь с некоторой вероятностью.

В принципе закон распределения этих вероятностей можно вывести, используя ансамбль из $N \times M$ выборочных записей в наших N мысленных экспериментах с M датчиками, расположенными в поле течения таким образом, что они не оказывают влияния на движение жидкости. По этим данным можно вычислить плотность вероятности, и тогда вероятность того, что в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t скорость принимает значение из интервала $U_1(\mathbf{r}, t) \leq (U_1)_p < U_1(\mathbf{r}, t) + dU_1$, определяется выражением

$$P[U_1(\mathbf{r}, t) \leq (U_1)_p < U_1(\mathbf{r}, t) + dU_1, \mathbf{r}, t] = f[U_1(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t] dU_1. \quad (3.31)$$

Более того, можно определить многомерную плотность вероятности, которая позволяет вычислить вероятность того, что составляющая скорости U_1 будет принимать заданные значения в нескольких различных точках поля течения. Например, двумерная плотность вероятности позволяет вычислить вероятность того, что в момент времени t составляющая скорости $U_1(\mathbf{r}^1, t)$ в точке $\mathbf{r}^1$ заключена между U_1^1 и $U_1^1 + dU_1^1$, а в точке $\mathbf{r}^2$ — между U_1^2 и $U_1^2 + dU_1^2$. При дальнейшем обобщении рассматриваются значения $U_1(\mathbf{r}, t)$, наблюдаемые более чем в двух точках:

$$P[U_1^1 \leq (U_1)_p < U_1^1 + dU_1^1, \dots, U_1^N \leq (U_1)_p < U_1^N + dU_1^N, \mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2, \dots, \mathbf{r}^N, t] = f(U_1^1, \dots, U_1^N, \mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^N, t) dU_1^1 \dots dU_1^N. \quad (3.32)$$

3.2.7. Случайные скалярные и векторные поля

Случайное поле одной составляющей скорости (или любой другой величины, определяемой одной случайной переменной, например температуры или давления) является скалярным случайным полем. Однако в турбулентном течении одной из основных переменных является векторная величина — скорость, которая имеет три составляющие U_1, U_2 и U_3 . Следовательно, турбулентное поле скорости является случайным векторным полем. Любая из составляющих скорости, образующих это поле, является случайной переменной; чтобы предсказать вероятность появления заданной скорости в некоторой точке пространства и времени, нужно знать трехмерную плотность вероятности:

$$P(\mathbf{V} \leq \mathbf{V}_p < \mathbf{V} + d\mathbf{V}; \mathbf{r}, t) = f(U_1, U_2, U_3, x_1, x_2, x_3, t) dU_1 dU_2 dU_3. \quad (3.33)$$

Можно обобщить это определение, вводя $3n$ -мерную плотность вероятности, которая в принципе позволила бы вычислить вероятность появления трех составляющих скорости в n пространственных точках; однако определение такой плотности вероятности в каких-либо практически осуществимых экспериментах вряд ли возможно.

3.3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Турбулентное поле течения считается известным, если известна рассматривавшаяся выше многомерная плотность вероятности; однако, как уже указывалось, определение $3n$ -мерной плотности вероятности является практически неосуществимой задачей. Тем не менее в большинстве случаев случайное поле можно адекватно описать статистическими моментами различных порядков, которые нетрудно определить по экспериментальным данным.

3.3.1. Обычные моменты

В наиболее общем случае статистические моменты определяются соотношениями вида

$$B_{i,j,\dots,p}^{k_i,k_j,\dots,k_p}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) = \langle U_i^{k_i}(\mathbf{r}_1, t) U_j^{k_j}(\mathbf{r}_2, t), \dots, U_p^{k_p}(\mathbf{r}_n, t) \rangle. \quad (3.34)$$

Такая величина называется n -точечным моментом k -го порядка, где $k = k_i + k_j + \dots + k_p$. Угловыми скобками обозначается статистическое среднее, которое, как и раньше, определяется через плотность вероятности:

$$\begin{aligned} & \langle U_i^{k_i}(\mathbf{r}_1, t) U_j^{k_j}(\mathbf{r}_2, t) \dots U_p^{k_p}(\mathbf{r}_n, t) \rangle = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} U_i^{k_i}(\mathbf{r}_1, t) U_j^{k_j}(\mathbf{r}_2, t) \dots U_p^{k_p}(\mathbf{r}_n, t) \times \\ & \times f(U_i, U_j, \dots, U_p, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n, t) dU_i dU_j \dots dU_p. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Значительные трудности представляет вычисление интеграла в уравнении (3.35), однако при исследовании турбулентных течений, вообще говоря, можно избежать вычисления этого интеграла. Двухточечные моменты второго, третьего и четвертого порядков имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_{i,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) &= \langle U_i(\mathbf{r}_1, t) U_j(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \\ B_{ij,k}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) &= \langle U_i(\mathbf{r}_1, t) U_j(\mathbf{r}_1, t) U_k(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \\ B_{ij,km}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) &= \langle U_i(\mathbf{r}_1, t) U_j(\mathbf{r}_1, t) U_k(\mathbf{r}_2, t) U_m(\mathbf{r}_2, t) \rangle. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Запятая между индексами показывает, что i -я составляющая скорости в первом равенстве, так же как i -я и j -я составляющие скорости во втором и третьем равенствах, измеряется в точке $\mathbf{r}_1$, а j -я составляющая в первом равенстве, k -я составляющая во втором равенстве и k -я и m -я составляющие в третьем равенстве измеряются в точке $\mathbf{r}_2$. Можно говорить о симметрии моментов по перестановкам индексов внутри каждой из этих различных групп. Далее, трехточечный момент третьего порядка имеет вид

$$B_{i,j,k}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, t) = \langle U_i(\mathbf{r}_1, t) U_j(\mathbf{r}_2, t) U_k(\mathbf{r}_3, t) \rangle, \quad (3.37)$$

и т. д.

Обычно при исследовании турбулентности рассматриваются двухточечные моменты, причем, как правило, не больше чем третьего порядка. Следует отметить, что статистические моменты n -го порядка характеризуются свойствами тензоров n -го ранга.

3.3.2. Центральные моменты

Моменты, образованные из пульсационных величин (отклонений от средних значений), называются центральными моментами и часто обозначаются строчными буквами; например,

$$b_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle u_i(\mathbf{r}, t) u_j(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle [U_i(\mathbf{r}, t) - \langle U_i(\mathbf{r}, t) \rangle] [U_j(\mathbf{r}, t) - \langle U_j(\mathbf{r}, t) \rangle] \rangle. \quad (3.38)$$

Одноточечные центральные моменты составляющих скорости определяют напряжения Рейнольдса и часто обозначаются как $u_i u_j$ или $\overline{u_i^2}$. Во многих работах величина $\overline{u_i^2}$ обозначается также через σ^2 .

Пример 3. На практике двухточечный центральный момент можно вычислить, используя показания двух датчиков, расположенных в поле течения, и уравнения

$$\langle u_i(\mathbf{r}_1, t) u_j(\mathbf{r}_2, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_i^{(k)}(\mathbf{r}_1, t) u_j^{(k)}(\mathbf{r}_2, t), \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \langle u_i(\mathbf{r}_1, t) u_i(\mathbf{r}_2, t) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [U_i^{(k)}(\mathbf{r}_1, t) - \langle U_i(\mathbf{r}_1, t) \rangle] \times \\ &\times [U_i^{(k)}(\mathbf{r}_2, t) - \langle U_i(\mathbf{r}_2, t) \rangle]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Предположим, что первые 25 строк из табл. 3.1 были получены с использованием датчика, расположенного в точке $\mathbf{r}_1$, а остальные 25 строк — на основании одновременных измерений датчиком, расположенным в точке $\mathbf{r}_2$. Вычислим двухточечную корреляцию второго порядка при $t = 0,2$ с. Средние по ансамблю равны

$$\begin{aligned} \langle U_1(\mathbf{r}_1, t) \rangle &= (1/25)[5,55 + 2,88 + 8,32 + \dots + 9,01 + \\ &+ 0,66] = 5,44 \end{aligned} \quad (3.41)$$

и

$$\langle U_1(\mathbf{r}_2, t) \rangle = (1/25)[1,33 + 2,84 + 1,00 + \dots + 0,50 + 7,00] = 6,42. \quad (3.42)$$

Теперь можно вычислить корреляцию:

$$\begin{aligned} \langle u_1(\mathbf{r}_1, t) u_1(\mathbf{r}_2, t) \rangle &= (1/25)[(0,11)(-5,09) + (-2,56)(-3,58) + \\ &+ (2,88)(-5,42) + \dots + (3,57)(3,08) + (-4,78)(0,58)] = 0,568. \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.3.3. Совместные моменты

Моменты, образованные из случайных переменных, относящихся к нескольким разным случайным полям, таким, как поля температуры или давления, называются совместными моментами. Например, двухточечный совместный момент полей давления и скорости записывается в виде

$$B_{p,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle p(\mathbf{r}_1, t) U_j(\mathbf{r}_2, t) \rangle. \quad (3.44)$$

3.3.4. Пространственно-временные моменты

Моменты, соответствующие фиксированному моменту времени, обычно называются пространственными моментами. В более общем случае вводится пространственно-временной момент, представляющий собой среднее значение произведения случайных перемен-

ных, относящихся к различным точкам и различным моментам времени:

$$B_{i,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle U_i(\mathbf{r}_1, t_1) U_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle. \quad (3.45)$$

Временные моменты определяются как средние значения произведений гидродинамических скоростей, относящихся к одной и той же точке, но к различным моментам времени. Например,

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t_1, t_2) = \langle U_i(\mathbf{r}, t_1) U_j(\mathbf{r}, t_2) \rangle. \quad (3.46)$$

Временные моменты более часто используются при рассмотрении случайных процессов, а не случайных полей. Тогда для этих величин используется, как правило, название «корреляционная функция». Автокорреляционная функция определяется в виде

$$B_{ii}(\mathbf{r}, t_1, t_2) = \langle U_i(\mathbf{r}, t_1) U_i(\mathbf{r}, t_2) \rangle, \quad (3.47)$$

а корреляционная (взаимно-корреляционная) функция различных составляющих скорости — в виде

$$B_{ij}(\mathbf{r}, t_1, t_2) = \langle U_i(\mathbf{r}, t_1) U_j(\mathbf{r}, t_2) \rangle. \quad (3.48)$$

Пример 4. Автокорреляционная функция, соответствующая выборкам случайных данных, приведенным в табл. 3.1, вычисляется по формуле

$$B_{ii}(\mathbf{r}, t_1, t_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N U_i^{(k)}(\mathbf{r}, t_1) U_i^{(k)}(\mathbf{r}, t_2). \quad (3.49)$$

Пусть $t_1 = 0,2$ и $t_2 = t_1 + \tau$, где $\tau = 0,5$ — интервал времени между сигналами. Тогда

$$B_{ii}(\mathbf{r}; 0,2; 0,7) = (1/50) [(5,55)(1,04) + (2,88)(1,13) + \dots + (9,50)(0,01) + (7,00)(0,37)] = 9,32. \quad (3.50)$$

3.3.5. Другие термины

Термин «корреляционная функция» используется также и для пространственных моментов. Хинце [7] называет двухточечные моменты второго и третьего порядков двойными и тройными корреляциями скорости соответственно.

Термин «корреляционная функция» обычно используется для двухточечных моментов второго порядка. К этим же моментам применяется термин «ковариация».

Коэффициент корреляции определяется как безразмерная корреляционная функция:

$$R_{i,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle U_i(\mathbf{r}_1, t) U_j(\mathbf{r}_2, t) \rangle / [\langle U_i^2(\mathbf{r}_1, t) \rangle \langle U_j^2(\mathbf{r}_2, t) \rangle]^{1/2} = B_{i,j}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) / [B_{ii}(\mathbf{r}_1, t) B_{jj}(\mathbf{r}_2, t)]^{1/2}. \quad (3.51)$$

В нашем изложении термин «моменты» будет относиться, как правило, к пространственным моментам; тем не менее как равнозначные будут использоваться термины «корреляционная функция», «ковариация» и «момент». Кроме того, здесь и в других работах часто используется обозначение

$$R_{ij}(\mathbf{r}, t) = \overline{u_i u_j} / \sigma_i \sigma_j. \quad (3.52)$$

Из физических соображений следует, что значения коэффициента корреляции заключены в интервале

$$-1 \leq R_{ij} \leq 1, \quad (3.53)$$

причем $R_{ij} = 1$ в случае идеальной корреляции, когда $U_i(\mathbf{r}, t) = U_j(\mathbf{r}, t)$, а $R_{ij} = -1$ в том случае, когда вычисляется корреляция некоторой переменной с этой же переменной, взятой с обратным знаком. Равенство $R_{ij} = 0$ выполняется, когда взаимосвязь между пульсациями, в том числе статистическая, полностью отсутствует.

3.3.6. Продольные и поперечные корреляционные функции

При анализе турбулентности наиболее часто используются две корреляционные функции, которые характеризуют корреляции продольных или поперечных составляющих скорости. Продольная корреляционная функция является двухточечным моментом:

$$b_{ll}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle u_l(\mathbf{r}_1, t) u_l(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \quad (3.54)$$

где индексом l обозначается составляющая скорости вдоль линии, соединяющей точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ (рис. 3.12). В свою очередь поперечная корреляционная функция определяется в виде

$$b_{nn}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \langle u_n(\mathbf{r}_1, t) u_n(\mathbf{r}_2, t) \rangle, \quad (3.55)$$

где индексом n обозначается составляющая скорости, нормальная к линии, соединяющей точки $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Символами $f(r)$ и $g(r)$ обычно (в частности, при рассмотрении

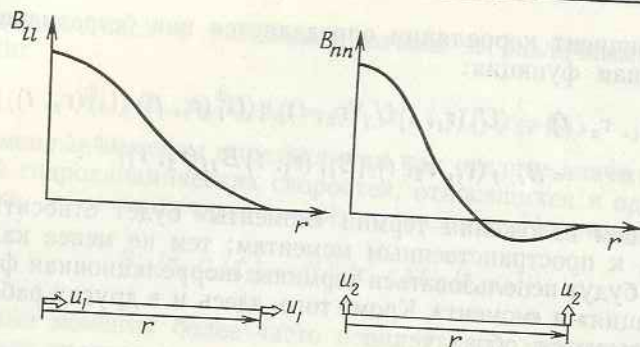


Рис. 3.12. Продольная и поперечная корреляционные функции.

изотропной турбулентности) обозначаются коэффициенты продольной и поперечной корреляции соответственно:

$$f(r) = b_{11}(r, t)/b_{11}(0, t) \quad (3.56)$$

и

$$g(r) = b_{nn}(r, t)/b_{nn}(0, t). \quad (3.57)$$

В случае изотропной турбулентности величина r представляет собой просто расстояние между двумя точками в поле течения, тогда как ориентация точек не имеет никакого значения.

Следует также упомянуть, что в случае стационарного процесса корреляционная функция $B_{ij}(r, t_1, t_2)$ зависит лишь от разности времен $\tau = t_2 - t_1$ и, следовательно, может быть записана в виде $B_{ij}(r, \tau)$. Аналогично в случае однородного течения момент второго порядка $B_{ij}(r_1, r_2, t)$ зависит лишь от разности радиус-векторов точек, т. е. от $l = r_2 - r_1$, и обычно записывается как $B_{ij}(l, t)$. В случае изотропного поля момент второго порядка зависит лишь от величины вектора l и, следовательно, записывается как $B_{ij}(l, t)$.

3.3.7. Характеристики коэффициентов корреляции

3.3.7.1. Временные корреляции. Коэффициенты корреляции общего вида здесь не рассматриваются; однако следует рассмотреть характеристики коэффициента временной автокорреляции для статистически стационарного и (или) статистически однородного течения. На рис. 3.13 показана типичная зависимость коэффициента временной автокорреляции от разности времен τ . Так как турбулентное движение непрерывно, флуктуация скорости может измениться лишь по истечении некоторого конечного промежутка времени; следовательно, у автокорреляционной функции имеется плоский участок, или «плато», в окрестности точки $\tau = 0$.

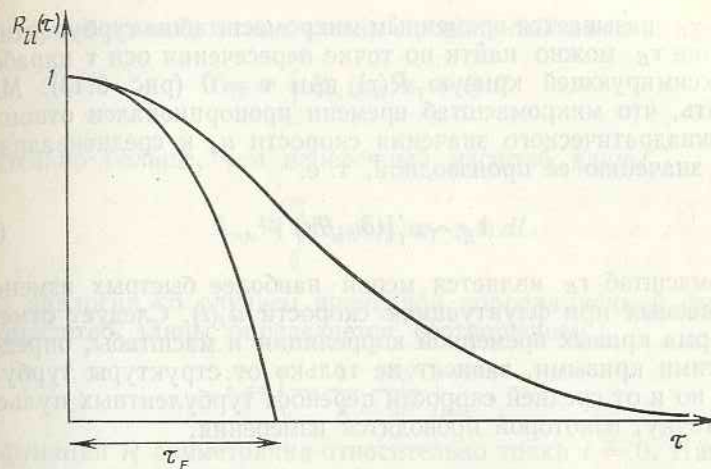


Рис. 3.13. Типичные зависимости для коэффициента временной автокорреляции.

С помощью коэффициента автокорреляции определяются характерные масштабы времени, описывающие турбулентность. Сохраняемость турбулентных пульсаций в среднем в некоторой точке характеризуется интегральным масштабом времени

$$T_E = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau. \quad (3.58)$$

Масштаб T_E можно рассматривать, например, как меру длительности существования связи между турбулентными пульсациями $u_i(t)$.

Микромасштаб времени определяется с помощью коэффициента корреляции следующим образом. Кривизну верхней части корреляционной кривой определяют мелкомасштабные турбулентные пульсации. Разлагая коэффициент корреляции в ряд Тейлора, получаем

$$R(\tau) = 1 + \frac{\partial R}{\partial \tau} \bigg|_0 \tau + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} \bigg|_0 \tau^2 + \dots \quad (3.59)$$

Вследствие симметрии $\partial R / \partial \tau|_0 = 0$. При малых τ

$$R(\tau) \approx 1 - \left(\frac{\tau}{\tau_E} \right)^2, \quad (3.60)$$

где

$$\tau_E = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} \bigg|_{\tau=0} \right)^{-1/2}. \quad (3.61)$$

Время τ_E называется временным микромасштабом турбулентности. Значение τ_E можно найти по точке пересечения оси τ параболой, аппроксимирующей кривую $R(\tau)$ при $\tau = 0$ (рис. 3.13). Можно показать, что микромасштаб времени пропорционален отношению среднеквадратического значения скорости u_i к среднеквадратическому значению ее производной, т. е.

$$\tau_E \sim u_i' / [(\partial u_i / \partial t)']^{-1}. \quad (3.62)$$

Микромасштаб τ_E является мерой наиболее быстрых изменений, наблюдаемых при флуктуациях скорости $u_i(t)$. Следует отметить, что форма кривых временной корреляции и масштабы, определяемые этими кривыми, зависят не только от структуры турбулентности, но и от средней скорости переноса турбулентных пульсаций через точку, в которой проводятся измерения.

3.3.7.2. Пространственные корреляции. В отличие от временных корреляционных функций двухточечные пространственные автокорреляционные функции могут принимать отрицательные значения по мере увеличения расстояния между точками; кроме того, эти функции могут быть асимметричными относительно указанного расстояния. Асимметрия двухточечных пространственных автокорреляционных функций имеет место тогда, когда структура турбулентности существенно изменяется на расстоянии, на котором корреляции пульсаций остаются значительными. Например, в случае пристеночного турбулентного течения, скорость $\bar{U}_1(x_2)$ которого расположена в плоскости (x_1, x_2) , параллельной плоскости стенки, функция $R(x_2, x_2 + l_2)$ будет существенно асимметричной, функция $R(x_1, x_1 + l_1)$ — слабо асимметричной и функция $R(x_3, x_3 + l_3)$ — симметричной. В случае однородной турбулентности корреляции будут симметричными по всем направлениям. Если, кроме того, турбулентность является изотропной, то корреляции оказываются не только симметричными, но и изменяются одинаковым образом по всем направлениям.

Интегральный масштаб длины определяется с помощью пространственной корреляционной функции соотношением

$$\Lambda = \int_0^\infty R(x_i, x_i + l) dl. \quad (3.63)$$

Масштаб Λ является пространственной мерой взаимосвязей или длиной корреляции между флуктуациями скорости в двух точках поля течения. Величина масштаба Λ зависит от типа рассматриваемых корреляций и от направления линии, соединяющей рассматриваемые точки.

В случае течения около стенки продольный масштаб длины

$$\Lambda_{ll} = \int_0^\infty R_{ll}(x_i, x_i + l) dl \quad (3.64)$$

значительно больше, чем поперечный масштаб длины

$$\Lambda_{nn} = \int_0^\infty R_{nn}(x_i, x_i + l) dl. \quad (3.65)$$

По аналогии со случаем временной корреляционной функции микромасштаб длины определяется соотношением

$$\lambda = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial l^2} \right)_{l=0}^{-1/2}, \quad (3.66)$$

если функция R симметрична относительно точки $l = 0$. Наиболее часто используются продольный микромасштаб

$$\lambda_{ll} = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_{ll}}{\partial l^2} \right)_{l=0}^{-1/2} \quad (3.67)$$

и поперечный микромасштаб

$$\lambda_{nn} = \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2 R_{nn}}{\partial l^2} \right)_{l=0}^{-1/2}, \quad (3.68)$$

причем в общем случае $\lambda_{nn} \neq \lambda_{ll}$.

На практике масштабы длины обычно определяются при помощи гипотезы Тейлора. Согласно этой гипотезе,

$$\Lambda_{ll} = \bar{U} \tau_E, \quad (3.69)$$

где $\bar{U}$ — средняя скорость, а Λ_{ll} — интегральный масштаб длины для пульсаций в направлении основного потока.

Микромасштаб длины не является наименьшим масштабом турбулентности: длина диссипации еще меньше. Колмогоров показал, что должна существовать связь между наименьшими масштабами движения, с одной стороны, и скоростью диссипации энергии ϵ , отнесенной к единице массы, и кинематическим коэффициентом вязкости ν , с другой стороны. Используя эти параметры, наименьший масштаб длины η можно записать в виде $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

$B(\)$ — статистический момент;
 $b(\)$ — центральный момент;
 $E(x)$ — энергетический спектр;
 $F(\)$ — функция распределения;
 $f(\)$ — плотность вероятности;

- $f(r)$ — коэффициент продольной корреляции;
 $g(r)$ — коэффициент поперечной корреляции;
 l — расстояние между двумя точками;
 $\mathbf{l}$ — вектор, соединяющий две точки;
 l — масштаб вихрей;
 P — давление;
 $P(\)$ — вероятность;
 $R(\)$ — коэффициент корреляции;
 $\mathbf{r}$ — радиус-вектор;
 s_{ij} — пульсационный тензор деформаций;
 T_E — интегральный масштаб времени;
 t — время;
 U — мгновенная скорость;
 $\bar{U}$ — средняя скорость;
 u — флуктуация скорости;
 $\mathbf{V}$ — вектор скорости;
 x — координата;
 ω — завихренность;
 Λ — пространственный интегральный масштаб;
 λ — микромасштаб;
 z — волновое число;
 $\Gamma(\)$ — гамма-функция;
 τ — интервал времени;
 τ_E — микромасштаб времени;
 $\overline{\quad}$ — среднее по ансамблю;
 $\langle \quad \rangle$ — среднее по времени;
 $\langle \quad \rangle$ — среднее по ансамблю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tennekes H., Lumley J. L., A First Course in Turbulence, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
2. Bradshaw P., An Introduction to Turbulence and its Measurement, Pergamon Press, Oxford, England (1971). [Имеется перевод: Брэдшоу П., Введение в турбулентность и ее измерение. — М.: Мир, 1974.]
3. Hodgman C. D. (ed.), Handbook of Chemistry and Physics, Chemical Rubber Publishing Co., Cleveland, 1954.
4. Панчев С., Случайные функции и турбулентность. — Л.: Гидрометеопиздат, 1967.
5. Lin C. C., Statistical Theories of Turbulence, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961. [Имеется перевод: Линь Цзя-цзяо, Статистические теории турбулентности, в кн.: Турбулентные течения и теплопередача, под ред. Линь Цзя-цзяо. — М.: ИИЛ, 1963, стр. 206—264.]
6. Lumley J. L., Panofsky H. A., The Structure of Atmospheric Turbulence, Interscience Publishers, New York, 1964. [Имеется перевод: Ламли Дж. Л., Пановский Г. А., Структура атмосферной турбулентности. — М.: Мир, 1966.]
7. Hinze J. O., Turbulence, McGraw-Hill Book Co., New York, 1959. [Имеется перевод: Хинце И. О., Турбулентность. — М.: ГИФМЛ, 1963.]

Спектральная теория турбулентности

У. ФРОСТ¹⁾

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривавшиеся в предыдущей главе статистические корреляции находят применение в исследованиях турбулентности и сравнительно легко измеряются. Другим эффективным средством описания турбулентности является метод спектрального анализа. Спектральная и корреляционная теории тесно взаимосвязаны математически посредством преобразования Фурье. В спектральных функциях нет никакой дополнительной информации, которая не содержалась бы уже в корреляционных функциях, однако эти два метода описания турбулентности выявляют различные аспекты рассматриваемой проблемы. Например, выше рассматривался перенос энергии между различными масштабами или вихрями различных размеров. Спектральный анализ позволяет описать обмен кинетической энергией, соответствующей вихрям различных размеров или различным частотам пульсаций в турбулентном движении.

Имеется два типа спектральных функций, которые представляют интерес при анализе турбулентности: частотные спектры и спектры в пространстве волновых чисел. Сначала рассмотрим частотные спектры, так как они проще для понимания. Изложение начнем с обзора теоретических основ гармонического анализа.

4.2. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

4.2.1. Ряды Фурье

Рассмотрим сначала детерминированную периодическую функцию $f(t)$, которую можно разложить в ряд Фурье:

¹⁾ Walter Frost, The University of Tennessee Space Institute, Tullahoma, Tennessee 37388.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t), \quad (4.1)$$

где

$$\omega_n = n\omega' = 2\pi n/T.$$

Здесь ω' — основная частота, а $T = 2\pi/\omega'$ — период функции $f(t)$. Коэффициенты этого ряда задаются формулами

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_n t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_n t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и могут быть определены, если

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt < \infty. \quad (4.3)$$

Характеристики турбулентности всегда являются действительными функциями, однако для удобства вычислений часто желательно использовать комплексный ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{i\omega_n t}, \quad (4.4)$$

где

$$F(n) = \frac{1}{2} (a_n - ib_n), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.5)$$

или

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Функция $F(n)$ называется комплексным спектром периодической функции $f(t)$; она зависит от номера гармоники n и представляет периодическую функцию времени в частотной области. Функция $F(n)$ содержит полную информацию об амплитудах и фазах гармоник, по которым разлагается функция $f(t)$. Спектр $F(n)$ является линейчатым спектром, так как номер гармоники n принимает лишь дискретные значения.

Имеющуюся в функции $F(n)$ информацию об амплитудах и фазах можно выделить следующим образом. Амплитуда n -й гармоники определяется выражением

$$|F(n)| = \frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}, \quad (4.6)$$

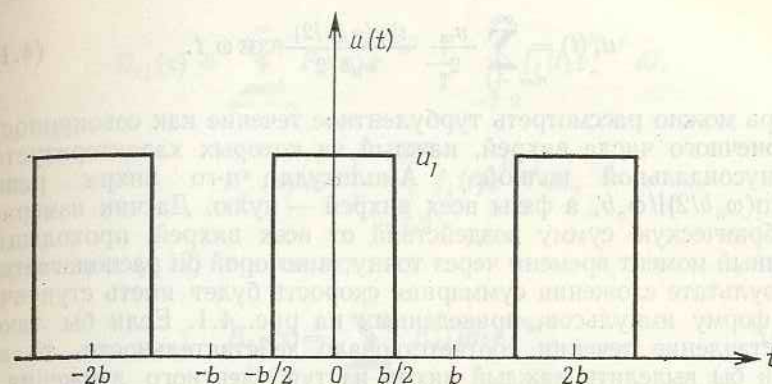


Рис. 4.1. Гипотетические флуктуации скорости, генерируемые бесконечным числом синусоидальных вихрей.

а фаза n -й гармоники — выражением

$$\theta(n) = \arctg(-b_n/a_n). \quad (4.7)$$

Следовательно, периодическую функцию можно представить в виде

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)| e^{i[\omega_n t + \theta(n)]}. \quad (4.8)$$

Функция $|F(n)|$ называется амплитудным спектром $f(t)$, а функция $\theta(n)$ — фазовым спектром $f(t)$.

В качестве примера, иллюстрирующего, как введенные выше понятия можно применить к турбулентности, рассмотрим датчик, установленный в поле течения и измеряющий продольную составляющую скорости u_1 , которая представляет собой регулярную последовательность прямоугольных импульсов (рис. 4.1). Такая функция является слишком грубой аппроксимацией пульсаций скорости в реальных течениях, однако она будет полезной при обсуждении рассматриваемых вопросов.

Комплексный спектр такой волны имеет вид

$$F(n) = \frac{1}{T} \int_{-b/2}^{b/2} u_m e^{-i\omega_n t} dt, \quad (4.9)$$

откуда

$$F(n) = \frac{u_m}{2} \frac{\sin(\omega_n b/2)}{\omega_n b/2}. \quad (4.10)$$

Выражая скорость через действительную часть периодической функции $f(t)$, находим

$$u_1(t) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{u_m}{2} \frac{\sin(\omega_n b/2)}{\omega_n b/2} \cos \omega_n t. \quad (4.11)$$

Теперь можно рассмотреть турбулентное течение как совокупность бесконечного числа вихрей, каждый из которых характеризуется косинусоидальной волной. Амплитуда n -го вихря равна $[u_m \sin(\omega_n b/2)]/\omega_n b/2$, а фазы всех вихрей — нулю. Датчик измеряет алгебраическую сумму воздействий от всех вихрей, проходящих в данный момент времени через точку, в которой он располагается. В результате сложения суммарная скорость будет иметь ступенчатую форму импульсов, приведенных на рис. 4.1. Если бы такое представление течения соответствовало действительности, то мы могли бы выделить каждый вихрь из турбулентного движения и следить за его поведением.

С учетом этих соображений рассмотрим корреляционную функцию двух периодических сигналов одинаковой основной частоты:

$$B_{ij}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) f_j(t + \tau) dt, \quad (4.12)$$

где τ — сдвиг вдоль оси времени (непрерывная переменная), не зависящий от t , и

$$f_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_i(n) e^{i\omega_n t}, \quad (4.13)$$

$$f_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_j(n) e^{i\omega_n t}. \quad (4.14)$$

Важным свойством корреляционной функции является то, что ее преобразование Фурье записывается в виде $E_{ij}(n) = F_i^*(n) F_j(n)$ (звездочкой обозначается операция комплексного сопряжения). Для доказательства подставим выражение

$$f_j(t + \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_j(n) e^{i\omega_n (t + \tau)} \quad (4.15)$$

в формулу (4.12) и получим

$$B_{ij}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_j(n) e^{i\omega_n (t + \tau)} dt. \quad (4.16)$$

Учитывая, что τ не является переменной интегрирования и что операции суммирования и интегрирования можно поменять местами, находим:

$$B_{ij}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_j(n) e^{i\omega_n \tau} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) e^{i\omega_n t} dt. \quad (4.17)$$

Так как

$$F_i^*(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i(t) e^{i\omega_n t} dt, \quad (4.18)$$

выражение (4.12) принимает вид

$$B_{ij}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{ij}(n) e^{i\omega_n \tau}. \quad (4.19)$$

Таким образом, функция $E_{ij}(n)$ является комплексным спектром функции $B_{ij}(\tau)$ и преобразованием Фурье функции $B_{ij}(\tau)$, т. е.

$$E_{ij}(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} B_{ij}(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau. \quad (4.20)$$

Следовательно, автокорреляционная функция периодического сигнала $f_i(t)$ может быть записана в виде

$$B_{ii}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{ii}(n) e^{i\omega_n \tau}, \quad (4.21)$$

где

$$E_{ii}(n) = F_i^*(n) F_i(n) = |F_i(n)|^2. \quad (4.22)$$

При нулевом сдвиге $\tau = 0$ имеем

$$B_{ii}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_i^2(t) dt, \quad (4.23a)$$

откуда

$$B_{ii}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_i(n)|^2. \quad (4.23b)$$

Согласно формулам (4.23), средний квадрат функции $f_i(t)$ равен сумме квадратов абсолютных значений спектра по всем гармоникам или (для рассматривавшегося выше гипотетического случая) по всем вихрям. Если функция $f_i(t)$ описывает скорость, то выражение (4.23a) пропорционально средней кинетической энергии потока. Кроме того, так как функция $|F_i(n)|$ характеризует амплитуду n -й гармоники или вихря, то величина $|F_i(n)|^2$ пропорциональна кинетической энергии, вносимой отдельным вихрем в суммарную кинетическую энергию потока.

Функция $E_{ii}(n) = |F_i(n)|^2$ называется энергетическим спектром.

Необходимо отметить интересное свойство энергетического спектра автокорреляционной функции. Этот спектр эквивалентен квадрату абсолютной величины комплексного спектра $F_i(n)$ рассматриваемой периодической функции; поэтому его фазовый спектр равен нулю для всех гармоник. Следовательно, в автокорреляционной функции удерживаются все гармоники рассматриваемой функции и нет никаких других гармоник, однако в ней отсутствует информация о фазах. Другими словами, все периодические функции, гармоники которых имеют одинаковые амплитуды, но различные начальные фазы, характеризуются одной и той же автокорреляционной функцией; это утверждение означает, что энергетический спектр периодической функции не зависит от фаз ее гармоник.

Возвратимся к гипотетическому примеру турбулентного течения, состоящего из вихрей с косинусоидальными флуктуациями скорости, при суммировании которых получается периодически изменяющаяся во времени скорость в виде последовательности прямоугольных импульсов. Автокорреляционная функция для этого случая показана на рис. 4.2.

Энергетический спектр можно определить либо путем непосредственного интегрирования в выражении

$$E_{ii}(n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} B_{ii}(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau, \quad (4.24)$$

либо, более просто, из соотношения

$$E_{ii}(n) = |F_i(n)|^2, \quad (4.25)$$

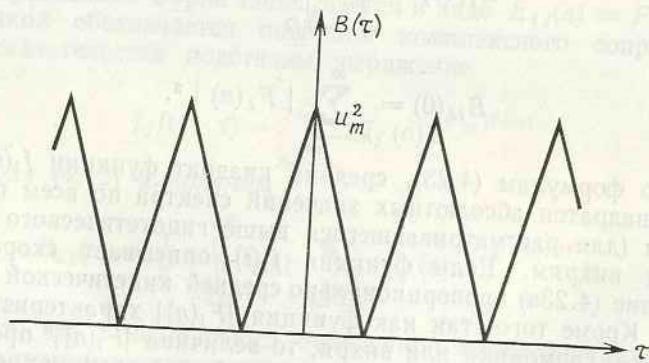


Рис. 4.2. Автокорреляционная функция для последовательности прямоугольных импульсов.

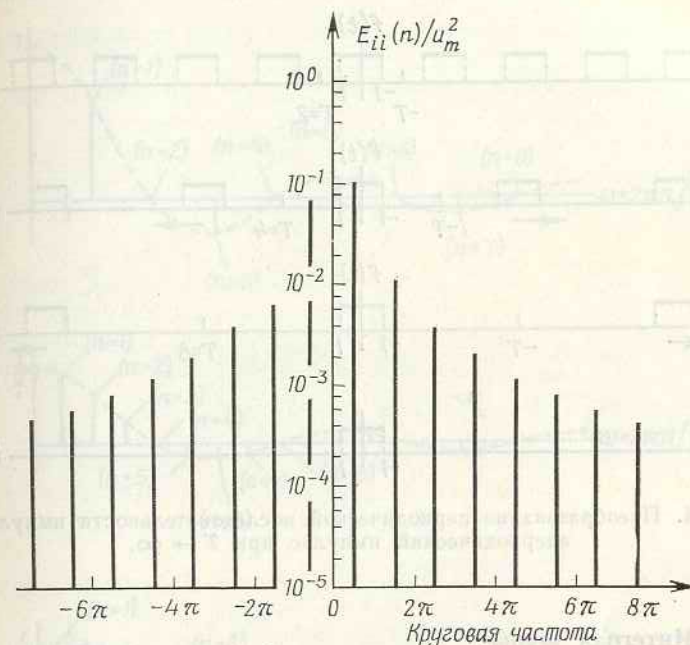


Рис. 4.3. Энергетический спектр для последовательности прямоугольных импульсов.

которое в рассматриваемом случае дает

$$E_{ii}(n) = \left(\frac{u_m}{\omega_n b} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega_n b}{2}. \quad (4.26)$$

Энергетический спектр ступенчатой периодической функции показан на рис. 4.3. Приведенные на рис. 4.3 ординаты характеризуют кинетическую энергию каждой гармоники или вихря, из которых состоит рассматриваемое гипотетическое турбулентное течение. Можно видеть, что чем меньше частота вихрей (т. е. больше размер вихрей), тем больше содержащаяся в них кинетическая энергия. Следовательно, в рассматриваемом примере основная часть кинетической энергии содержится в крупных вихрях. Это закономерно, так как течение является периодическим.

Однако турбулентность не может быть описана совокупностью дискретных вихрей, как предполагается выше, так как в турбулентном течении содержатся вихри, размеры которых непрерывно распределены в некотором диапазоне. Чтобы учесть этот факт, усложним рассматриваемое гипотетическое течение еще в одном отношении, в результате чего будет получено разложение непериодической функции в интеграл Фурье.

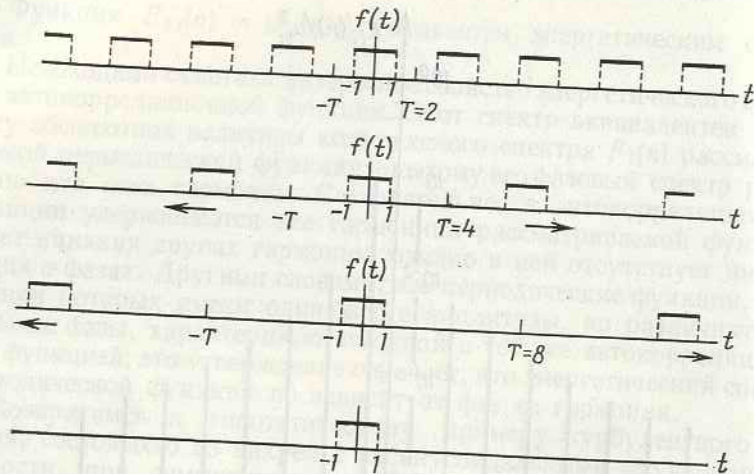


Рис. 4.4. Преобразование периодической последовательности импульсов в аperiodический импульс при $T \rightarrow \infty$.

4.2.2. Интеграл Фурье

Снова рассмотрим периодическую импульсную функцию $f(t)$, изображенную на рис. 4.1. С увеличением периода следования импульсы будут появляться все реже и реже, как показано на рис. 4.4, и, наконец, при $T \rightarrow \infty$ рассматриваемая функция будет описывать единичный импульс.

Эвристически поведение ряда Фурье при $T \rightarrow \infty$ можно определить, рассматривая сначала спектр функции $f(t)$:

$$F(n) = \frac{2u_m}{T} \frac{\sin \omega_n}{\omega_n}. \quad (4.27)$$

Функция (4.27) отличается от функции (4.10), так как произвольно полагается $b = 2$, а параметр T вводится в качестве переменной. Последовательные значения аргумента ω_n в формуле (4.27) различаются на постоянную величину:

$$\Delta\omega = \frac{2n\pi}{T} - \frac{2(n-1)\pi}{T} = \frac{2\pi}{T}. \quad (4.28)$$

Отметим, что $\Delta\omega \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Перепишем соотношение (4.27) в виде

$$F(n) = \frac{u_m}{\pi} \frac{\sin \omega_n}{\omega_n} \Delta\omega, \quad (4.29)$$

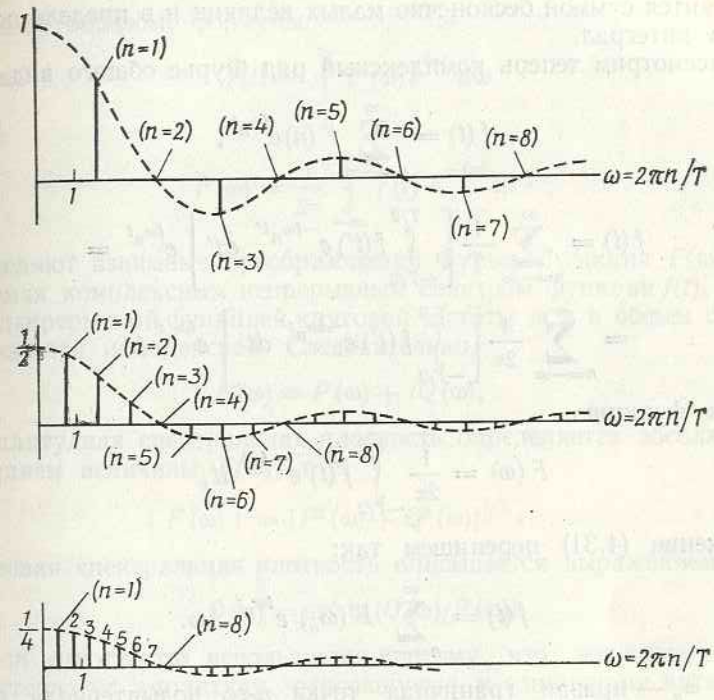


Рис. 4.5. Изменение коэффициентов ряда Фурье при увеличении T (от верхнего графика к нижнему).

заметим, что множитель $(\sin \omega_n)/\omega_n$ определяет относительную величину амплитуды n -й гармоники. Откладывая по оси ординат значения этого множителя в последовательных точках $\omega_n + \Delta\omega$, начиная с $\omega_n = 0$, получим кривые (рис. 4.5), которые иллюстрируют поведение масштабного множителя при увеличении T .

Отметим два очевидных свойства этих кривых: 1) вертикальный размах колебаний этих кривых уменьшается обратно пропорционально T (или прямо пропорционально $\Delta\omega$); 2) расстояние между дискретными ординатами вдоль горизонтали уменьшается обратно пропорционально T (оно равно $\Delta\omega$). Так как при $T \rightarrow \infty$ (или $\Delta\omega \rightarrow 0$) разность частот, соответствующих последовательным членам ряда

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) \cos \omega_n t, \quad (4.30)$$

уменьшается, а его коэффициенты стремятся к нулю, можно полагать, что этот ряд, рассматриваемый как функция параметра T ,

становится суммой бесконечно малых величин и в пределе переходит в интеграл.

Рассмотрим теперь комплексный ряд Фурье общего вида

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{i\omega_n t}, \quad (4.31)$$

или

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-i\omega_n t'} dt' \right] e^{i\omega_n t} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-T/2}^{T/2} f(t') e^{-i\omega_n t'} dt' \right] e^{i\omega_n t} \Delta\omega. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Вводя функцию

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.33)$$

выражение (4.31) перепишем так:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{i\omega_n t} \Delta\omega. \quad (4.34)$$

Здесь ω_n — правая граничная точка n -го подынтервала $\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1}$. При выполнении некоторых довольно слабых условий пределом этого выражения при $\Delta\omega \rightarrow 0$ является интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4.35)$$

Так как условие $T \rightarrow \infty$ эквивалентно условию $\Delta\omega \rightarrow 0$, разумно предположить, что при $T \rightarrow \infty$ непериодическую предельную функцию $f(t)$ можно представить в виде интеграла

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' d\omega. \quad (4.36)$$

Эта формула описывает разложение непериодической функции $f(t)$ в интеграл Фурье; более строгий вывод [1] показывает, что для существования интеграла Фурье требуется, чтобы интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad (4.37)$$

имел конечную величину.

Таким образом, формулы

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.38)$$

и

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.39)$$

определяют взаимные преобразования Фурье. Функция $F(\omega)$, называемая комплексным непрерывным спектром функции $f(t)$, является непрерывной функцией круговой частоты ω и в общем случае оказывается комплексной. Следовательно,

$$F(\omega) = P(\omega) + iQ(\omega), \quad (4.40)$$

и амплитудная спектральная плотность определяется абсолютным значением величины $F(\omega)$, т. е.

$$|F(\omega)| = [P^2(\omega) + Q^2(\omega)]^{1/2}, \quad (4.41)$$

а фазовая спектральная плотность описывается выражением

$$\theta(\omega) = \arctg [Q(\omega)/P(\omega)]. \quad (4.42)$$

Термин «плотность» используется потому, что величина $|F(\omega)|$ характеризует амплитуду, относящуюся к единичному интервалу круговых частот. В самом деле, в выражении

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(\omega) d\omega] e^{i\omega t} \quad (4.43)$$

функция $f(t)$ содержит бесконечную совокупность синусоид $\exp(i\omega t)$ с круговыми частотами ω из непрерывно заполненного бесконечного интервала частот, изменяющихся от $-\infty$ до ∞ , и каждая синусоида имеет бесконечно малую амплитуду

$$|F(\omega)| d\omega. \quad (4.44)$$

Следовательно, величина $|F(\omega)|$ не является истинной амплитудной характеристикой функции $f(t)$, так как все амплитуды бесконечно малы; тем не менее она характеризует относительную величину бесконечно малых амплитуд, соответствующих различным синусоидам $\exp(i\omega t)$.

Корреляционная функция двух непериодических сигналов $f_i(t)$ и $f_j(t)$ описывается формулой

$$B_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j(t + \tau) dt, \quad (4.45)$$

причем предполагается, что для обеих функций существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt. \quad (4.46)$$

Применение преобразования Фурье к функции B_{ij} приводит к функции

$$E_{ij}(\omega) = 2\pi F_i^*(\omega) F_j(\omega), \quad (4.47)$$

такой, что

$$B_{ij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{ij}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (4.48)$$

и

$$E_{ij}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B_{ij}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.49)$$

Автокорреляционная функция имеет вид

$$B_{ii}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |F_i(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4.50)$$

Величина

$$E_{ii}(\omega) = 2\pi |F_i(\omega)|^2 \quad (4.51)$$

называется спектральной плотностью энергии для функции $f_i(t)$. При $\tau = 0$ имеем

$$B_{ii}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |F_i(\omega)|^2 d\omega. \quad (4.52)$$

Если функция $f_i(t)$ обозначает скорость течения, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i^2(t) dt \quad (4.53)$$

имеет размерность L^2/T ; следовательно, величина $|F_i(\omega)|^2$ имеет размерность L^2/T , деленную на единицу измерения круговой частоты. В этом отношении разложение аperiodической функции отличается от разложения периодической функции, для которой

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f_i^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n)|^2. \quad (4.54)$$

Левая часть выражения (4.54) имеет размерность L^2/T^2 , т. е. размерность кинетической энергии, и, следовательно, величину

$|F(n)|^2$ с точностью до постоянного множителя можно рассматривать как кинетическую энергию, соответствующую дискретному вихрю. Таким образом, величина $|F(n)|^2$ имеет ясную физическую интерпретацию, если функция $f(t)$ характеризует, например, периодические флуктуации гидродинамической скорости; в противоположность этому величина $2\pi|F(\omega)|^2$ не имеет четкой физической интерпретации в гидродинамике. С другой стороны, при рассмотрении электрических процессов, когда функция $f(t)$ является напряжением или током, величина $|F(n)|^2$ становится средней мощностью, соответствующей n -й гармонике, и называется спектральной плотностью энергии, соответствующей каждой частоте, и называется спектральной плотностью энергии. Так как при исследовании турбулентности часто используются электронные устройства, необходимо заботиться о том, чтобы не произошла путаница в терминологии, используемой в различных областях знаний.

4.2.3. Стационарный случайный процесс

Мы обобщили анализ гипотетического течения, включив в рассмотрение все частоты в области от $-\infty$ до $+\infty$. Однако эта модель по-прежнему остается некорректной, так как известно, что вихри, из которых состоит турбулентное течение, характеризуются не детерминированными, а случайными амплитудами. Чтобы учесть это обстоятельство, необходимо рассмотреть гармонический анализ случайных функций. Мы ограничимся рассмотрением стационарных случайных процессов и сначала проведем синтез стационарного случайного процесса путем линейной комбинации двух случайных процессов вида $\xi_1 e^{i\omega_1 t}$ и $\xi_2 e^{i\omega_2 t}$. Величины ξ_1 и ξ_2 представляют собой комплексные случайные переменные $\xi_1 = |\xi_1| e^{i\theta_1}$ и $\xi_2 = |\xi_2| e^{i\theta_2}$ с нулевыми средними, а частоты ω_1 и ω_2 — действительные постоянные. Таким образом, имеем

$$\xi(t) = \xi_1 e^{i\omega_1 t} + \xi_2 e^{i\omega_2 t}. \quad (4.55)$$

Так как этот процесс должен быть стационарным, необходимо, чтобы его среднее по ансамблю было постоянным, а автокорреляционная функция зависела только от разности времен $\tau = t_2 - t_1$. (Хотя эти свойства и не дают строгого описания стационарной функции, оно будет достаточным для наших целей [2].) Очевидно, что функция

$$\xi(t) = \xi_1 e^{i\omega_1 t} + \xi_2 e^{i\omega_2 t} \quad (4.56)$$

удовлетворяет первому условию. Автокорреляционная функция комплексной случайной переменной определяется с помощью комп-

лексно-сопряженной переменной в виде $\langle \xi(t) \xi^*(t + \tau) \rangle$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \xi^*(t + \tau) \rangle = & \langle |\xi_1|^2 \rangle e^{i\omega_1 \tau} + \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle e^{i(\omega_1 - \omega_2)t + i\omega_2 \tau} + \\ & + \langle \xi_1^* \xi_2 \rangle e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t + i\omega_2 \tau} + \langle |\xi_2|^2 \rangle e^{i\omega_2 \tau}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

откуда следует, что автокорреляционная функция будет зависеть только от τ , если $\langle \xi_1^* \xi_2 \rangle = \langle \xi_1 \xi_2^* \rangle = 0$. Следовательно, построенный нами случайный процесс является стационарным только тогда, когда величины ξ_1 и ξ_2 представляют собой некоррелированные случайные переменные с нулевыми средними. Стационарный случайный процесс $\xi(t)$ является суперпозицией двух некоррелированных (быть может, независимых) колебаний различных частот, характеризующихся случайными амплитудами $|\xi|$ и фазами θ . В этом случае автокорреляционная функция имеет вид

$$B_{ii}(\tau) = \langle |\xi_1|^2 \rangle e^{i\omega_1 \tau} + \langle |\xi_2|^2 \rangle e^{i\omega_2 \tau}. \quad (4.58)$$

Если $|\xi_1|$ и $|\xi_2|$ — амплитуды флуктуаций скорости, то величины $\langle |\xi_1|^2 \rangle$ и $\langle |\xi_2|^2 \rangle$ с точностью до постоянного множителя определяют среднюю кинетическую энергию отдельных колебаний. Таким образом, автокорреляционная функция по-прежнему не зависит от фаз колебаний. С физической точки зрения в случае турбулентных флуктуаций скорости функция $\xi(t)$ должна быть действительной; это свойство налагает более жесткие ограничения на вид функции $\xi(t)$. Для того чтобы функция $\xi(t)$ была действительной, должны выполняться условия $\omega_2 = -\omega_1 = -\omega$ и $\xi_2 = \xi_1^*$. Поэтому положим $\xi_1 = (\eta - i\zeta)/2$ и $\xi_2 = (\eta + i\zeta)/2$ и подставим эти выражения в формулу (4.55). Выполняя соответствующие алгебраические преобразования находим:

$$\xi(t) = \eta \cos \omega t + \zeta \sin \omega t. \quad (4.59)$$

Преобразуя автокорреляционную функцию действительного случайного процесса

$$B_{ii}(\tau) = \langle (\eta \cos \omega t + \zeta \sin \omega t) [\eta \cos \omega(t + \tau) + \zeta \sin \omega(t + \tau)] \rangle, \quad (4.60)$$

получим выражение

$$\begin{aligned} B_{ii}(\tau) = & \langle \eta^2 \rangle \cos \omega \tau (\cos^2 \omega t) + \langle \zeta^2 \rangle \cos \omega \tau (\sin^2 \omega t) - \\ & - \langle \eta^2 \rangle \sin \omega \tau (\sin \omega t \cos \omega t) + \langle \zeta^2 \rangle \sin \omega \tau (\sin \omega t \cos \omega t) + \\ & + \langle \eta \zeta \rangle \cos \omega \tau (\cos \omega t \sin \omega t + \sin \omega t \cos \omega t) + \\ & + \langle \eta \zeta \rangle \sin \omega \tau (\cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t), \end{aligned} \quad (4.61)$$

которое стационарно (не зависит от t) только тогда, когда $\langle \eta^2 \rangle = \langle \zeta^2 \rangle$ и $\langle \eta \zeta \rangle = 0$. При выполнении этих условий автокорреля-

ционная функция принимает вид

$$B_{ii}(\tau) = b \cos \omega \tau, \quad (4.62)$$

где

$$b = \langle \eta^2 \rangle = \langle \zeta^2 \rangle.$$

На следующем шаге построим более общий случайный процесс в виде суперпозиции N периодических колебаний с различными частотами:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^N \xi_k e^{i\omega_k t}. \quad (4.63)$$

В соответствии с результатами, полученными выше, процесс $\xi(t)$ является стационарным тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\langle \xi_1 \rangle = \langle \xi_2 \rangle = \dots = \langle \xi_N \rangle = 0 \quad (4.64)$$

и

$$\langle \xi_l \xi_k \rangle = 0, \quad l \neq k. \quad (4.65)$$

В этом случае

$$B_{ii}(\tau) = \sum_{k=1}^N \langle |\xi_k|^2 \rangle e^{i\omega_k \tau}, \quad (4.66)$$

где величины $\langle |\xi_k|^2 \rangle$ пропорциональны средней кинетической энергии отдельных гармонических колебаний. При $\tau = 0$ получаем соотношение

$$B_{ii}(0) = \sum_{k=1}^N \langle |\xi_k|^2 \rangle, \quad (4.67)$$

которое показывает, что в суперпозиции некоррелированных периодических колебаний средняя кинетическая энергия составного колебания равна сумме средних кинетических энергий его составляющих.

Для того чтобы рассматриваемый процесс был действительным, необходимо, чтобы число N было четным ($N = 2M$) и чтобы из слагаемых в сумме можно было составить M пар комплексно-сопряженных членов вида $[\xi_k e^{i\omega_k t}, \xi_k^* e^{-i\omega_k t}]$. При выполнении этих условий

$$\xi(t) = \sum_{j=1}^M (\eta_j \cos \omega_j t + \zeta_j \sin \omega_j t), \quad (4.68)$$

где

$$\langle \eta_j \zeta_k \rangle = 0 \text{ при всех } j \text{ и } k,$$

$$\langle \eta_j \eta_k \rangle = \langle \xi_j \xi_k \rangle = 0, \quad k \neq j, \quad (4.69)$$

$$\langle \eta_j^2 \rangle = \langle \xi_j^2 \rangle = b_j,$$

и

$$B_{ii}(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \cos \omega_j \tau, \quad (4.70)$$

если известно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle |\xi_k|^2 \rangle < \infty. \quad (4.71)$$

На рис. 4.6 представлена одна из реализаций стационарного действительного случайного процесса, полученного путем суперпозиции пяти синусоид, т. е.

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^5 (\eta_k \cos \omega_k t + \xi_k \sin \omega_k t). \quad (4.72)$$

Для наглядности частоты ω_k выбраны равными $k\pi/2$, а амплитуды η_k и ξ_k характеризуются нормальными распределениями вероятностей с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_\eta = 2$ и $\sigma_\xi = 1$ соответственно.

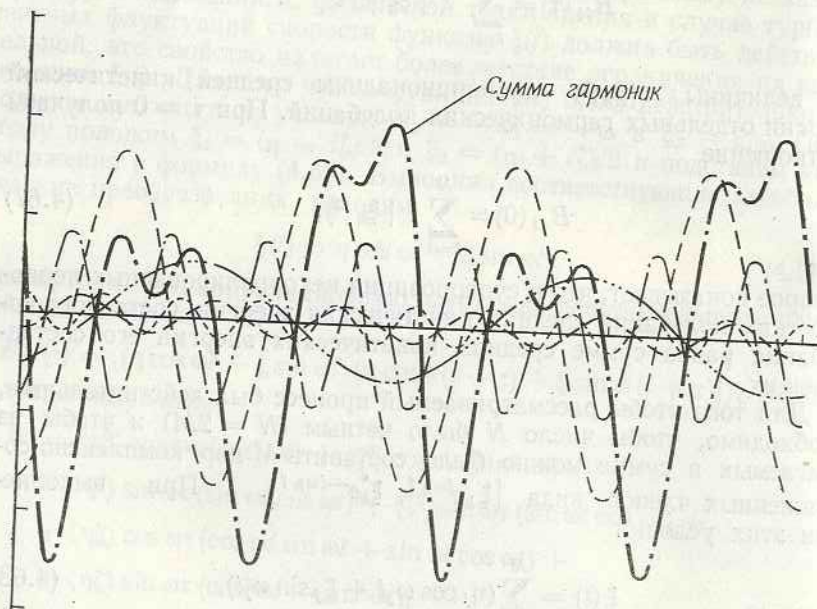


Рис. 4.6. Реализация стационарного действительного случайного процесса, образующегося при суперпозиции пяти синусоид со случайными амплитудами.

4.2.4. Спектральное разложение стационарного случайного процесса

Выше было установлено, что детерминированную периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье и она имеет дискретный спектр. Для непериодической функции использовалось разложение в интеграл Фурье и рассматривался непрерывный диапазон частот от $-\infty$ до $+\infty$. Такое разложение позволило получить непрерывный спектр. Однако в интеграл Фурье разлагаются лишь те функции, которые достаточно быстро стремятся к нулю на бесконечности и не имеют физического смысла в гидродинамике. Тем не менее это разложение иллюстрирует, как можно осуществить переход от дискретных частот к непрерывному спектру. Затем был синтезирован стационарный случайный процесс, который по аналогии с рядом Фурье представлял собой сумму синусоид, коэффициенты которых были случайными переменными. Такого рода случайный процесс согласуется с ожидаемым (на основе измерений скорости) поведением турбулентных течений с тем лишь исключением, что характеристики турбулентности не являются периодическими функциями. Поэтому мы ввели случайный непериодический процесс, для описания которого требуется использовать интеграл Фурье. Такие непериодические функции в принципе не стремятся к нулю на бесконечности и для них, строго говоря, разложение в интеграл Фурье невозможно. Тем не менее можно показать, что благодаря случайной природе этих функций для любого стационарного случайного процесса или однородного случайного поля может быть построено разложение в интеграл Фурье, имеющее физическую интерпретацию.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим действительный стационарный случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_k \cos \omega_k t + \xi_k \sin \omega_k t). \quad (4.73)$$

Сначала представим графически первые слагаемые в правой части этого выражения (т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \cos \omega_k t$), для чего отложим по оси

ординат величины η_k одной реализации в функции абсциссы ω_k , где без потери общности переменная ω_k полагается равной $\omega_k = 2\pi k/T$, а T — период синусоиды. На рис. 4.7 показаны результаты такого построения для трех последовательных значений периода T . Видно, что с увеличением периода T абсциссы ω_k сближаются, а плотность распределения дискретных значений ординат η_k при этом увеличивается. Рассмотрим сначала интервал $[\omega_a, \omega_b]$. Построение, проведенное на рис. 4.7, аналогично графиче-

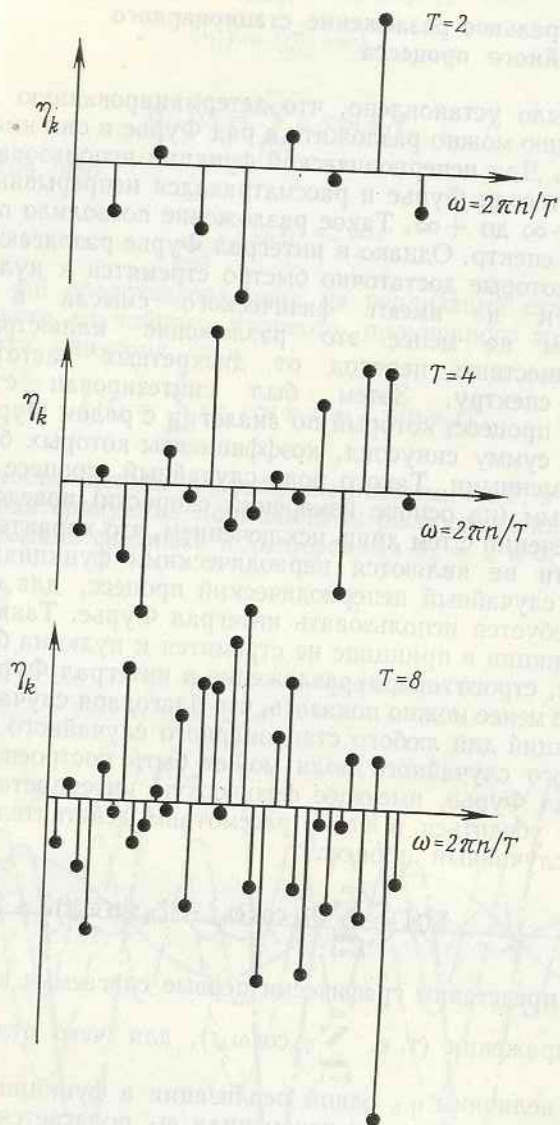


Рис. 4.7. Случайные коэффициенты синусов, образующих стационарный случайный процесс.

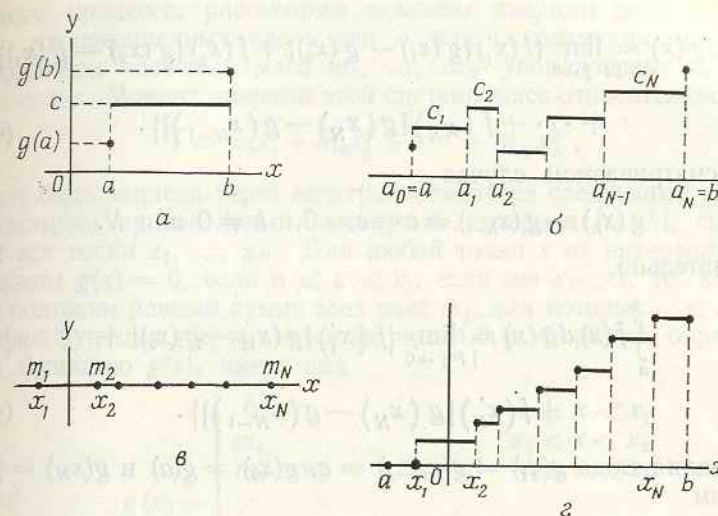


Рис. 4.8. Разрывные функции $g(x)$ в интеграле Стильеса.

ческому представлению коэффициентов на рис. 4.5, за исключением того, что значения ординат η_k не уменьшаются с ростом T , и линия, соединяющая точки, не аппроксимируется гладкой кривой, подобной пунктирной линии на рис. 4.5. Очевидно, что рассматриваемый процесс не сходится к обычному интегралу Римана, как это было в случае интеграла Фурье, и, следовательно, прежде чем идти дальше, необходимо ввести интеграл Стильеса и обсудить его свойства.

Интеграл Стильеса описывается выражением [3]

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N f(x'_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})], \quad (4.74)$$

где f и g — функции, определенные в замкнутом интервале $[a, b]$. Интервал $[a, b]$ разбивается на подынтервалы P совокупностью точек $(x_0, x_1, \dots, x_N)$, и затем рассматривается множество точек $(x'_1, \dots, x'_N)$, по одной внутри каждого подынтервала этого разбиения. Мера разбиения $|P|$ характеризуется максимальным значением разностей $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_N - x_{N-1}$. Важной особенностью интеграла Стильеса является то, что функция $g(x)$ может быть разрывной.

В качестве примера рассмотрим функцию $g(x)$, изображенную на рис. 4.8, а. Для нее равенство (4.74) преобразуется к виду

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \{f(x'_1)[g(x_1) - g(x_0)] + f(x'_2)[g(x_2) - g(x_1)] + \dots + f(x'_N)[g(x_N) - g(x_{N-1})]\}. \quad (4.75)$$

В рассматриваемом случае

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) = c - c = 0, \quad k \neq 0 \text{ или } N.$$

Следовательно,

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \{f(x'_1)[g(x_1) - g(x_0)] + \dots + f(x'_N)[g(x_N) - g(x_{N-1})]\}. \quad (4.76)$$

Подставляя сюда $g(x_1) = g(x_{N-1}) = c$, $g(x_0) = g(a)$ и $g(x_N) = g(b)$, получим

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(a)[c - g(a)] + f(b)[g(b) - c], \quad (4.77)$$

где

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} f(x'_0) = f(a)$$

и

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} f(x'_N) = f(b),$$

так как $f(x)$ — непрерывная функция.

В качестве второго примера рассмотрим функцию, изображенную на рис. 4.8, б. Интервал $[a, b]$ разбивается на N подынтервалов точками $(a_0, a_1, \dots, a_N)$ и функция $g(x)$ имеет значение c_i внутри i -го подынтервала. В точках $a_0, \dots, a_N$ функция $g(x)$ может принимать значения, отличающиеся от значений $c_1, \dots, c_N$. Если функция f непрерывна в интервале $[a, b]$, то интеграл Стильеса описывается выражением

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(a)[c_1 - g(a)] + f(a_1)[c_2 - c_1] + \dots + f(a_{N-1})[c_N - c_{N-1}] + f(b)[g(b) - c_N]. \quad (4.78)$$

Отметим, что значения функции g в точках $a_1, \dots, a_{N-1}$ (внутренних точках интервала, в которых эта функция терпит разрывы) не входят в данное выражение.

В качестве последнего примера, который оказывается полезным при исследовании спектрального разложения стационарного слу-

чайного процесса, рассмотрим моменты инерции ряда точечных масс, распределенных вдоль оси x , как показано на рис. 4.8, в. Координаты точечных масс $m_1, \dots, m_N$ упорядочены: $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Момент инерции этой системы масс относительно оси y ,

$$I = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2 + \dots + m_N x_N^2, \quad (4.79)$$

может быть записан через интеграл Стильеса следующим образом. Рассмотрим произвольный замкнутый интервал $[a, b]$, содержащий все точки $x_1, \dots, x_N$. Для любой точки x из интервала $[a, b]$ положим $g(x) = 0$, если $a \leq x \leq x_1$; если же $x_1 < x$, то значение $g(x)$ положим равным сумме всех масс m_i , для которых $a \leq x_i \leq x$. График функции $g(x)$ приведен на рис. 4.8, г. Формула, определяющая функцию $g(x)$, имеет вид

$$g(x) = \begin{cases} 0 & a \leq x < x_1 \\ m_1 & x_1 \leq x < x_2 \\ m_1 + m_2 & x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ m_1 + m_2 + \dots + m_N & x_N \leq x \leq b \end{cases} \quad (4.80)$$

Согласно выражению (4.74), имеем

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x_1)m_1 + \dots + f(x_N)m_N; \quad (4.81)$$

в частности, если $f(x) = x^2$, то

$$\int_a^b f(x) dg(x) = m_1 x_1^2 + \dots + m_N x_N^2 = I. \quad (4.82)$$

Теперь вернемся к графическому представлению величин η_k в зависимости от ω_k (рис. 4.7). Отметим, что этот график до некоторой степени подобен распределению точечных масс вдоль оси x , которое рассматривалось в третьем примере. В самом деле, по аналогии с построением функции $g(x)$ можно построить следующую функцию:

$$Z_1(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega_a \leq \omega < \omega_1 \\ \eta_1 & \omega_1 \leq \omega < \omega_2 \\ \eta_1 + \eta_2 & \omega_2 \leq \omega < \omega_3 \\ \vdots & \vdots \\ \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{N-1} & \omega_{N-1} \leq \omega < \omega_N \\ \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{N-1} + \eta_N & \omega_N \leq \omega \leq \omega_b \end{cases} \quad (4.83)$$

График функции $Z_1(\omega)$ приведен на рис. 4.9. Отметим, что $Z_1(\omega)$ — случайная переменная, которая остается конечной даже при $\omega_a \rightarrow -\infty$ и $\omega_b \rightarrow \infty$, так как положительные слагаемые в сумме, определяющей $Z_1(\omega)$, уравниваются отрицательными слагаемыми.

Подставляя функцию (4.83) в выражение (4.74), получаем

$$\int_{\omega_a}^{\omega_b} f(\omega) dZ_1(\omega) = \lim_{\max(\omega_k - \omega_{k-1}) \rightarrow 0} \{f(\omega'_1)[Z_1(\omega_1) - Z_1(\omega_0)] + \\ + f(\omega'_2)[Z_1(\omega_2) - Z_1(\omega_1)] + \dots + f(\omega'_N)[Z_1(\omega_N) - Z_1(\omega_{N-1})] + \\ + f(\omega'_{N+1})[Z_1(\omega_{N+1}) - Z_1(\omega_N)]\}. \quad (4.84)$$

Полагая $f(x'_k) = \cos \omega_k t$ и переходя к пределу, имеем

$$\int_{\omega_a}^{\omega_b} \cos \omega t dZ_1(\omega) = \sum_{k=1}^N [Z(\omega_k) - Z(\omega_{k-1})] \cos \omega_k t = \sum_{k=1}^N \eta_k \cos \omega_k t. \quad (4.85)$$

Следовательно, функцию $\xi(t)$ в интервале $[\omega_a, \omega_b]$ можно выразить через интеграл Стильеса в виде

$$\xi(t) = \int_{\omega_a}^{\omega_b} \cos \omega t dZ_1(\omega) + \int_{\omega_a}^{\omega_b} \sin \omega t dZ_2(\omega), \quad (4.86)$$

где $Z_2(\omega)$ определяется аналогично функции $Z_1(\omega)$ посредством замены переменных η_k на ξ_k .

Мы рассматривали действительный процесс $\xi(t)$ только в целях

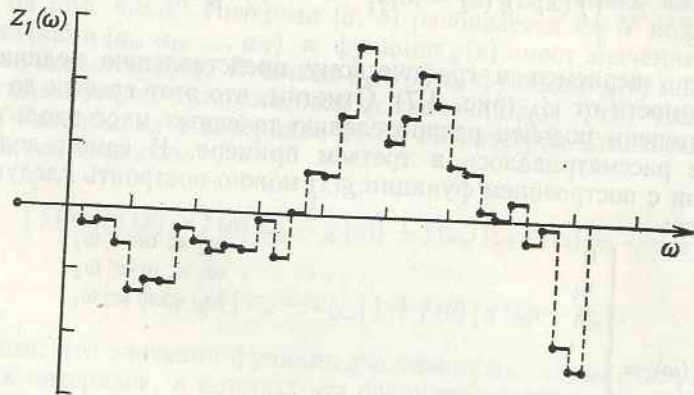


Рис. 4.9. Случайная переменная $Z_1(\omega)$.

иллюстрации. При рассмотрении комплексных процессов используются те же соображения. В этом случае процесс $\xi(t)$ записывается в виде

$$\xi(t) = \int_{\omega_a}^{\omega_b} e^{i\omega t} dZ(\omega), \quad (4.87)$$

где интегралом является интеграл Фурье—Стилтьеса, а функция $Z(\omega)$ определяется соотношениями

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega_0 \leq \omega < \omega_1 \\ \xi_1 & \omega_1 \leq \omega < \omega_2 \\ \xi_1 + \xi_2 & \omega_2 \leq \omega < \omega_3 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N & \omega_N \leq \omega \leq \omega_{N+1} \end{cases} \quad (4.88)$$

В проведенном выше анализе частота принимала дискретные значения. Так как позднее функция $\xi(t)$ будет характеризовать случайные флуктуации скорости в турбулентных течениях, необходимо учесть все возможные частоты, так что переменная ω становится непрерывной. Графики, приведенные на рис. 4.7, показывают, что при $T \rightarrow \infty$ имеет место $\omega_{k+1} \rightarrow \omega_k$, и число точек η_k , содержащихся в интервале $\Delta\omega$, становится бесконечным, а соответствующая переменная — непрерывной. При этом не нарушаются условия существования интеграла Стильеса. Кроме того, можно рассмотреть значения $\omega_a \rightarrow -\infty$ и $\omega_b \rightarrow +\infty$; тогда выражение (4.87) переходит в несобственный интеграл Фурье—Стилтьеса вида

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega). \quad (4.89)$$

В выражении (4.89) стационарный случайный процесс представлен суммой синусоид с всевозможными частотами и случайными амплитудами. Следовательно, функция $\xi(t)$ должна описывать характеристики флуктуаций скорости, измеренных в некоторой точке турбулентного течения.

Вполне очевидно, что $Z(\omega) = Z[-\infty, \omega]$ является комплексной случайной функцией переменной ω ; она называется случайной функцией точки. Функция $Z(\omega)$ характеризуется нулевым средним, т. е.

$$\langle Z(\omega) \rangle = \langle \xi_1 \rangle + \langle \xi_2 \rangle + \langle \xi_3 \rangle + \dots = 0, \quad (4.90)$$

и свойством

$$\langle [Z(\omega_n) - Z(\omega_m)][Z^*(\omega_l) - Z^*(\omega_k)] \rangle = 0, \quad (4.91)$$

где

$$\omega_m < \omega_n \leq \omega_k < \omega_l. \quad (4.92)$$

Это свойство следует из соотношений (4.65), согласно которым $\langle \xi_n \xi_l^* \rangle = 0$ при $k \neq l$, и становится очевидным, если равенство (4.91) записывается в виде суммы

$$\begin{aligned} & \langle [\xi_n + \xi_{n-1} + \dots + \xi_m + \dots + \xi_1 - \xi_m - \dots - \xi_1] \times \\ & \times [\xi_l^* + \dots + \xi_k^* + \dots + \xi_n^* + \dots + \xi_1^* - \xi_k^* - \dots - \xi_1^*] \rangle = \\ & = \langle [\xi_n + \dots + \xi_{m+1}] [\xi_l^* + \dots + \xi_{k+1}^*] \rangle = \\ & = \langle \xi_n \xi_l^* \rangle + \dots + \langle \xi_{m+1} \xi_{k+1}^* \rangle = 0, \end{aligned} \quad (4.93)$$

в которой в любом из корреляционных слагаемых нет одинаковых индексов вследствие условия (4.92). Более часто используется дифференциальная форма соотношения (4.91):

$$\langle dZ(\omega) dZ^*(\omega_1) \rangle = 0, \quad \omega \neq \omega_1. \quad (4.94)$$

Представление $\xi(t)$ в виде (4.89) называется спектральным разложением стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Так как функция $\xi(t)$ обладает свойствами, позволяющими моделировать зависящие от времени флуктуации скорости в турбулентных течениях, мы изменим обозначения и будем писать $u(t)$ вместо $\xi(t)$ при рассмотрении флуктуаций скорости. Отметим тем не менее, что в качестве $\xi(t)$ можно было рассматривать температуру, давление или любую другую случайную характеристику турбулентного течения.

4.2.5. Автокорреляционная функция

Автокорреляционная функция комплексного случайного процесса описывается формулой

$$B_{ii}(\tau) = \langle u_i(t + \tau) u_i^*(t) \rangle. \quad (4.95)$$

Подставляя значения $u_i(t + \tau)$ и $u_i^*(t)$, соответствующие выражению (4.73), и используя условие (4.94), получим

$$B_{ii}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF(\omega), \quad (4.96)$$

где

$$dF(\omega) = \langle |dZ(\omega)|^2 \rangle. \quad (4.97)$$

Для специального случая, когда функция $B_{ii}(\tau)$ по абсолютной величине убывает столь быстро, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B_{ii}(\tau)| d\tau < \infty, \quad (4.98)$$

показано [4], что выражение (4.96) можно записать в виде

$$B_{ii}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\omega) d\omega. \quad (4.99)$$

Функция $f(\omega)$ называется спектральной плотностью процесса $u_i(t)$. Функция $F(\omega)$, называемая спектральной функцией распределения, связана с функцией $f(\omega)$ соотношением

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(\omega) d\omega, \quad (4.100)$$

и, следовательно,

$$f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}, \quad (4.101)$$

так как $F(\omega)$ дифференцируема почти всюду.

Результаты измерений величины $B_{ii}(\tau)$ в турбулентных течениях показывают, что условие (4.98) выполняется и, следовательно, спектральную плотность можно использовать при изучении многих турбулентных течений. Применение корреляционных функций особенно привлекательно тем, что они позволяют обходиться без интегралов Стильтьеса. В противоположность этому в общем случае $Z(\omega)$ не является дифференцируемой функцией и ее нельзя представить в виде, аналогичном соотношению (4.100).

Полезно выяснить физический смысл спектральной плотности $f(\omega)$. При $\tau = 0$ функция $B_{ii}(\tau)$ равна $\langle u_i^2(t) \rangle$, т. е. пропорциональна средней кинетической энергии турбулентности. Из соотношения

$$B_{ii}(0) = \langle u_i^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega \quad (4.102)$$

следует, что функция $f(\omega)$ характеризует относительную величину кинетической энергии, соответствующей данной частоте ω . Поэтому функция $f(\omega)$ называется спектральной плотностью энергии и будет обозначаться символом $\varepsilon_{ii}(\omega)$.

Как $\varepsilon_{ii}(\omega)$, так и $B_{ii}(\tau)$ могут быть измерены в эксперименте; первая функция измеряется с помощью спектроанализатора (т. е. фильтра, который пропускает гармонические колебания в заданной полосе частот и отсекает колебания, имеющие другие частоты), а вторая функция — с помощью термоанемометра и соответствующей электронной аппаратуры. Если измеряется одна величина, например $\varepsilon_{ii}(\omega)$, то функция $B_{ii}(\tau)$ определяется из равенства (4.99); если же измеряется $B_{ii}(\tau)$, то функцию $\varepsilon_{ii}(\omega)$ можно определить, используя обратное преобразование Фурье:

$$\varepsilon_{ii}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} B_{ii}(\tau) d\tau. \quad (4.103)$$

В случае действительного процесса спектральная плотность $\varepsilon_{ii}(\omega)$ является четной функцией переменной ω и, следовательно,

$$B_{ii}(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \omega\tau E_{ii}(\omega) d\omega, \quad (4.104)$$

где

Кроме того,

$$E_{ii}(\omega) = 2\varepsilon_{ii}(\omega).$$

$$E_{ii}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega\tau B_{ii}(\tau) d\tau. \quad (4.105)$$

Функция $E_{ii}(\omega)$ отличается от функции $\varepsilon_{ii}(\omega)$ лишь множителем 2 и тем, что она определена на интервале $[0, \infty]$, а не $(-\infty, \infty)$. Следует помнить, что формулами (4.99) — (4.104) можно пользоваться, если выполняется условие (4.98).

Далее, если функция $B_{kj}(\tau) = \langle u_k(t)u_j(t+\tau) \rangle$ стремится к нулю столь быстро, что

$$\int_0^{\infty} |B_{kj}(\tau)| d\tau < \infty, \quad (4.106)$$

то, как можно показать,

$$B_{kj}(\tau) = \int_0^{\infty} E_{kj}(\omega) \cos \omega\tau d\omega \quad (4.107)$$

и

$$E_{kj}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{kj}(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \quad (4.108)$$

Функция $E_{kj}(\omega)$ при $k \neq j$ называется перекрестной спектральной плотностью процессов $u_k(t)$ и $u_j(t)$.

4.3. ЧАСТОТНЫЕ СПЕКТРЫ

Частотные спектры стационарных процессов можно определить, измеряя корреляционную функцию $B_{ij}(\tau)$ и используя выражение (4.105) или (4.108); кроме того, их можно измерить непосредственно с помощью спектроанализатора. Если сигнал с датчика, измеряющего, например, турбулентные флуктуации скорости u_1 , подается непосредственно на вход измерителя среднеквадратической величи-

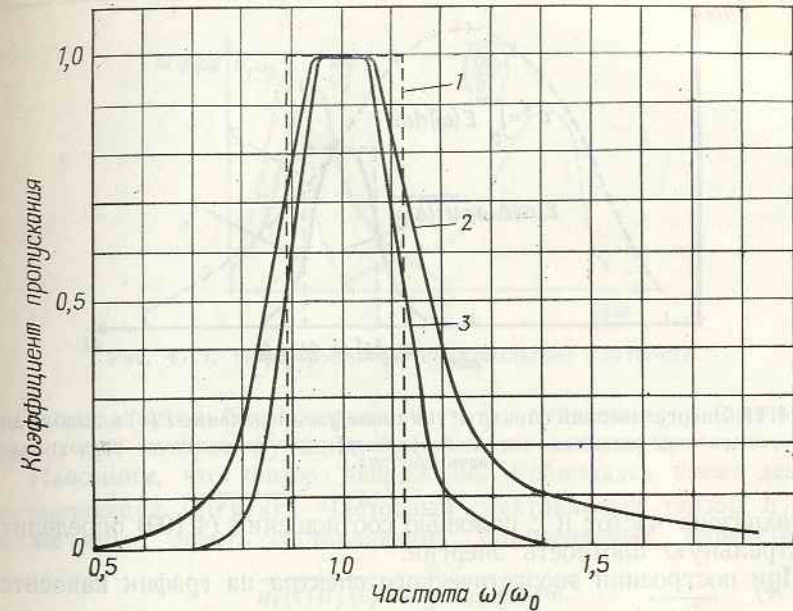


Рис. 4.10. Типичная характеристика фильтра.

1 — идеальный фильтр; 2 — реальный фильтр; 3 — квадратичная характеристика реального фильтра.

ны, то выходной сигнал пропорционален средней кинетической энергии турбулентности $\overline{u_i^2}$ и учитывает вклад вихрей всех возможных частот. Однако если сигнал сначала пропустить через спектроанализатор (систему фильтров с узкой полосой пропускания $\Delta\omega$), то выходной сигнал измерителя среднеквадратической величины будет пропорционален кинетической энергии турбулентности (т. е. вихрей) из этой узкой полосы. В идеальном случае спектральная плотность энергии в центре этой полосы определяется по формуле

$$E_{ii}(\omega) = \overline{u_i^2(\Delta\omega)} / \Delta\omega, \quad (4.109)$$

где $\overline{u_i^2(\Delta\omega)}$ — выходной сигнал измерителя среднеквадратической величины. Здесь предполагается, что фильтр является идеальным (рис. 4.10). Характеристика реального фильтра также приведена на рис. 4.10.

Следовательно, измерения спектральной плотности кинетической энергии турбулентности сопровождаются некоторыми искажениями. Тем не менее, используя высококачественные фильтры, можно с хорошей точностью измерить вклады, соответствующие различным интервалам частот, по выбранным значениям ω из широко-

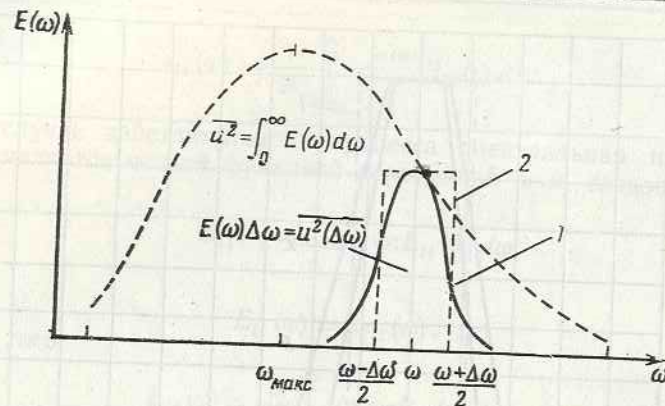


Рис. 4.11. Энергетический спектр и типичное распределение $E(\omega)$ в полосе $\Delta\omega$. 1 — характеристика реального полосового фильтра; 2 — эквивалентная прямоугольная характеристика.

го диапазона частот и с помощью соотношения (4.109) определить спектральную плотность энергии.

При построении энергетического спектра на график наносится величина $\overline{u_1^2}(\Delta\omega)$ в зависимости от частоты для каждой исследуемой полосы частот. Типичная кривая энергетического спектра приведена на рис. 4.11. Зависящая от частоты спектральная плотность энергии $E_{11}(\omega)$, изображаемая этой кривой, называется также одномерным энергетическим спектром, спектром мощности или просто спектром. Очевидно, что

$$\overline{u_1^2} = \int_0^\infty E_{11}(\omega) d\omega. \quad (4.110)$$

Аналогичным образом, величины $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$ связаны с функциями $E_{22}(\omega)$ и $E_{33}(\omega)$ соответственно.

В общем случае турбулентные пульсации характеризуются широким спектром частот. На спектральной кривой могут существовать сглаженные пики, однако резкие пики могут возникать лишь при переходе ламинарного течения в турбулентное.

Часто рассматривается нормированная спектральная плотность энергии

$$\phi_{ii}(\omega) = E_{ii}(\omega) / \overline{u_i^2}, \quad (4.111)$$

для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_{ii}(\omega) d\omega = 1. \quad (4.112)$$

Нормированная плотность имеет размерность времени. Часто так-

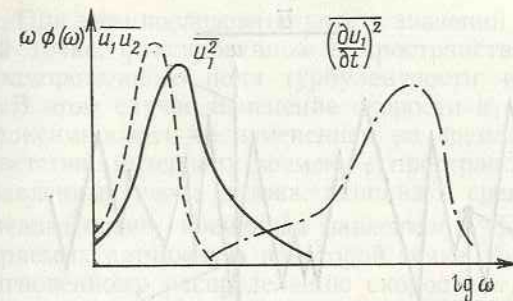


Рис. 4.12. Нормированные спектральные плотности.

же используется безразмерная частота, отнесенная к значению $\omega_{\text{макс}}$, при котором функция $\phi_{ii}(\omega)$ имеет максимум.

Напомним, что тензор напряжений Рейнольдса имеет девять составляющих $\overline{u_i(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})}$. Частотный спектральный тензор $E_{ij}(\omega)$ также имеет девять составляющих, определяемых равенствами

$$\overline{u_i(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})} = \int_0^\infty E_{ij}(\omega) d\omega. \quad (4.113)$$

Энергетические спектры, соответствующие взаимным корреляциям, называются взаимными спектрами. В случае взаимного спектра значение интеграла от нормированной спектральной плотности обязательно равно 1.

Типичные графики нормированных спектральных плотностей для величин $\overline{u_1^2}$ и $\overline{u_1 u_2}$ приведены на рис. 4.12. Здесь же приведен график спектральной плотности для величины $(\partial u_1 / \partial t)^2$, физический смысл которой будет рассматриваться ниже.

При графическом изображении спектров мощности обычно строится зависимость величины $\omega\phi(\omega)$ от $\ln\omega$. Частотный множитель позволяет выявить высокочастотные эффекты, а также вычислить с помощью интегрирования площадь под кривой, соответствующей величине $\overline{u^2}$, так как

$$\omega\phi(\omega) d \ln \omega = \phi(\omega) d\omega. \quad (4.114)$$

4.4. СПЕКТРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ

4.4.1. О гипотезе Тейлора

Спектры в пространстве волновых чисел позволяют рассматривать распределение энергии не по частотам вихрей, а по их размерам. Однако такие спектры нельзя измерить непосредственно, по-

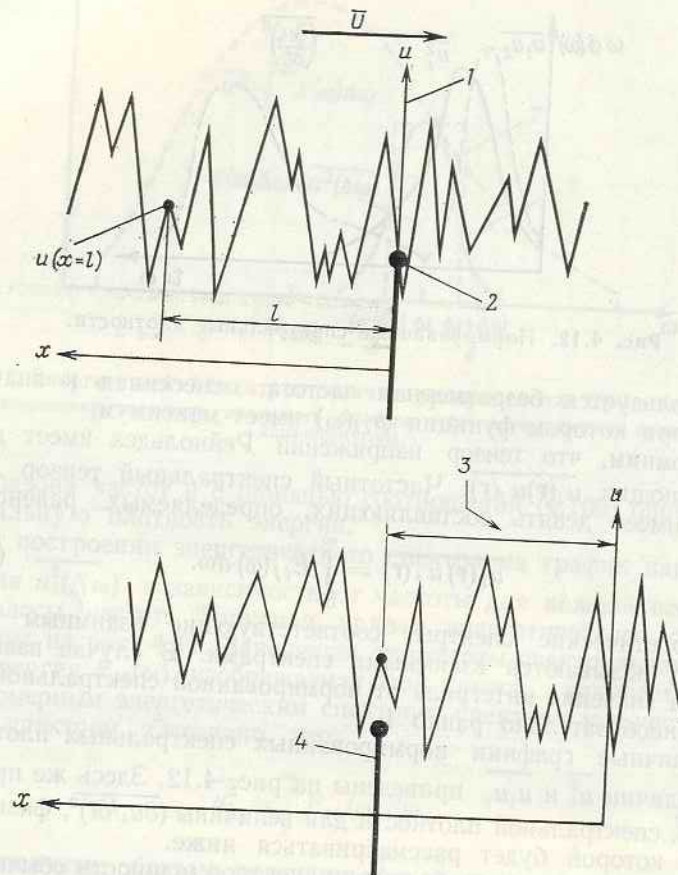


Рис. 4.13. Иллюстрация гипотезы Тейлора.
1 — система координат, фиксированная в замороженном турбулентном поле; 2 — неподвижный датчик измеряет значение $u(x=0)$ в момент времени t ; 3 — при движении потока с постоянной средней скоростью $\bar{U}$ поле турбулентности перемещается мимо датчика за время τ на расстояние $l = \bar{U}\tau$; 4 — неподвижный датчик измеряет $u(x=l)$ в момент времени $t + \tau$.

добно частотным спектрам, с помощью обычного спектроанализатора. Для их определения используются косвенные методы, базирующиеся либо на преобразовании Фурье пространственных корреляционных функций, либо на применении гипотезы Тейлора к частотным спектрам.

В последнем случае предполагается, что все поле течения перемещается с постоянной скоростью $\bar{U}$, например, вдоль оси x_i и что скорость $\bar{U}$ велика по сравнению с турбулентными флуктуациями

скорости u_i . При этом последовательность значений u_i , измеряемых в некоторой точке, фиксированной в пространстве, определяется переносом замороженного поля турбулентности через эту точку (рис. 4.13). В этом случае изменение скорости u_i в пространстве можно аппроксимировать ее изменением во времени, если поставить в соответствие интервалу времени τ пространственный интервал l , направленный вдоль потока, используя среднюю скорость: $l = \bar{U}\tau$. Следовательно, временная зависимость флуктуаций скорости, измеряемых датчиком в некоторой точке, будет почти тождественна мгновенному распределению скорости u_i вдоль оси x_i , проходящей через эту точку, и корреляция $u_i(t)u_i(t + \tau)$, осредненная по времени t , должна быть почти тождественной моменту второго порядка $u_i(x_i)u_i(x_i + l_i)$, осредненной по координате x_i . Таким образом, имеем

$$B_{i,i}(l_i) = B_{ii}(\tau). \quad (4.115)$$

Используя соотношение (4.104), в котором круговая частота ω связана с волновым числом соотношением $\kappa_i = \omega/\bar{U}$, получаем

$$B_{i,i}(l_i) = B_{ii}(\tau) = \bar{U} \int_0^\infty E_{ii}(\omega) \cos(\kappa_i l_i) d\kappa_i. \quad (4.116)$$

Вводя функцию $E_{i,i}(\kappa) = \bar{U}E_{ii}(\omega)$, приходим к равенству

$$B_{i,i}(l_i) = \int_0^\infty E_{i,i}(\kappa) \cos(\kappa_i l_i) d\kappa_i \quad (4.117)$$

и аналогично

$$B_{i,i}(l_i) = \int_0^\infty E_{i,i}(\kappa) e^{i\kappa_i l_i} d\kappa_i. \quad (4.118)$$

В приведенных выше соотношениях единицы измерения переменных ω и κ должны быть согласованы, т. е. если размерность $\omega \sim$ радиан/время, то размерность $\kappa \sim$ радиан/длина. Если частота n определяется как число колебаний за единицу времени, то волновое число k определяется как число колебаний на единице длины. Переменные κ и k связаны равенством $\kappa = 2\pi k$. Отметим, что

$$\bar{U} = \omega/k = 2\pi n/\kappa = n/k \text{ и } E_{i,i}(k) = \bar{U}E_{ii}(n)/2\pi.$$

Сформулированная выше гипотеза Тейлора широко используется в исследованиях не только равномерных турбулентных течений, но и течений со сдвигом. Экспериментальные и теоретические данные показывают, что гипотеза Тейлора выполняется не только

в слабо неоднородных течениях, для которых она была предложена Тейлором, но и в значительных областях неоднородных течений. Согласно измерениям, эта гипотеза выполняется приблизительно на 90—95 % толщины пограничного слоя, в большей части свободных течений и в ядре потока для течений в канале, не слишком близко от стенки [5].

Наиболее часто измеряются следующие одномерные моменты второго порядка: продольная корреляционная функция $B_{ll}(l)$ и поперечная корреляционная функция $B_{nn}(l)$. Соответствующие спектральные функции $E_{ll}(\kappa)$ и $E_{nn}(\kappa)$ описываются интегральными выражениями

$$B_{ll}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{ll}(\kappa) e^{i\kappa l} d\kappa \quad (4.119)$$

и

$$B_{nn}(l) = \int_{-\infty}^{\infty} E_{nn}(\kappa) e^{i\kappa l} d\kappa \quad (4.120)$$

соответственно. Они называются одномерным продольным спектром и одномерным поперечным спектром соответственно и в случае действительных функций могут быть записаны в виде

$$E_{ll}(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{ll}(l) \cos \kappa l dl \quad (4.121)$$

и

$$E_{nn}(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} B_{nn}(l) \cos \kappa l dl \quad (4.122)$$

соответственно.

Тем не менее одномерные спектры не совсем удобны для описания турбулентности, так как они не дают точного представления о распределении энергии по масштабам или размерам вихрей. Причиной этого является так называемый «маскирующий эффект», механизм которого разъясняется на рис. 4.14. Если флуктуации скорости вдоль оси x_1 измеряются датчиками, расположенными в точках A и B , то движущийся вихрь размера R , где $\kappa = \pi/R$, с осью, перпендикулярной направлению x_1 , порождает такое же возмущение, как и вихрь размера R_1 , ось которого образует некоторый угол с направлением x_1 , несмотря на то что последний вихрь имеет меньший размер. Отметим, что меньшим вихрям соответствуют большие волновые числа, т. е. $\kappa_1 > \kappa$. В рассматриваемом примере оба возмущения приписываются воздействию вихрей с волновым числом κ . Следовательно, одномерный спектр, измеренный в трехмерном турбулентном потоке (напомним, что все турбулентные процессы являются трехмерными) при некотором волновом числе κ ,

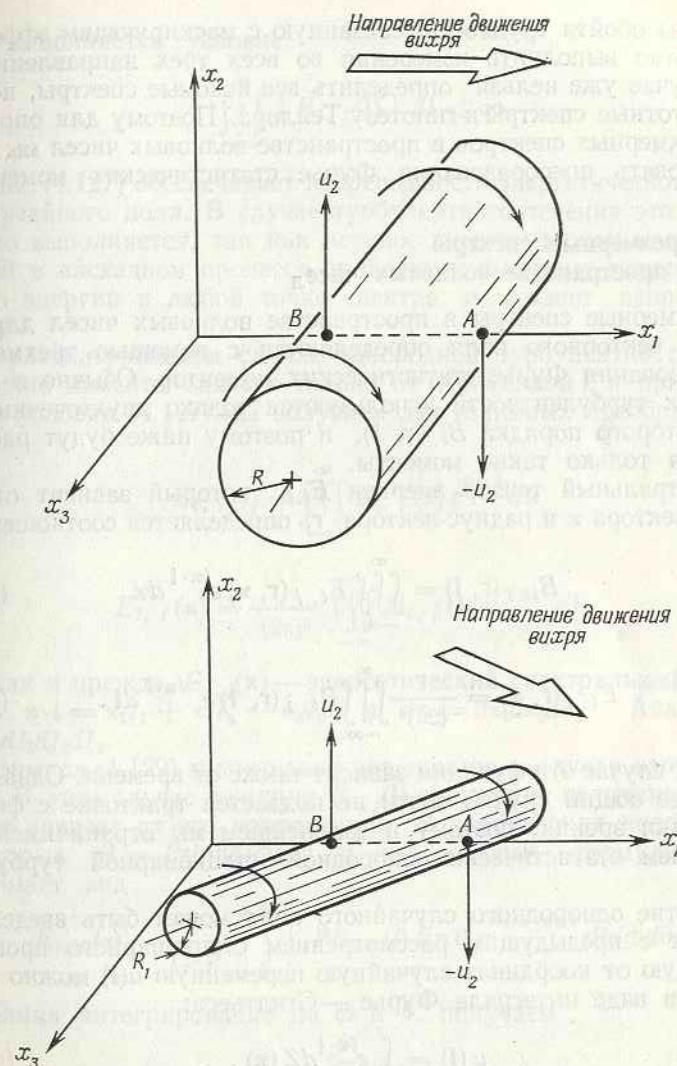


Рис. 4.14. Механизм маскирующего эффекта.

может порождаться вихрями с волновыми числами, превышающими κ . По этой причине измеренные одномерные спектры в общем случае при $\kappa = 0$ имеют конечное значение, пропорциональное интегральному масштабу. Это конечное значение энергии при $\kappa = 0$ порождается пульсациями с более высокими волновыми числами и не поддается анализу в случае одномерных спектров.

Чтобы обойти трудность, связанную с маскирующим эффектом, необходимо выполнить измерения во всех трех направлениях; в этом случае уже нельзя определить все искомые спектры, используя частотные спектры и гипотезу Тейлора. Поэтому для определения трехмерных спектров в пространстве волновых чисел мы будем использовать преобразования Фурье статистических моментов.

4.4.2. Трехмерные спектры в пространстве волновых чисел

Трехмерные спектры в пространстве волновых чисел для случайного векторного поля определяются с помощью трехмерного преобразования Фурье статистических моментов. Обычно в исследованиях турбулентности используются только двухточечные моменты второго порядка $B_{i,j}(\mathbf{r}, l)$, и поэтому ниже будут рассматриваться только такие моменты.

Спектральный тензор энергии $E_{i,j}$, который зависит от волнового вектора $\mathbf{x}$ и радиус-вектора $\mathbf{r}$, определяется соотношениями

$$B_{i,j}(\mathbf{r}, l) = \iiint_{-\infty}^{\infty} E_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}} d\mathbf{x} \quad (4.123)$$

и

$$E_{i,j}(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} B_{i,j}(\mathbf{r}, l) e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}} dl. \quad (4.124)$$

В общем случае эти функции зависят также от времени. Однако такой более общий случай почти не поддается трактовке с физической точки зрения; поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением статистически однородной стационарной турбулентности.

Понятие однородного случайного поля может быть введено по аналогии с предыдущим рассмотрением стационарного процесса. Зависящую от координат случайную переменную $u(l)$ можно представить в виде интеграла Фурье — Стильеса:

$$u(l) = \int e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}} dZ(\mathbf{x}). \quad (4.125)$$

Гармонические колебания $e^{i\omega t}$ в выражении (4.89) заменяются плоскими волнами $e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}}$, а случайные амплитудные функции $dZ(\omega) = [Z(\omega_k) - Z(\omega_{k-1})]$ — величинами $dZ(\mathbf{x}) = [Z(\mathbf{x}_k) - Z(\mathbf{x}_{k-1})]$.

Как и в разд. 4.1.5, выражение (4.125) может быть записано в виде

$$B_{i,j}(l) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}} E_{i,j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.126)$$

если выполняется условие

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} |B_{i,j}(l)| dl < \infty. \quad (4.127)$$

Условие (4.127) обеспечивает непрерывность энергетического спектра случайного поля. В случае турбулентного течения это условие обычно выполняется, так как перенос энергии между масштабами вихрей в каскадном процессе приводит к быстрому перераспределению энергии в любой точке спектра и создает непрерывный спектр.

В рассматриваемом случае однородной турбулентности статистические моменты зависят только от переменной l , и при выполнении условия (4.127) мы получаем два взаимных преобразования Фурье:

$$B_{i,j}(l) = \iiint_{-\infty}^{\infty} E_{i,j}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}} d\mathbf{x} \quad (4.128)$$

и

$$E_{i,j}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} B_{i,j}(l) e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}} dl, \quad (4.129)$$

где, как и прежде, $E_{i,j}(\mathbf{x})$ — энергетический спектральный тензор. Здесь $\mathbf{x} \cdot \mathbf{l} = x_1 l_1 + x_2 l_2 + x_3 l_3$ и $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3$. Аналогично, $dl = dl_1 dl_2 dl_3$.

Формула (4.129) значительно упрощается в случае изотропного поля. В этом случае функции $B_{i,j}(l)$ зависят от величины вектора l и не зависят от его направления. В сферических координатах, в которых $dl = l^2 \sin \theta dl d\phi d\theta$ и $\mathbf{x} \cdot \mathbf{l} = xl \cos \theta$, формула (4.129) принимает вид

$$E_{i,i}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi l^2 B_{i,i}(l) \sin \theta e^{-ixl \cos \theta} dl d\phi d\theta. \quad (4.130)$$

Выполняя интегрирование по ϕ и θ , получаем

$$E_{i,i}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin xl}{xl} B_{i,i}(l) l^2 dl \quad (4.131)$$

и аналогично

$$B_{i,i}(l) = \int_0^\infty \frac{\sin xl}{xl} E_{i,i}(\mathbf{x}) x^2 d\mathbf{x}. \quad (4.132)$$

Тогда трехмерный энергетический спектр $E(\mathbf{x})$ определяется выражением

$$E(\mathbf{x}) = 2\pi x^2 E_{i,i}(\mathbf{x}), \quad (4.133)$$

так что, согласно формуле (4.132) и

$$B_{i,i}(0) = 3\bar{u}^2 = 4\pi \int_0^\infty E_{i,i}(x)x^2 dx, \quad (4.134)$$

имеем

$$\int_0^\infty E(x)dx = \frac{3}{2} \bar{u}^2. \quad (4.135)$$

Отметим, что в случае изотропной турбулентности $u'_1 = u'_2 = u'_3 = u'$ и $B_{i,j}(0) = 0$ при $i \neq j$.

Формулы (4.131) и (4.132) применимы только к случаю изотропной турбулентности.

Однако Бэтчелор [6] полагает, что в случае неизотропной однородной турбулентности статистические моменты можно выразить через один скалярный параметр l , а спектральную функцию — через волновое число x , вычисляя средние значения этих функций по сферическим поверхностям $l = \text{const}$ в физическом пространстве и $x = \text{const}$ в пространстве волновых чисел:

$$[E_{i,j}(x)]_{\text{cp}} = \frac{1}{4\pi x^2} \int E_{i,j}(x) 4\pi x^2 dx \quad (4.136)$$

и

$$[B_{i,j}(l)]_{\text{cp}} = \frac{1}{4\pi l^2} \int B_{i,j}(l) 4\pi l^2 dl. \quad (4.137)$$

Величина $[B_{i,j}(l)]_{\text{cp}}$ представляет собой осредненный тензор статистических моментов для двух точек, разделенных расстоянием l , а величина $[E_{i,j}(x)]_{\text{cp}} dx$ характеризует вклад в энергетический тензор $u_i u_j$ пульсаций с волновыми числами, величины которых заключены в интервале от x до $x + dx$. Связь между функциями $[B_{i,j}(l)]_{\text{cp}}$ и $[E_{i,j}(x)]_{\text{cp}}$ имеет следующий вид [7]:

$$[B_{i,j}(l)]_{\text{cp}} = 4\pi \int_0^\infty [E_{i,j}(x)]_{\text{cp}} x^2 \frac{\sin xl}{xl} dx. \quad (4.138)$$

Однако из равенства (4.138) функция $B_{i,j}(l)$ определяется неоднозначно, так как энергия плоских волн с волновыми векторами, величины которых заключены в интервале $(x, x + dx)$, может распределяться различным образом по волнам разной ориентации. Тем не менее полная энергия поля дается выражением

$$\sum_{i=1}^3 B_{ii}(0) = \sum_{i=1}^3 \bar{u}_i^2 = 4\pi \int_0^\infty [E_{i,i}(x)]_{\text{cp}} x^2 dx. \quad (4.139)$$

4.5. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ

4.5.1. Трехмерные энергетические спектры

В данном разделе кратко описываются характеристики энергетических спектров. Более подробное и полное изложение этого вопроса можно найти в работах [7—9]. На рис. 4.15 приведен типичный график трехмерной энергетической спектральной функции $E(x, t)$. Такая зависимость $E(x, t)$ от x следует из физических соображений, основанных на анализе размерностей.

В разд. 4.1 было показано, что большие турбулентные вихри, ассоциированные со средним движением, являются энергосодержащими анизотропными вихрями. Пространственный масштаб этих вихрей уменьшается вследствие растяжения вихревых трубок, а энергия вихрей переносится в направлении меньших масштабов, где она окончательно рассеивается под действием сил вязкости. В мелкомасштабных вихрях утрачивается предпочтительная ориентация средней скорости деформации, и такие вихри характеризуются универсальной структурой, т. е. изотропностью, которая, согласно Колмогорову, называется локальной изотропностью.

Для существования локальной изотропности требуется, чтобы турбулентное число Рейнольдса $Re_l = u' l / \nu$ было велико — порядка 100 (см. работу [8]), где l — средний размер энергосодержащих вихрей.

Временные масштабы, соответствующие области спектра, в которой пульсации являются локально-изотропными, малы по сравнению с масштабом осредненного течения, и, следовательно, мелкие вихри столь быстро реагируют на изменения характеристик осредненного течения, что они находятся по существу в равновесии с его локальными характеристиками. Диапазон длин волн или соответствующих пространственных масштабов вихрей, в котором устанавливается равновесие, показан на рис. 4.15.

Равновесная область соответствует пространственным масштабам, в которых энергия, поступающая от более крупных вихрей, рассеивается. Вследствие этого факта и локального равновесия характеристики турбулентности определяются полной величиной подводимой энергии $\epsilon(t)$ и кинематической вязкостью ν . Из соображений размерности для характерных скорости и масштаба длины равновесной области получим:

$$\text{масштаб длины } \eta = (\nu^3 / \epsilon)^{1/4},$$

$$\text{масштаб скорости } v = (\nu \epsilon)^{1/4}.$$

Вид энергетического спектра при больших волновых числах можно определить также из соображений размерности. В самом деле, имеют место следующие размерности: $[E(x, t)] \sim L^3 T^{-2}$, $[x] \sim L^{-1}$, $[\epsilon(t)] \sim$

$\sim L^2 T^{-3}$ и $[\nu] \sim L^2 T^{-1}$, а функция $E(x, t)$ должна зависеть только от $x, \varepsilon(t)$ и ν . Следовательно,

$$E(x, t) = \nu^{5/4} \varepsilon^{1/4} E^*(x\eta), \quad (4.140)$$

так как

$$L^3 T^{-2} = [L^{5/2} T^{-5/4}] [L^{1/2} T^{-3/4}].$$

Функция $E^*(x\eta)$ должна быть определена экспериментально.

Размер вихрей, рассеивающих основную часть полной энергии, приблизительно определяется волновым числом x_d , при котором функция диссипации $x^2 E(x, t)$ имеет максимум [рис. 4.12; можно показать, что корреляционная функция $(\partial u / \partial t)^2$ пропорциональна функции диссипации $x^2 E(x, t)$]. Следует ожидать, что x_d имеет порядок величины $1/\eta$; согласно экспериментальным данным [7], $0,09 \leq \eta x_d \leq 0,5$.

В диапазоне малых волновых чисел энергетический спектр имеет максимум при $x = x_e$. Область волновых чисел около $x = x_e$, которой соответствуют вихри, несущие основную часть полной кинетической энергии турбулентности, называется областью энергосодержащих вихрей (рис. 4.15). Наиболее крупным вихрям постоянного характера соответствует область еще более низких волновых чисел. В этой области содержится приблизительно 20% полной кинетической энергии.

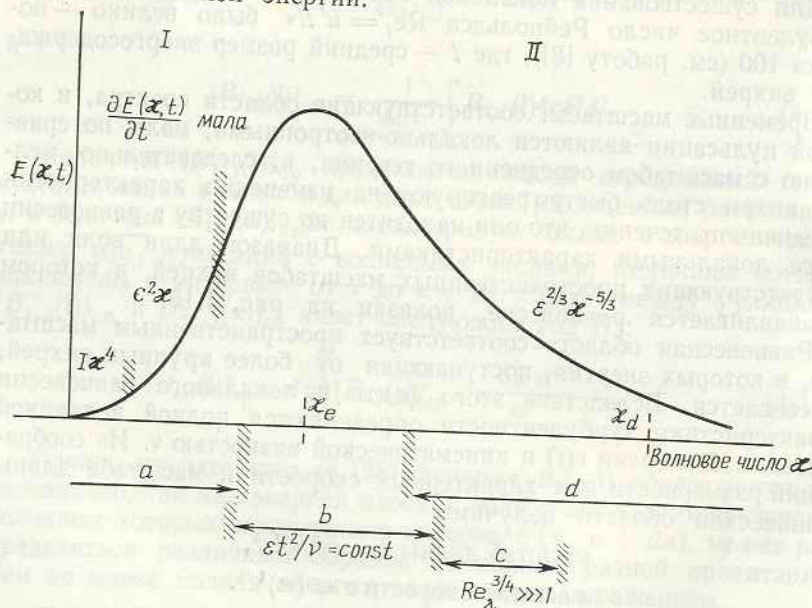


Рис. 4.15. Типичная форма трехмерного энергетического спектра. I — зависит от условий образования; II — не зависит от условий образования. a — наиболее крупные вихри постоянного характера; b — энергосодержащие вихри; c — инерционная подобласть; d — область универсального равновесия.

Значение x_e определяет масштаб длины $l (x_e = 1/l)$, который был введен выше как средний размер энергосодержащих вихрей.

Так как энергия $\varepsilon(t)$, рассеиваемая при больших волновых числах, равна энергии, подводимой от более крупных вихрей, форма энергетического спектра в области энергосодержащих вихрей также зависит от параметра $\varepsilon(t)$. Вторым параметром, оказывающим существенное влияние в этой области, является время t , так как относительная скорость изменения полной кинетической энергии по порядку величины определяется масштабом времени для крупных вихрей. Кроме того, функция $E(x, t)$ в области энергосодержащих вихрей должна зависеть от ν , если число Рейнольдса не слишком велико. (При очень больших числах Рейнольдса между равновесной областью и областью энергосодержащих вихрей существует инерционная подобласть. Эта подобласть будет рассмотрена позднее.) В области энергосодержащих вихрей энергетический спектр $E(x, t)$ должен зависеть от величин x, ε, t и ν .

С помощью любых двух параметров из указанных трех можно обезразмерить функцию $E(x, t)$, а все три параметра не могут быть независимыми; следовательно, можно составить безразмерную комбинацию $\varepsilon t^2 / \nu$.

Из соображений размерности функция $E(x, t)$ в области энергосодержащих вихрей имеет вид

$$E(x, t) = \nu^{5/4} \varepsilon^{1/4} E^*(x\eta \varepsilon t^2 / \nu). \quad (4.141)$$

Колмогоров предположил, а эксперименты подтвердили, что при очень больших турбулентных числах Рейнольдса имеется область волновых чисел, в которой влиянием вязкой диссипации можно пренебречь по сравнению с переносом энергии за счет инерционных эффектов. Эта область называется инерционной подобластью и в ней энергетический спектр зависит только от одного параметра $\varepsilon(t)$. Следовательно,

$$E(x, t) = \text{const} \times [\varepsilon(t)]^{2/3} x^{-5/3}. \quad (4.142)$$

Рассматривая предельные процессы, Теннекес и Ламли [8] определили на диаграмме (рис. 4.16) область существования инерционной подобласти спектра.

Для существования инерционной подобласти спектра требуется, чтобы турбулентное число Рейнольдса $u' l / \nu$ по порядку величины было равно 10^5 . Поэтому инерционная подобласть, как правило, не обнаруживается в лабораторных исследованиях, но часто наблюдается в геофизических течениях.

Установлено, что функция $E(x, t)$ в области наиболее крупных вихрей постоянного характера имеет вид

$$E(x, t) = \varepsilon^{8/3} l^{-1/3} E^*[x(l/\varepsilon^2)^{1/3}] \quad (4.143)$$

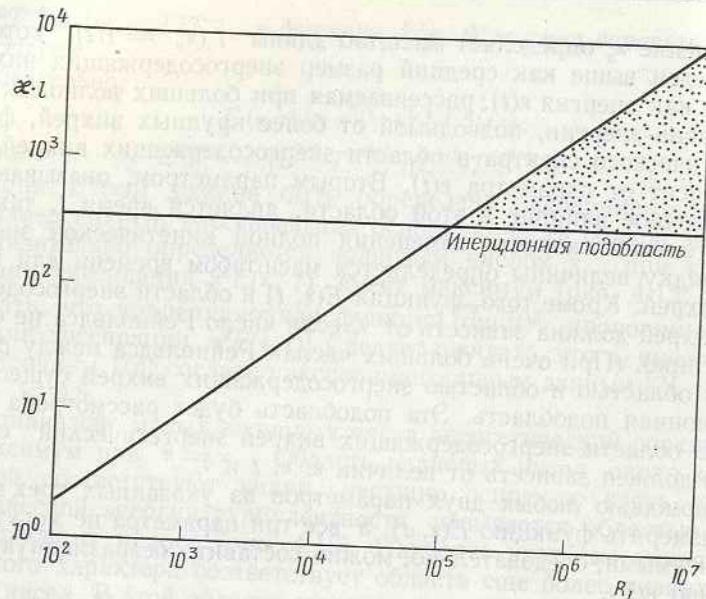


Рис. 4.16. Значения параметров для инерционной подобласти [8].

при наиболее низких волновых числах и

$$E(x, t) = \varepsilon^{5/4} \varepsilon^{1/4} E^* [x (\varepsilon^3 / \varepsilon)^{1/4}] \quad (4.144)$$

в промежуточной подобласти между наиболее низкими волновыми числами и нижней границей области энергосодержащих вихрей. Здесь параметр ε — турбулентная вязкость, а I — интеграл Лойджанского; эти величины подробно рассматриваются в работе [7].

4.5.2. Одномерные энергетические спектры

Обычно в эксперименте измеряются только одномерные спектры. Они определяются через продольные и поперечные корреляционные функции [соотношения (4.119) и (4.120)].

Связь функций E_{ii} и E_{nn} с трехмерным спектральным тензором $E_{i,j}$ можно найти, используя равенство (4.128):

$$B_{ii}(r, 0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_1 r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{1,1}(x) dx_2 dx_3 \right] dx_1. \quad (4.145)$$

Сравнивая выражение (4.145) с формулой (4.119), находим

$$E_{ii}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_{1,1}(x) dx_2 dx_3. \quad (4.146)$$

Этот результат снова иллюстрирует маскирующий эффект, о котором говорилось выше. Например, в случае однородной изотропной турбулентности кинетическая энергия, соответствующая вихрям с волновым числом x , содержится внутри сферического слоя

$$E(x) = 4\pi \int E_{i,i}(x) x^2 dx, \quad (4.147)$$

как показано на рис. 4.17. Однако из рассмотрения одномерного энергетического спектра можно заключить, что энергия, соответствующая значению $x = x_1$, содержится в слое, простирающемся до бесконечности вдоль осей x_2 и x_3 . Следовательно, значению x_1 приписывается энергия, соответствующая более высоким волновым числам, чем x_1 . Рассматривая рис. 4.17, убеждаемся, что при $x_1 = 0$ энергия равна нулю, тогда как одномерный энергетический спектр характеризует количество энергии, содержащейся в слое толщиной dx_1 около плоскости $(0, x_2, x_3)$.

Форма одномерных энергетических спектров показана на

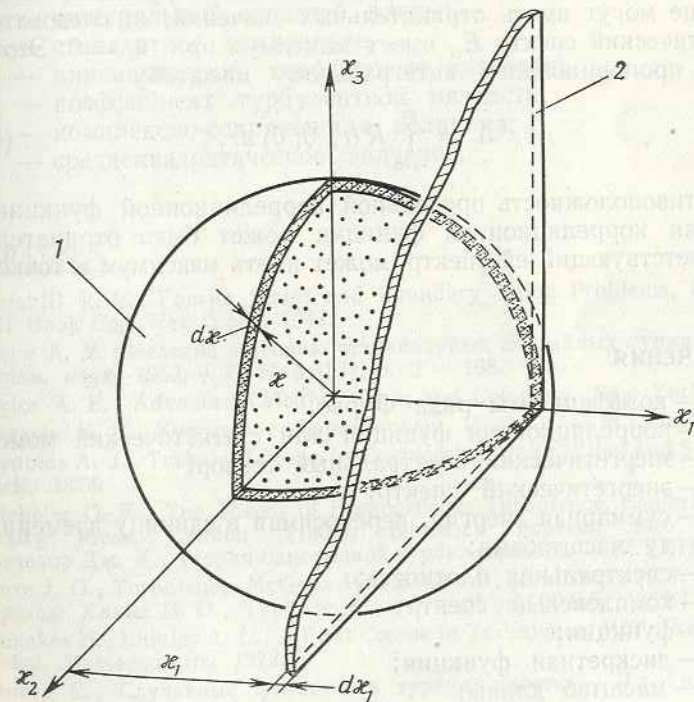


Рис. 4.17. Одномерный и трехмерный спектры.

1 — энергия, соответствующая $x = x_1$, содержится в сферическом слое (случай трехмерного спектра); 2 — энергия, соответствующая $x = x_1$, содержится в бесконечном плоском слое (случай одномерного спектра).

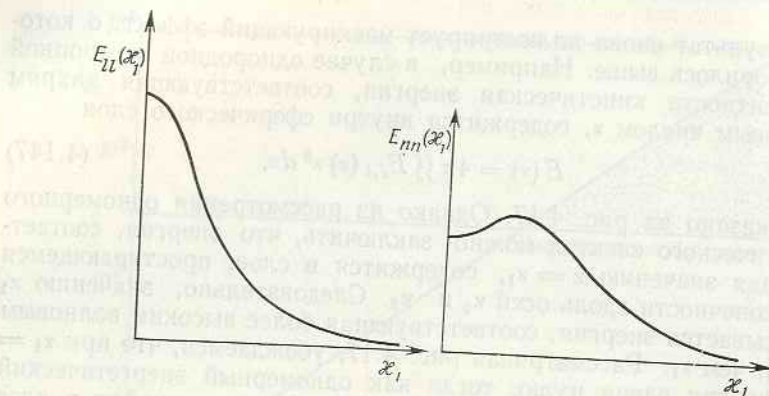


Рис. 4.18. Характеристики одномерных спектров.

рис. 4.18 [8]. Продольные корреляционные функции, как правило, не могут иметь отрицательных значений, и, следовательно, энергетический спектр E_{11} имеет максимум при $x_1 = 0$. Этот максимум пропорционален интегральному масштабу

$$\Lambda = \int_{-\infty}^{\infty} R(r, 0, 0) dr. \quad (4.148)$$

В противоположность продольной корреляционной функции поперечная корреляционная функция может быть отрицательной, и соответствующий ей спектр может иметь максимум в точке $x_1 \neq 0$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a_n, b_n — коэффициенты ряда Фурье;
 $B(\)$ — корреляционная функция или статистический момент;
 $E_{i,j}$ — энергетический спектральный тензор;
 $E(\)$ — энергетический спектр;
 ϵ — суммарная энергия, переносимая в единицу времени между масштабами;
 ϵ — спектральная плотность;
 $F(\)$ — комплексный спектр;
 $f(\)$ — функция;
 $g(\)$ — дискретная функция;
 L — масштаб длины;
 l — расстояние между двумя точками;
 $\mathbf{l}$ — вектор, соединяющий две точки;
 n — частота, измеряемая как число колебаний за секунду;
 $\mathbf{r}$ — радиус-вектор;

- $R(\)$ — коэффициент корреляции;
 T — временной масштаб;
 T — период;
 t — время;
 $\bar{U}$ — средняя скорость;
 u_m — амплитуда прямоугольного импульса;
 v — масштаб скорости;
 Z — комплексная случайная переменная;
 ϵ — комплексная случайная переменная;
 η — колмогоровский масштаб длины;
 η — действительная часть комплексной случайной переменной;
 ζ — мнимая часть комплексной случайной переменной;
 θ — фаза;
 $\phi(\)$ — нормированная спектральная плотность энергии;
 ω — частота в радианах за секунду;
 κ — волновое число;
 τ — время сдвига;
 Λ — интегральный масштаб длины;
 σ — стандартное отклонение;
 ν — кинематический коэффициент вязкости;
 ϵ — коэффициент турбулентной вязкости;
 $*$ — комплексно-сопряженная величина;
 $\cdot$ — среднее квадратическое значение.

ЛИТЕРАТУРА

- Churchill R. V., Fourier Series and Boundary Value Problems, McGraw-Hill Book Co., New York, 1941.
- Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций, *Усп. матем. наук*, 1952, т. 7, № 5 (51), с. 3 — 168.
- Taylor A. E., Advanced Calculus, Ginn and Company, New York, 1955.
- Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Изд. 4-е. — М.: Наука, 1965.
- Reynolds A. J., Turbulent Flows in Engineering, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- Batchelor G. K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, London (1967). [Имеется перевод 1-го издания: Бэтчелор Дж. К., Теория однородной турбулентности. — М.: ИИЛ, 1955.]
- Hinze J. O., Turbulence, McGraw-Hill Book Co., New York, 1957. [Имеется перевод: Хинце И. О., Турбулентность. — М.: ГИФМЛ, 1963.]
- Tennekes H., Lumley J. L., A First Course in Turbulence, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
- Панчев С., Случайные функции и турбулентность. — Л.: Гидрометеоздат, 1967.

Турбулентность: диффузия, статистика, динамика спектров

Г. ТЕННЕКЕС¹⁾

5.1. ВВЕДЕНИЕ

По-видимому, не совсем точно говорить, что турбулентное течение является «случайным»; поскольку, несмотря на то что рождение вихря, обусловленное неустойчивостью в некоторой точке поля течения, «случайно», его последующая эволюция описывается уравнениями Навье—Стокса. Учитывая это, мы будем говорить только, что турбулентность является *хаотической* и что для многих практических целей достаточно знать лишь некоторые статистические характеристики поля течения. Тем не менее в некоторых ситуациях статистический подход неэффективен. Например, при прогнозе погоды важно установить, в какое время вихрь будет проходить над определенной областью и на какой стадии развития он находится.

Мы не будем рассматривать такие задачи; они в большей степени относятся к теории погоды или к модели среднего движения, описывающей общую циркуляцию атмосферы. В самом деле, мы принимаем *априори*, что предсказуемость турбулентных течений ограничивается относительно короткими промежутками времени и не зависит от того, сколь точно известны начальные условия. Если же нас интересуют пространственные и временные интервалы, выходящие за пределы предсказуемости в индивидуальных реализациях, то необходимо использовать статистические методы. Использование статистических методов связано с решением некоторых фундаментальных проблем (как всегда при привлечении статистической механики), которые здесь, однако, не рассматриваются.

¹⁾ H. Tennekes, Dept. of Aerospace Engineering, Pennsylvania State University, University Park, PA 16802. Present address: Royal Netherlands Meteorological Institute, de Bilt, the Netherlands.

5.2. ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ

Чтобы получить представление о методах, которые широко используются при анализе турбулентных течений, остановимся на простой задаче о диффузии частиц. Рассмотрим бесконечный объем, характеризующийся стационарной однородной турбулентностью (однородная турбулентность может не быть стационарной, и наоборот, однако мы можем игнорировать этот факт). В начале координат будем вводить жидкие частицы, которые помечены каким-либо образом (например, радиоактивными изотопами). Как будут диффундировать эти частицы, удаляясь от начала координат? По самому смыслу глагола «диффундировать» ясно, что мы интересуемся не траекториями отдельных частиц, а некоторыми средними характеристиками.

Лагранжева координата жидкой частицы в момент времени t (мы будем рассматривать движение только вдоль оси y) определяется формулой

$$y(t) = \int_0^t v(t') dt'. \quad (5.1)$$

Осредняя это выражение по многим реализациям (т. е. по большой последовательности вводимых частиц), найдем, что среднее значение y равно нулю, если флуктуации скорости удовлетворяют некоторым правдоподобным условиям (Теннекес и Ламли [1], гл. 7). Другими словами, центр тяжести облака частиц в статистическом смысле не удаляется от начала координат. Более важное уравнение получается при умножении равенства (5.1) на $v(t)$:

$$y(t)v(t) = y(t) \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) = \int_0^t v(t) v(t') dt'. \quad (5.2)$$

Осредняя это уравнение, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\overline{\frac{1}{2} y^2} \right) = \int_0^t \overline{v(t) v(t')} dt'. \quad (5.3)$$

Обе части этого уравнения имеют размерность коэффициента диффузии ($\text{м}^2/\text{с}$); фактически уравнение (5.3) определяет коэффициент турбулентной диффузии в турбулентной среде, в которую вводятся меченые частицы.

Этот подход был предложен Дж. Тейлором; он строил свою теорию диффузии по образцу эйнштейновской теории броуновского движения. Для решения уравнения (5.3) нам потребуются дополнительные сведения о входящей в это уравнение лагранжевой автокорреляционной функции. В случае стационарного турбулентного движения эта корреляция является функцией интервала времени

$\tau = t - t'$; положим

$$\overline{v(t)v(t')} = R_L(\tau) = \overline{v^2} \rho_L(\tau). \quad (5.4)$$

Здесь $\rho_L(0) = 1$ и $\rho_L(\tau) = \rho_L(-\tau)$. Форма корреляционной функции, по-видимому, связана с динамическими характеристиками турбулентности; этот вопрос будет рассматриваться позднее. Свойства функции $\rho_L(\tau)$ предполагаются такими, что для нее можно определить лагранжев интегральный масштаб времени T_L по формуле

$$T_L = \int_0^\infty \rho_L(\tau) d\tau. \quad (5.5)$$

Предполагается, кроме того, что $\rho_L(\tau) \rightarrow 0$, при $\tau \rightarrow \infty$; на практике часто оказывается, что $\rho_L(\tau) < 0,01$ при $\tau > 3 T_L$.

Подставляя определение (5.4) в уравнение (5.3), получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) = \int_0^t R_L(\tau) d\tau = \overline{v^2} \int_0^t \rho_L(\tau) d\tau. \quad (5.6)$$

При $t \gg T_L$ это уравнение можно аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} y^2 \right) = \overline{v^2} \int_0^\infty \rho_L(\tau) d\tau = \overline{v^2} T_L. \quad (5.7)$$

Выполняя интегрирование, получаем соотношение

$$\overline{y^2(t)} = 2 \overline{v^2} T_L t, \quad (5.8)$$

которое подтверждает параболический характер диффузии на больших (по сравнению с интегральным масштабом) интервалах времени.

5.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

В объеме, заполненном стационарной турбулентной жидкостью, скорость жидкой частицы является стационарной функцией времени. Такие функции часто исследуются с помощью преобразований Фурье. При построении преобразований Фурье самих случайных функций возникают определенные математические трудности, однако свойства корреляционной функции $R_L(\tau)$ таковы, что можно воспользоваться обычным косинус-преобразованием (Монин и Яглом [2], гл. 6):

$$R_L(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} F_L(\omega) d\omega = \int_0^\infty \cos \omega\tau E_L(\omega) d\omega \quad (5.9)$$

и, наоборот,

$$F_L(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_L(\tau) d\tau, \quad (5.10a)$$

или

$$E_L(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega\tau R_L(\tau) d\tau. \quad (5.10b)$$

При $\tau = 0$ формула (5.9) дает

$$R_L(0) = \overline{v^2} = \int_0^\infty E_L(\omega) d\omega, \quad (5.11)$$

вследствие чего функцию $F_L(\omega)$ называют *спектральной плотностью мощности, спектром мощности* или просто *спектром*. В самом деле, можно показать (доказательство здесь не приводится), что величина $E_L(\omega) d\omega$ определяет вклад в величину $\overline{v^2}$ пульсационных составляющих с частотами в интервале $d\omega$ около частоты ω . Действительно ли эта величина дает полезную информацию о турбулентном течении? В каком смысле можно говорить о «частоте» вихря?

При $\omega = 0$ формула (5.10b) принимает вид

$$E_L(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_L(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \overline{v^2} T_L. \quad (5.12)$$

Произведение величин $\overline{v^2}$ и T_L встречалось ранее при рассмотрении диффузии в соотношениях (5.7) и (5.8). Очевидно, что значение спектральной функции при $\omega = 0$ определяет (с точностью до численного множителя) коэффициент турбулентной диффузии, который появляется при описании диффузии на больших интервалах времени.

Другой функцией, представляющей значительный интерес, является лагранжева *структурная функция* $D_L(\tau)$, которая описывается формулой

$$D_L(\tau) = \overline{[v(t) - v(t + \tau)]^2}. \quad (5.13)$$

Структурная функция связана с функциями $R_L(\tau)$ и $E_L(\omega)$ соотношениями

$$D_L(\tau) = 2\overline{v^2} - 2R_L(\tau), \quad (5.14)$$

$$D_L(\tau) = 2 \int_0^\infty (1 - \cos \omega\tau) E_L(\omega) d\omega. \quad (5.15)$$

На небольших интервалах времени структурную функцию можно рассматривать как довольно хороший фильтр, который отбирает главным образом высокочастотные компоненты функции $E_L(\omega)$. Это свойство будет использоваться позднее.

5.4. ДИФФУЗИЯ ЧАСТИЦ

Тейлоровское описание турбулентной диффузии легко распространяется на случай движения частиц, инерцией которых пренебречь нельзя. При благоприятных условиях скорость $w(t)$ конечной частицы (пылевой частицы, капли воды) описывается простым дифференциальным уравнением вида

$$\Lambda \frac{dw}{dt} + w(t) = v(t), \quad (5.16)$$

где Λ — постоянная времени, характеризующая инерцию частицы, $v(t)$ — скорость жидкости на траектории частицы (Монин и Яглом [3], гл. 5). Если $w(t)$ и $v(t)$ — стационарные случайные функции, то можно составить уравнение, связывающее их корреляционные функции. Вводя для ускорения частицы dw/dt обозначение $a(t)$, из уравнения (5.16) получаем

$$\Lambda^2 \overline{a(t) a(t+\tau)} + \overline{w(t) w(t+\tau)} = \overline{v(t) v(t+\tau)}. \quad (5.17)$$

Корреляционные функции, входящие в это уравнение, запишем следующим образом:

$$\overline{w(t) w(t+\tau)} = R_p(\tau) = \overline{w^2} \rho_p(\tau), \quad (5.18)$$

$$\overline{a(t) a(t+\tau)} = -\frac{d^2 R_p}{d\tau^2} = -\overline{w^2} \frac{d^2 \rho_p}{d\tau^2}, \quad (5.19)$$

$$\overline{v(t) v(t+\tau)} = R_*(\tau) = \overline{v^2} \rho_*(\tau). \quad (5.20)$$

Отметим, что функция $\rho_*(\tau)$, вообще говоря, не совпадает с коэффициентом корреляции $\rho_L(\tau)$, так как траектория частиц конечной массы отличается от траектории лагранжевой жидкой частицы.

Подстановка соотношений (5.18) — (5.20) в (5.17) приводит к уравнению

$$-\Lambda^2 \frac{d^2 R_p}{d\tau^2} + R_p(\tau) = R_*(\tau). \quad (5.21)$$

Применяя к нему преобразование Фурье, получим

$$(\omega^2 \Lambda^2 + 1) E_p(\omega) = E_*(\omega). \quad (5.22)$$

Простота такого рода соотношений между спектральными функциями «входного» и «выходного» сигналов является главным доводом

в пользу применения преобразований Фурье. Однако эта простота утрачивается, если исходное уравнение является нелинейным.

При интегрировании уравнения (5.21) в пределах от $\tau = 0$ до бесконечности первый член пропадает, так как $dR_p/d\tau = 0$ при $\tau = 0$ и $\tau \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\int_0^\infty R_p(\tau) d\tau = \int_0^\infty R_*(\tau) d\tau, \quad (5.23)$$

или, с учетом соотношений (5.12) и (5.22),

$$\overline{w^2} T_p = \overline{v^2} T_*, \quad (5.24)$$

$$E_p(0) = E_*(0). \quad (5.25)$$

Очевидно, что «выходной» коэффициент диффузии равен «входному» и не зависит от постоянной времени Λ рассматриваемых частиц. Это свойство значительно облегчает использование уравнений диффузии, таких, как, например, уравнение (5.8). Коэффициент турбулентной диффузии, который необходимо знать при вычислении диффузии частиц, не зависит от их размера.

При $\tau = 0$ уравнение (5.21) приводит к соотношению

$$(2\Lambda^2/\lambda_p^2 + 1) \overline{w^2} = \overline{v^2}, \quad (5.26)$$

где *микромасштаб* частиц λ_p определяется формулой

$$2 \frac{\overline{w^2}}{\lambda_p^2} = - \left(\frac{d^2 R_p}{d\tau^2} \right)_{\tau=0} = \left(\frac{dw}{dt} \right)^2 = \int_0^\infty \omega^2 E_p(\omega) d\omega. \quad (5.27)$$

Следовательно, микромасштаб связан со среднеквадратическим значением пульсаций ускорения, с кривизной корреляционной кривой при $\tau = 0$ и со вторым моментом спектральной плотности. Если при высоких частотах функция $E_p(\omega)$ убывает пропорционально ω^{-3} или более медленно, то интеграл не сходится, так что $\lambda_p = 0$.

Средний квадрат скорости частицы дается соотношением

$$\overline{w^2} = \int_0^\infty E_p(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{E_*(\omega) d\omega}{1 + \omega^2 \Lambda^2}. \quad (5.28)$$

Если корреляционная функция R_* аппроксимируется выражением

$$R_*(\tau) = \overline{v^2} \exp(-\tau/T_*), \quad (5.29)$$

то

$$E_*(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\overline{v^2} T_*}{1 + \omega^2 T_*^2}. \quad (5.30)$$

Аналогично, преобразование Фурье фильтра $F(\omega) = (1 + \omega^2 \Lambda^2)^{-1}$ имеет вид

$$R_F(\tau) = \frac{\pi}{2\Lambda} \exp\left(-\frac{|\tau|}{\Lambda}\right). \quad (5.31)$$

Применение равенства Парсеваля дает

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^2 &= \int_0^\infty E_*(\omega) F(\omega) d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_*(\tau) R_F(\tau) d\tau = \\ &= \frac{2\bar{v}^2}{\pi} \frac{\pi}{2\Lambda} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau}{T_*} - \frac{\tau}{\Lambda}\right) d\tau = \bar{v}^2 T_* (\Lambda + T_*)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

При $\Lambda \rightarrow 0$ отсюда следует, что $\bar{\omega}^2 \rightarrow \bar{v}^2$ в соответствии с формулой (5.26). При $T_* \ll \Lambda$ получаем соотношение $\bar{\omega}^2 \approx \bar{v}^2 T_*/\Lambda$, которое показывает [равенство (5.24)], что $T_p \approx \Lambda$, если T_* мало.

Подстановка (5.32) в (5.26) приводит к соотношению

$$(2\Lambda^2/\lambda_p^2 + 1) T_* = \Lambda + T_*, \quad (5.33)$$

откуда следует

$$\lambda_p^2 = 2T_* \Lambda. \quad (5.34)$$

При малых фиксированных значениях параметра T_* микромасштаб значительно меньше постоянной времени Λ , и наоборот. Кроме того, при фиксированном значении одной из постоянных времени Λ или T_* микромасштаб λ_p пропорционален квадратному корню из другой. Аналогичные соотношения выполняются для динамических характеристик турбулентности.

5.5. ДРУГОЙ ПОДХОД К ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ФУРЬЕ

Преобразование Фурье является математической операцией, которая переводит рассмотрение исследуемой задачи из одного пространства в другое. После преобразования уравнений может оказаться, что их интерпретация не упрощается. Рассмотрение динамики турбулентности в фурье-пространстве (в пространстве волновых чисел или частот) часто подобно попытке интерпретации вихрей с позиций волновой механики.

Коэффициент Фурье характеризует среднюю амплитуду составляющих скорости при заданном значении волнового числа или частоты по всему пространству, заполненному турбулентной жидкостью (например, в очень большом объеме). Коэффициент Фурье в пространстве волновых чисел не имеет смысла координаты в фи-

зическом пространстве, а коэффициент Фурье в пространстве частот не имеет смысла времени. И наоборот, мы сталкиваемся с той же самой проблемой: скорость в точке физического пространства не имеет смысла волновых чисел составляющих, которые создают эту скорость, а скорость в некоторый момент времени не имеет никакого отношения к частотам.

В этом заключены определенные преимущества. Коэффициент Фурье при заданном волновом числе k отражает влияние *всех* вихрей с заметным энергосодержанием при значении k или близких значениях, каковы бы ни были вихри в объеме, занятом турбулентностью. Коэффициент Фурье является средней характеристикой, а часто проще иметь дело со средними значениями, чем с локальными характеристиками. Однако при таком подходе имеются также и недостатки: когда вихрь определенного размера в некоторой точке распадается на ряд более мелких вихрей, «дочерние» вихри располагаются, по-видимому, поблизости от «материнского» вихря (такая терминология была введена Крейчнаном [4]). Процесс распада вихрей связан с каскадным процессом переноса энергии в пространстве волновых чисел, однако коэффициенты Фурье, используемые при описании каскадного процесса, не содержат информации о том, где происходят отдельные события, порождающие каскадный процесс.

Таким образом, коэффициент Фурье не следует отождествлять с некоторым вихрем. Коэффициенты Фурье ассоциируются с ансамблем вихрей, и при анализе динамики турбулентности в пространстве волновых чисел следует рассматривать множество вихрей, а именно множество вихрей при некотором волновом числе или в его окрестности.

В целях стимулирования дискуссии можно выдвинуть некоторые непривычные идеи. Если турбулентность состоит из вихрей, то нужно полагать, что эти вихри каким-то образом локализованы как в координатном пространстве, так и в пространстве волновых чисел. Это означает, что вихрь не является волной, а подобен волновому пакету. Здесь следует соблюдать некоторую осторожность, так как вихри не распространяются подобно движениям волнового типа; тем не менее, так как пространственно-временные преобразования здесь не используются, применение термина *волновой пакет* не должно приводить к недоразумениям. Этот термин заимствован из квантовой механики и сделано это преднамеренно.

Волна (коэффициент Фурье) не несет никакой информации о своем положении в пространстве, однако для волнового пакета имеется такая информация, даже если его края чрезвычайно размыты. Этот факт согласуется с нашей концепцией вихря: трудно сказать определенно, где кончается один вихрь и начинается другой. Очевидно, здесь требуется нечто подобное принципу неопределенности: «размытость» вихря в физическом пространстве и его «размазан-

ность» в пространстве волновых чисел должны быть взаимно дополняющими свойствами. Из соображений размерности и формальных свойств преобразований Фурье следует, что можно положить

$$\Delta x \cdot \Delta k \sim 2\pi. \quad (5.35)$$

Согласно этой оценке, большой вихрь занимает малый объем в пространстве волновых чисел, а малый вихрь содержит вклады от многих коэффициентов Фурье. Близкие коэффициенты Фурье могут соответствовать *одному и тому же* вихрю, и их взаимодействия между собой, по-видимому, совершенно отличаются от взаимодействий с коэффициентами Фурье, отстоящими на несколько интервалов Δk .

Если рассматривается вихревое кольцо (например, типа деформированного тора), то очевидно, что размер такого вихря приблизительно определяется доминирующей длиной волны его движения. Поэтому наименьшим наблюдаемым размером Δx является

$$\Delta x \approx \lambda. \quad (5.36)$$

Так как длину волны λ приходится определять по короткому волновому пакету (который содержит лишь один период), то соответствующее размытие в пространстве волновых чисел оказывается значительным. Волновое число k связано с λ равенством $k = 2\pi/\lambda$. Это означает, что соотношение (5.36) можно записать в виде

$$\Delta x \cdot k \sim 2\pi. \quad (5.37)$$

С помощью соотношения «неопределенностей» (5.35) получаем

$$\Delta k/k \sim 1. \quad (5.38)$$

Эта оценка будет использоваться при рассмотрении каскадного переноса энергии по спектру. Согласно (5.38), вихрю (или группе вихрей) в пространстве волновых чисел соответствует интервал шириной в октаву. Этот результат можно сделать наглядным, считая, что «материнский» вихрь распадается по крайней мере на два «дочерних» вихря, каждый из которых приблизительно вдвое меньше «материнского». Эволюция вихрей и их взаимодействие сопровождаются нелинейным «перемешиванием» как в координатном пространстве, так и в пространстве волновых чисел.

Для полноты изложения следует упомянуть, что каскадный процесс переноса энергии по спектру, видимо, сопровождается увеличением «перемежаемости» с ростом волнового числа: чем меньше размеры вихрей, тем меньшую часть полного объема жидкости они занимают. Отсюда, по-видимому, следует, что оценки типа (5.35) и (5.36) каким-то образом нарушаются, сообразуясь с интенсификацией перемешивания ($\Delta k/k$ увеличивается вместе с k) в пространстве волновых чисел.

5.6. ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЧАСТОТЫ

Когда при рассмотрении турбулентности требуется определить связь между временем и частотой, мы начинаем анализ с кинематики, а затем переходим к обсуждению динамических характеристик. Нетрудно заключить, что по аналогии с (5.35) должно было бы иметь место соотношение

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \sim 2\pi, \quad (5.39)$$

однако оно ничего не говорит о том, каким образом определяется частота ω . Методы волновой механики в этом случае оказываются бесполезными, так как скорость распространения в этом выражении отсутствует и, следовательно, отсутствует дисперсионное соотношение, связывающее волновое число с частотой. Однако известно, что существенным для турбулентности является процесс растяжения вихревых трубок, и теперь мы предположим, что в качестве частоты в соотношении (5.39) можно рассматривать завихренность ω .

Согласно соотношению (5.39), невозможность точного определения значения завихренности для данного вихря обратно пропорциональна «времени жизни» этого вихря. Необходимо было бы развить более четкую интерпретацию, однако в настоящее время она отсутствует. Поэтому соотношение (5.39) в той форме, в которой оно записано, фактически является формальным утверждением.

Временной эквивалент соотношения (5.36) есть

$$\Delta t \sim T, \quad (5.40)$$

где T — «период» вихря, определяемый равенством $T = 2\pi/\omega$. Соотношение (5.40) является весьма специфическим предположением о динамике вихрей в турбулентной среде. Согласно этому предположению, время жизни вихря сравнимо по величине с периодом его вращения. Еще более условно можно считать, что Δt является постоянной времени, характеризующей эволюцию вихря, так что, согласно (5.40), любой вихрь полностью исчезает через несколько оборотов. Это предположение, вообще говоря, во многом подтверждается теорией турбулентности.

Из оценки (5.40) следует временной эквивалент соотношения (5.37) вида

$$\Delta t \cdot \omega \sim 2\pi \quad (5.41)$$

и эквивалент оценки (5.38) для пространства «частот»

$$\Delta \omega/\omega \sim 1. \quad (5.42)$$

Отметим, что это пространство частот является трехмерным, так как завихренность представляет собой вектор. Соотношение (5.41)

показывает, что высокочастотные вихри разрушаются быстро и что для эволюции низкочастотных вихрей требуются значительные промежутки времени. Все эти оценки выглядят весьма правдоподобными.

5.7. СИЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Сформулированные выше гипотезы частично были предложены на основании некоторых рассуждений, содержащихся в книге Б. Кадомцева по турбулентности плазмы [5]. Приведем эти рассуждения: «...в установившемся турбулентном состоянии затухание каждой отдельной волны за счет распада в точности компенсируется подпиткой за счет биений. При этом волна k , ω существует в течение времени порядка γ^{-1} и занимает область порядка $\omega/\gamma k$. Действительно, за время порядка γ^{-1} отдельно взятая волна полностью исчезает. Она сменяется другой волной, которая возникает за счет биений, и, следовательно, может быть не коррелирована с первой. А так как каждая волна (точнее, волновой пакет) расплывается со временем, то независимо от начальной локализации в установившемся состоянии длина локализации L будет порядка расстояния, на которое может распространяться волна за время своего существования, т. е. $L \sim \gamma^{-1} d\omega/dk \sim \omega/\gamma k$.

Таким образом, турбулентное движение сплошной среды представляет собой набор многих волновых пакетов, которые и следует рассматривать как «единицы», из которых составлена рассматриваемая нами система с большим числом степеней свободы. При $\gamma/\omega \ll 1$ эти пакеты существуют весьма длительные промежутки времени и являются весьма протяженными, так что можно говорить о волнах, совершенно не локализованных в пространстве. Но если γ/ω увеличивается, то мы должны явно¹⁾ учитывать, что единицами турбулентного движения являются не фурье-компоненты рассматриваемой нами величины (например, скорости), а отдельные волновые пакеты. Другими словами, при конечном γ/ω близкие фурье-компоненты нельзя уже считать слабо коррелированными.

В волновой механике соотношение $\gamma/\omega \sim 1$ [которое тождественно нашему соотношению (5.41)] означает, что мы должны построить теорию «сильных взаимодействий». Методы линеаризации, такие, как, например, приближение прямых взаимодействий, предложенное Крейчнаном, могут оказаться неприменимыми к рассматриваемой задаче.

5.8. ЗАВИХРЕННОСТЬ И СКОРОСТЬ

Так как вихри не распространяются как волны, необходимо иметь соотношение, которое выступало бы в роли дисперсионного

¹⁾ Курсив автора главы.

соотношения, но имело другую интерпретацию. Вектор завихренности определяется как ротор вектора скорости¹⁾:

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \partial u_k / \partial x_j. \quad (5.43)$$

Предположим, что «частоту» ω вихря, имеющего скорость $\hat{u}$ и волновое число k , можно оценить, используя соотношение

$$\omega \sim \hat{u} k. \quad (5.44)$$

Согласно этой оценке, «размер» Δx вихря или волнового пакета связан с постоянной времени Δt :

$$\Delta x / \Delta t \sim \hat{u}. \quad (5.45)$$

Эти оценки выглядят вполне правдоподобными.

5.9. «ПЕРВЫЙ ЗАКОН» ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Рассмотрим процесс вырождения турбулентности за сеткой в аэродинамической трубе. Кинетическая энергия турбулентности убывает в соответствии с уравнением (используется система координат, движущаяся со средней скоростью потока)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_i u_i \right) = - \nu \omega_i \omega_i. \quad (5.46)$$

Правая часть этого уравнения характеризует скорость превращения кинетической энергии в тепловую по мере того, как мелкие вихри деформируются под действием вязких напряжений. Эта скорость диссипации играет столь важную роль в эволюции турбулентности, что для ее обозначения используется специальный символ:

$$\varepsilon = \nu \omega_i \omega_i. \quad (5.47)$$

Теперь рассмотрим случай, когда энергосодержащие вихри, возникающие в следе за сеткой, имеют скорость $\hat{u}$, сравнимую по величине с интенсивностью турбулентности q ($q^2 = \overline{u_i u_i}$), и характеризуются длиной волны l ; тогда из формул (5.41) и (5.44) следует, что постоянная времени для процесса вырождения определяется соотношениями

$$\Delta t \sim \frac{2\pi}{\omega} \sim \frac{2\pi}{\hat{u} k} \sim \frac{l}{\hat{u}} \sim \frac{l}{q}. \quad (5.48)$$

¹⁾ Здесь ε_{ijk} — совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем $\varepsilon_{123} = 1$. Кроме того, принимается, что по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3, не указываемое явно. — Прим. перев.

Следовательно,

$$\varepsilon = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_i u_i \right) \sim \frac{q^2}{\Delta t} \sim \frac{q^3}{l}. \quad (5.49)$$

Это соотношение играет столь важную роль в теории турбулентности, что его можно назвать «первым законом» турбулентности. Строгое теоретическое обоснование соотношения (5.49) отсутствует, так как не имеется удовлетворительной статистической теории механики нелинейных неравновесных ансамблей. Тем не менее соотношение (5.49) и его следствия были надежно подтверждены экспериментальными данными. В сущности, согласно (5.49), скорость диссипации энергии турбулентности определяется временем «одного оборота» энергосодержащих вихрей и *не зависит от вязкости*. При исследовании турбулентности бесполезно рассматривать жидкость с малой вязкостью: потери механической энергии будут оставаться неизменными.

5.10. КАСКАДНЫЙ ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ

Соотношением (5.49) определяется скорость, с которой энергосодержащие вихри теряют свою кинетическую энергию. Эта энергия теряется не за счет непосредственного действия вязкости, а передается более мелким вихрям (с типичным волновым числом на октаву выше, чем у первых вихрей), которые в свою очередь передают энергию еще меньшим дочерним вихрям и так далее, до тех пор, пока размеры порождаемых вихрей не станут столь малыми (а волновые числа столь большими), что они почти немедленно будут исчезать под действием вязкости (более подробно об этом см. в гл. 8 книги Теннекеса и Ламли [1]).

В процессе этого спектрального переноса энергии характерные временные масштабы вихрей уменьшаются. При волновых числах значительно меньших, чем в области энергосодержащих вихрей, времена, характеризующие перенос энергии, малы по сравнению с временем одного оборота для крупных вихрей. Следовательно, статистические характеристики движения при больших волновых числах могут не зависеть от времени в явной форме, а зависеть лишь от *самой скорости* спектрального переноса энергии. Если, кроме того, ограничиться волновыми числами, малыми по сравнению с волновыми числами, при которых фактически осуществляется диссипация энергии под действием вязких напряжений, то можно постулировать, что соотношение (5.49) должно выполняться при всех волновых числах:

$$\varepsilon \sim \hat{u}^3 k. \quad (5.50)$$

Здесь $\hat{u}$ — средняя амплитуда коэффициентов Фурье внутри полосы шириной в октаву около значения k .

Используя эти идеи, Колмогоров рассмотрел пространственную структурную функцию

$$D(r) = [\overline{v(x) - v(x+r)}]^2, \quad (5.51)$$

которая характеризуется свойствами фильтра при малых r [см. текст за формулой (5.13)]. В соотношении (5.50) основной вклад создают вихри размера r с кинетической энергией, пропорциональной $\varepsilon^{2/3} r^{2/3}$. Поэтому Колмогоров предположил, что

$$D(r) = c \varepsilon^{2/3} r^{2/3}. \quad (5.52)$$

Для записи этого выражения в спектральной форме требуется ввести «трехмерный» спектр $E(k)$, который является функцией величины волнового вектора (он характеризует энергию, осредненную по сферическим слоям в пространстве волновых векторов) и при интегрировании по всем k дает полную кинетическую энергию:

$$\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} q^2 = \int_0^\infty E(k) dk. \quad (5.53)$$

Согласно (5.38), кинетическая энергия всех вихрей с волновыми числами около k может быть записана в виде $\Delta k \cdot E(k) \sim kE$. Подставляя эту величину в (5.50), получим

$$\varepsilon \sim (kE)^{3/2} k, \quad (5.54)$$

откуда следует известный закон Колмогорова для энергетического спектра в инерционной подобласти:

$$E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (5.55)$$

Согласно этим результатам, завихренность ω и скорость деформации s вихря с волновым числом k изменяются по закону

$$\omega(k) \sim s(k) \sim (k^3 E)^{1/2} \sim \varepsilon^{1/3} k^{2/3}. \quad (5.56)$$

Эти величины возрастают при увеличении волнового числа, так что, согласно (5.41), характерное время жизни мелких вихрей мало. Этот вывод подтверждает гипотезу Колмогорова о равновесии.

Перенос энергии к большим волновым числам прекращается, когда характерная для вязких эффектов частота νk^2 становится сравнимой по величине с инерционными частотами, определяемыми соотношением (5.56). Следовательно, *наименьший* масштаб движения можно оценить, полагая $\nu k^2 \sim \varepsilon^{1/3} k^{2/3}$; в соответствии с этой оценкой *колмогоровский микромасштаб* определяется выражением

$$\eta = (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}. \quad (5.57)$$

Из приведенных рассуждений следует, что наименьший масштаб движения определяется скоростью подвода энергии. При больших скоростях диссипации величина η мала, и наоборот. Умеренным числам Рейнольдса соответствует относительно крупномасштабная микроструктура турбулентности, а большим числам Рейнольдса — мелкомасштабная микроструктура.

5.11. НЕКОТОРЫЕ ПОУЧИТЕЛЬНЫЕ ОШИБКИ

Колмогоровский спектр (5.55) часто «поясняется» с помощью спектральных вариантов моделей турбулентной вязкости и длины смешения. Спектральный перенос энергии возникает в том случае, когда напряжения Рейнольдса, создаваемые более мелкими вихрями, совершают работу в поле скоростей деформаций, создаваемых более крупными вихрями. Если эта работа деформаций оказывается в достаточной степени «локализованной» в пространстве волновых чисел, то можно записать

$$\varepsilon \sim \hat{u}^2 \cdot \hat{k} u \sim k^{5/2} E^{3/2}, \quad (5.58)$$

откуда следует закон Колмогорова для спектра.

Подобные рассуждения не всегда приводят к правильным выводам о форме спектра. Например, Чен (см. книгу Хинце [6], стр. 315, 316) ошибочно предполагает, что величина среднего сдвига ($S = \partial U / \partial y$) на дне турбулентного пограничного слоя столь велика, что влияние осредненного течения на скорость деформации превалирует над пульсациями скоростей деформаций. Поэтому он полагает, что $\varepsilon \sim \hat{u}^2 S \sim kES$, из чего следует

$$E(k) = c_T \varepsilon k^{-1} S^{-1}. \quad (5.59)$$

Функция (5.59) убывает медленнее, чем колмогоровский спектр, откуда следует, что средняя скорость деформации является сравнительно неэффективным средством спектрального переноса кинетической энергии.

Еще более поучительная ошибка была сделана Крейчнаном при построении *приближения прямых взаимодействий*. Это приближение соответствует модели слабой связи в фурье-пространстве, которая до некоторой степени подобна модели турбулентной вязкости и может быть разъяснена в аналогичных терминах. Аналогом переноса энергии служит напряжение, умноженное на скорость деформации; напряжение может быть записано в виде произведения турбулентной вязкости и скорости деформации; аналогом турбулентной вязкости является энергия, умноженная на постоянную времени. Следовательно,

$$\varepsilon \sim \tau \cdot \hat{u}^2 (\hat{k} u)^2. \quad (5.60)$$

В приближении прямых взаимодействий постоянная времени, характеризующая перенос энергии, определяется как время прохождения вихря размера λ (с волновым числом k) через фиксированную точку. Это время по порядку величины равно $1/qk$ (здесь q — среднеквадратическая скорость турбулентных пульсаций). Следовательно, соотношение (5.60) принимает вид

$$\varepsilon \sim (qk)^{-1} \cdot kE \cdot k^3 E, \quad (5.61)$$

откуда (Крейчнан [7])

$$E(k) = c(\varepsilon q)^{1/2} k^{-3/2}. \quad (5.62)$$

Какой пункт этих рассуждений является спорным? Коэффициент диффузии турбулентных пульсаций с волновым числом k представляет собой произведение интегрального масштаба времени (времени корреляции) и средней энергии рассматриваемых вихрей [соотношение (5.7)]. В приближении прямых взаимодействий при выборе времени корреляции используется понятие о так называемом «адиабатическом взаимодействии» (Кадомцев [5]) между вихрями из инерционной подобласти и энергосодержащими вихрями. Адиабатическое взаимодействие характеризует перенос мелких вихрей крупными вихрями через фиксированную точку пространства; оно не сопровождается *динамическими* эффектами, так как перенос энергии, связанный с деформациями мелких вихрей под действием крупных, можно не учитывать.

Так как адиабатические взаимодействия оказывают пренебрежимо малое влияние на перенос энергии в пространстве волновых чисел, несомненно, что они должны быть исключены из уравнений для прямых взаимодействий. После этого снова получается закон Колмогорова для инерционной подобласти.

Адиабатические взаимодействия играют существенную роль в некоторых специальных случаях. Спектр частот, наблюдаемый в фиксированной точке поля турбулентных пульсаций при нулевой средней скорости, определяется переносом мелких вихрей крупными. При переносе вихрей с волновым числом k через точку наблюдения за движениями со скоростями порядка q порождаются частоты порядка qk (величина, обратная времени исчезновения адиабатических корреляций), так что колмогоровский спектр (5.55) преобразуется к виду (Теннеkes [8])

$$\Phi_E(\omega) = \alpha' (\varepsilon q)^{2/3} \omega^{-5/3}. \quad (5.63)$$

Эйлеров спектр частот отличается от соответствующего ему лагранжева спектра частот (в котором адиабатические взаимодействия отсутствуют по определению); последний имеет вид

$$\Phi_L(\omega) = \beta' \varepsilon \omega^{-2}. \quad (5.64)$$

Этот спектр можно получить, если заметить, что $\varepsilon \sim u^2/\tau \sim u^2\omega$. Оценкой для u^2 служит величина $\omega\Phi_L(\omega)$, откуда следует равенство (5.64). Соответствующая лагранжева структурная функция дается выражением

$$D_L(\tau) = \overline{[v(t) - v(t + \tau)]^2} = \beta_L \varepsilon \tau, \quad (5.65)$$

которое можно использовать при временах τ , больших по сравнению с масштабом времени вязкой диссипации $(\nu/\varepsilon)^{1/2}$ и малых по сравнению с инерционным масштабом времени q^2/ε .

5.12. ДРУГИЕ ИНЕРЦИОННЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Введенные Колмогоровым концепции масштабов можно легко распространить на случай спектров других переменных. Например, спектр пульсаций давления можно связать с характеристиками пульсаций скоростного напора. Для полосы шириной в октаву около волнового числа k имеем

$$p(k) \sim \frac{1}{2} \rho \hat{u}^2(k) \sim \rho k E \sim \rho \varepsilon^{2/3} k^{-2/3}. \quad (5.66)$$

Возводя в квадрат, получим

$$k S_p(k) \sim p^2(k) \sim \rho^2 \varepsilon^{4/3} k^{-4/3}, \quad (5.67)$$

так что

$$S_p(k) = \alpha_p \rho^2 \varepsilon^{4/3} k^{-7/3}. \quad (5.68)$$

Соответствующая пространственная структурная функция описывается выражением

$$\overline{[p(x) - p(x + r)]^2} \sim \rho^2 \varepsilon^{4/3} r^{4/3}. \quad (5.69)$$

Согласно соотношению (5.68), спектр пульсаций градиента давления пропорционален $k^{-1/3}$. Другими словами,

$$\overline{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_k^2} \sim k^2 p^2(k) \sim \rho^2 \varepsilon^{4/3} k^{2/3}. \quad (5.70)$$

Крутизна этих градиентов увеличивается с ростом волнового числа. Ясно, что наибольший вклад в $(\partial p/\partial x)$ вносят флуктуации с масштабами порядка колмогоровского микромасштаба η . Это означает, что осредненная по спектру дисперсия $(\partial p/\partial x)$ может быть охарактеризована следующей оценкой (Бэтчелор [9]):

$$\overline{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}\right)^2} \sim \varepsilon^{4/3} \eta^{-2/3} \sim (\varepsilon^3/\nu)^{1/2}. \quad (5.71)$$

Интересно рассмотреть также спектр флуктуаций температуры. В данном случае температура выступает в качестве аналога всех скалярных добавок или примесей, которые перемешиваются или равномерно распределяются под действием турбулентного движения. Спектральный перенос кинетической энергии сопровождается спектральным переносом пульсаций примеси, так как при растяжении вихревых трубок концентрационные неоднородности скалярной величины преобразуются в длинные узкие ленты. Скорость молекулярного рассеивания дисперсии температуры обозначим через χ :

$$\chi \equiv \gamma \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}, \quad (5.72)$$

где γ — коэффициент температуропроводности среды. Выражение (5.72) для дисперсии температуры аналогично определению ε выражением (5.47). Отметим, что χ характеризует скорость уменьшения величины $\frac{1}{2} \overline{\theta^2}$, а ε — скорость уменьшения величины $\frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$.

Предположим, что в инерционной подобласти влиянием молекулярного переноса можно пренебречь (здесь имеются в виду параметры ν и γ ; следовательно, как число Рейнольдса, так и число Пекле должны быть большими). Спектральный перенос дисперсии температуры подобен взаимодействию теплового потока с градиентом температуры:

$$\chi \sim [\hat{u}(k) \theta(k)] \cdot k \theta(k), \quad (5.73)$$

откуда следует

$$k S_\theta(k) \sim \theta^2(k) \sim \chi / k \hat{u}(k). \quad (5.74)$$

В инерционной подобласти $\hat{u} \sim \varepsilon^{1/3} k^{-1/3}$, так что

$$S_\theta(k) = \alpha_\theta \chi \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}. \quad (5.75)$$

Полученная здесь зависимость от ε требует некоторых пояснений. При увеличении ε спектральная плотность флуктуаций температуры уменьшается, так как невозможно сохранить на прежнем уровне дисперсию этих флуктуаций, если турбулентное движение сглаживает температурные неоднородности с еще большей скоростью. К этому же выводу можно прийти с другой стороны, оценивая осредненную по спектру дисперсию температуры в соответствии с (5.74) и предполагая, что флуктуации температуры создаются на масштабах, сравнимых по величине с интегральным масштабом (например, l) турбулентного движения. Тогда

$$\overline{\theta^2} \sim \chi \tau, \quad (5.76)$$

или

$$\chi \sim \bar{v}^2/\tau \sim \bar{v}^2 \cdot q/l. \quad (5.77)$$

Эти соотношения показывают, что при одном и том же значении χ дисперсия температуры тем меньше, чем больше скорость перемешивания q/l . Напротив, скорость спектрального переноса дисперсии температуры пропорциональна величине самой дисперсии, отнесенной к постоянной времени, характеризующей спектральный перенос. В этом отношении оценка (5.77) аналогична оценке (5.49) (напомним, что, согласно последнему соотношению, скорость переноса дисперсии скорости пропорциональна самой дисперсии флуктуаций скорости, отнесенной к постоянной времени спектрального переноса).

Другим интересным специальным случаем является среда, характеризующаяся большим числом Прандтля. При большом числе Прандтля вязкость влияет значительно сильнее, чем температуропроводность. В этом случае деформационные турбулентные движения могут порождать очень тонкие нитевидные микроструктуры в распределении температуры. Эта задача аналогична задаче перемешивания красок различного цвета. При больших числах Прандтля самые малые температурные неоднородности все же значительно меньше самых малых вихрей в поле скоростей, так что при больших волновых числах возникает температурная подобласть, в которой флуктуации скорости уже диссипировали под действием вязкости, тогда как флуктуации температуры все еще не ощущают влияния температуропроводности. В этой подобласти скорость спектрального переноса χ определяется локализованной в спектре величиной дисперсии флуктуаций температуры, $\chi \sim \theta^2(k)s$, где s — соответствующая скорость деформации. Другими словами,

$$kS_\theta(k) \sim l^2(k) \sim \chi/s. \quad (5.78)$$

Максимальные скорости деформации порождаются наименьшими масштабами турбулентного движения. На масштабах, сравнимых с колмогоровским микромасштабом η , величина s имеет порядок $(\varepsilon/\nu)^{1/2}$ и, следовательно,

$$S_\theta(k) = \beta_\theta \chi (\nu/\varepsilon)^{1/2} k^{-1}. \quad (5.79)$$

Более подробное исследование этой подобласти спектра и некоторых других можно найти в гл. 8 книги Теннекеса и Ламли [1].

5.13. ПЕРЕСМОТР ПРОБЛЕМЫ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

В инерционной подобласти частот лагранжева структурная функция дается формулой (5.65). Согласно (5.14), соответствующая корреляционная функция имеет вид

$$R_L(\tau) = \bar{v}^2 - \frac{1}{2} \beta_L \varepsilon \tau. \quad (5.80)$$

Следовательно, уравнение (5.7), определяющее скорость изменения дисперсии, можно проинтегрировать по временному интервалу, который мал по сравнению с лагранжевым интегральным масштабом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{y}^2 \right) = \int_0^t R_L(\tau) d\tau = \bar{v}^2 t - \frac{1}{4} \beta_L \varepsilon t^2. \quad (5.81)$$

Это уравнение не является точным, так как при записи формулы (5.80) использовалось приближение, согласно которому кривизна кривой $R_L(\tau)$ при $\tau = 0$ равна бесконечности. Однако при больших числах Рейнольдса соответствующие ошибки малы. Повторное интегрирование приводит к следующему соотношению:

$$\bar{y}^2 = \bar{v}^2 t^2 - \frac{1}{6} \beta_L \varepsilon t^3. \quad (5.82)$$

Вследствие уменьшения корреляции эта дисперсия $\bar{y}^2$ меньше значения, соответствующего случаю, когда флуктуации скорости полностью сохраняются. Здесь мы снова сталкиваемся со следствиями адиабатических взаимодействий. Начальная дисперсия вне некоторой фиксированной точки полностью определяется интенсивностью флуктуаций скорости в этой точке, так как меченые частицы удаляются от их источника. Если интервалы времени столь малы, что скорость не успевает измениться, то $y = vt$ и, следовательно, $\bar{y}^2 = \bar{v}^2 t^2$. Однако как только корреляции флуктуаций скорости начинают уменьшаться, скорость дисперсии замедляется.

Теперь нетрудно оценить поведение турбулентной диффузии на малых временных интервалах, когда начальные эффекты переноса отсутствуют. Будем предполагать, что частицы вводятся парно и что первоначально расстояние между ними мало. До тех пор пока флуктуации скорости остаются полностью коррелированными, это расстояние Δy не будет изменяться, однако как только корреляции начинают ослабляться, следует ожидать в соответствии с уравнением (5.82), что

$$(\Delta y)^2 \sim \varepsilon t^3. \quad (5.83)$$

Этот результат объясняется тем, что именно вследствие ослабления корреляции расстояние Δy может увеличиваться с течением времени.

Коэффициент турбулентной диффузии, характеризующий процесс относительной диффузии частиц, определяется соотношением

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Delta y)^2 \sim \varepsilon t^2. \quad (5.84)$$

С помощью (5.83) из последнего соотношения можно исключить явную зависимость от времени:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\Delta y)^2 \sim \varepsilon^{1/3} r^{4/3}, \quad (5.85)$$

где $r^2 = (\Delta y)^2$. Это известный закон Ричардсона «четырёх третей», который часто записывается в виде

$$K(r) = c \varepsilon^{1/3} r^{4/3}. \quad (5.86)$$

Таким образом, в инерционной подобласти коэффициент турбулентной диффузии изменяется довольно быстро в зависимости от размера облака диффундирующих частиц.

5.14. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Заканчивая этот экскурс в статистическую динамику турбулентности, мы не без некоторого разочарования обнаруживаем, что уравнения Навье—Стокса нигде здесь существенным образом не использованы. По-видимому, эта ситуация не вполне типична для теории турбулентности, однако следует признать, что отсутствие общей и универсальной теории является одним из наиболее удручающих аспектов проблемы турбулентности. Для ее решения еще многое требуется сделать.

Необходимо отметить, что при изложении всех рассматриваемых здесь вопросов мы не пытались дать исчерпывающий обзор проведенных исследований. Полную библиографию можно найти в книгах Монины и Яглома [2, 3]; список всех основных учебников и монографий по турбулентности приведен в книге Теннекеса и Ламли [1].

ОБОЗНАЧЕНИЯ

a	— ускорение частицы;
c	— постоянная;
D_L	— лагранжева структурная функция;
E_L	— спектр мощности;
F_L	— преобразование Фурье R_L ;
k	— волновое число;
l	— длина волны;
R_L	— корреляционная функция;
S	— средняя скорость деформаций сдвига;
S_p	— спектр пульсаций давления;
S_θ	— спектр флуктуаций температуры;
t, t'	— время;
T_L	— лагранжев интегральный масштаб времени;
u_i	— составляющие скорости;

$\langle u$	— характерная скорость вихревого движения;
v	— скорость;
w	— скорость частицы;
y	— расстояние;
γ	— коэффициент температуропроводности;
ρ_L	— лагранжева автокорреляционная функция;
η	— колмогоровский микромасштаб;
ε	— скорость диссипации кинетической энергии;
Φ	— частотный спектр;
Λ	— постоянная времени;
ν	— кинематический коэффициент вязкости;
ω	— частота или завихренность;
ω_i	— составляющие завихренности;
χ	— скорость диссипации дисперсии температуры;
τ	— интервал времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tennekes H., Lumley J. L., A First Course in Turbulence, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
2. Мони́н А. С., Ягло́м А. М., Статистическая гидромеханика, ч. 2. — М.: Наука, 1965.
3. Мони́н А. С., Ягло́м А. М., Статистическая гидромеханика, часть 1. — М.: Наука, 1965.
4. Kraichnan R. H., On Kolmogorov's inertial-range theories, *J. Fluid Mech.*, 62, 305—330 (1974).
5. Кадо́мцев Б. Б., Турбулентность плазмы, в сб. Вопросы теории плазмы под ред. М. А. Леонтовича, выпуск 4. — М.: Атомиздат, 1964, стр. 188—339.
6. Hinze J. O., Turbulence, McGraw-Hill Book Co., New York, 1959. [Имеется перевод: Хинце И. О., Турбулентность. — М.: ГИФМЛ, 1963.]
7. Kraichnan R. H., The structure of isotropic turbulence at high Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, 5, 497—543 (1959).
8. Tennekes H., Eulerian and Lagrangian time microscales in isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, 67, 561—567 (1975).
9. Batchelor G. K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, New York, 1953. [Имеется перевод: Бэтчелор Дж. К., Теория однородной турбулентности. — М.: ИИЛ, 1955.]

Переход

Р. БЕТЧОВ¹⁾

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее сложных проблем в механике жидкости и, вероятно, во всей современной физике является проблема перехода. В результате попыток решения этой проблемы, имеющих столетнюю историю, достигнуто лишь поверхностное понимание явления перехода и сформулированы некоторые общие практические соображения. Переход можно определить как явление, в процессе которого ламинарное течение становится турбулентным. Несмотря на то что определение понятия «турбулентный» все еще остается спорным, вопрос о том, как определить «переход», по-видимому, вызывает меньше сомнений. Естественным в случае ламинарного течения является стремление описывать движение жидкости путем определения скорости в любой момент времени в каждой точке. С этой целью теоретик будет использовать аналитические выражения, а расчетчик будет интерполировать по значениям, известным в определенных точках сетки. В случае же турбулентного течения такой подход становится бессмысленным. Полное описание течения практически бесполезно, поскольку основной интерес в течении вызывают осредненные величины и в особенности напряжения Рейнольдса. Вследствие этого наиболее важной становится информация о статистических характеристиках течения.

Большие трудности исследования перехода обусловлены двойственным характером этого явления. Течение в режиме перехода от ламинарного к турбулентному уже утратило хорошо упорядоченную структуру, но не стало еще полностью беспорядочным.

С другой стороны, в случае ламинарного течения всегда можно предложить первое приближение: профиль Блазиуса пограничного слоя, профиль Пуазейля в трубе и т. д. Турбулентное течение можно аппроксимировать с помощью профиля средней скорости и слу-

чайно распределенных флуктуаций, корреляции которых легко получить. Но никем до настоящего времени не было предложено плодотворное «первое приближение» для режима перехода.

С учетом изложенного любое исследование явления перехода всегда нужно начинать с беспристрастного рассмотрения различных кинофильмов, показывающих картины визуализации, полученные путем введения дыма или чернил в течение в режиме перехода. В частности, весьма поучительны кинофильмы, сделанные Ф. Брауном¹⁾.

Однако экспериментальные данные такого рода следует интерпретировать с большой осторожностью. Наблюдения обычно ведутся только за линиями отмеченных частиц, т. е. линиями, создаваемыми различными мечеными частицами, которые последовательно вводятся в поток из одного и того же источника. Как показано в работе [1], поле скорости течения, описываемое уравнениями Эйлера, может быть очень простым, однако линии отмеченных частиц в нем могут получаться сильно искривленными. Может показаться, что поведение этих линий говорит о росте колебаний и об отрывах вращающихся групп таких частиц, но эта картина не означает с определенностью, что в течении в действительности происходят упомянутые явления. Картина визуализации, создаваемая в данный момент времени различными частицами, которые были введены в поток в различные моменты времени или в различных точках, зависит от предыстории течения. Так, простые изменения скорости могут приводить к очень запутанным перемещениям частиц.

Турбулентность характеризуется не только завихренностью течения, но и хаотичностью поля его скорости. В ламинарном пограничном слое вихревые линии параллельны (рис. 6.1) и располагаются в относительном порядке, подобно пакету макарон. В турбулентном пограничном слое (рис. 6.2) эти линии непрерывно изменяют направление и скручиваются. Вблизи стенки вихревые линии наиболее запутаны, они могут сворачиваться в клубки, самопересекаться и в общем вести себя подобно макаронам в кипящей воде.

Историю попыток исследовать природу перехода течений можно условно разделить на три стадии. На первой стадии исследованию подвергался главным образом вопрос устойчивости двумерных течений по отношению к возмущениям простейшего вида, т. е. «макарон» начинали двигаться, оставаясь при этом жесткими. На второй стадии рассматривались либо одно, либо два возмущения простейшего вида и допускалось, что «макарон» могут извиваться. Здесь исследовались случаи, когда установившееся

¹⁾ R. Betchov, The University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana 46556.

¹⁾ Архив факультета аэрокосмической техники, ун-т Нотр-Дам, Нотр-Дам, шт. Индиана.

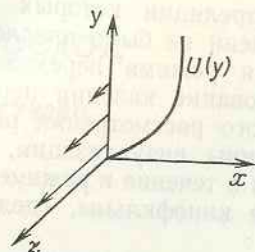


Рис. 6.1. Вихревые линии в ламинарном пограничном слое.

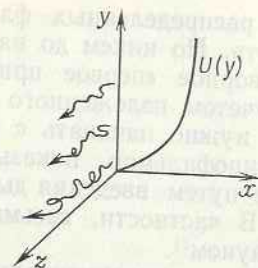


Рис. 6.2. Вихревые линии в турбулентном пограничном слое.

течение изменяется под действием неустойчивых возмущений. Эти процессы приводят к интенсивным локальным явлениям, исследования которых проводились на третьей стадии. Характерным для этих многочисленных исследований является обращение к численным методам.

6.2. ВОЛНЫ С МАЛОЙ АМПЛИТУДОЙ В ПРОСТЫХ ТЕЧЕНИЯХ

После того как Рейнольдс указал, что переход в круглой трубе начинается только тогда, когда величина сил вязкости превосходит некоторое значение, не превышающее 0,1% величины инерционных сил, начались поиски объяснения этого факта. Вопрос заключался в том, как могут такие слабые силы вязкости управлять переходом.

В конце прошлого века было выяснено, что в отсутствие силы вязкости классические течения вблизи твердых стенок очень ус-

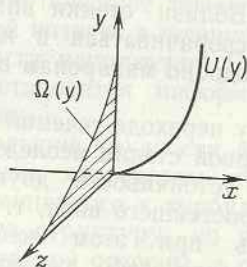


Рис. 6.3. Типичный ламинарный пограничный слой.

Так как профиль скорости не имеет точек перегиба, то, пренебрегая вязкостью, можно убедиться, что это течение является устойчивым к малым возмущениям.

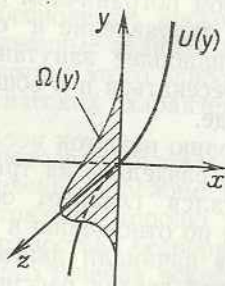


Рис. 6.4. Типичный слой смешения.

Поскольку профиль скорости имеет точку перегиба, это течение при больших числах Рейнольдса всегда неустойчиво.

тойчивы. Если профиль скорости не имеет точек перегиба, то неустойчивость не возникает. Из этого условия следует (рис. 6.3 и 6.4), что профиль завихренности должен иметь отчетливый максимум внутри течения. Неустойчивость, вызванная существованием точки перегиба, была впервые исследована Гельмгольцем [2] в предельном случае двух параллельных течений, разделенных очень тонким слоем смещения. Розенхед [3] показал, что вихревая пелена стремится свернуться; это не было очевидным из результатов линейной теории. Если вихревой элемент смещается, то влияние близких к нему элементов увеличивает возмущение и процесс становится необратимым (рис. 6.5). Вихри стремятся сконцентрироваться в большие клубки. Рис. 6.6, на котором показано возмущение потенциального течения, иллюстрирует связь между завихренностью и возмущениями скорости и давления (в работе [4] содержится подробный анализ этой задачи). Такой процесс происходит в случае длин волн возмущений, превышающих толщину слоя смешения или вихревой пелены. Вязкость всегда оказывает демпфирующее влияние на неустойчивость, однако это влияние очень мало, если число Рейнольдса по толщине слоя смешения превышает 20 [5]. В случае малых длин волн колебания быстро затухают. Это происходит не под действием вязкости, а вследствие существования механизма демпфирования, который будет обсуждаться ниже и который имеет большую аналогию с хорошо известным в физике плазмы механизмом, исследованным Ландау.

Устойчивость слоя смешения регулируется тремя основными физическими механизмами, определяющими местоположение кривой нейтральной устойчивости (рис. 6.7). Рассмотрим теперь физический механизм демпфирования Ландау, поскольку он воздействует на коротковолновые возмущения и представляет собой главное препятствие для перехода.

Возмущения завихренности ω в основном переносятся осредненным течением. Они вызывают возмущения скорости v , которые в свою очередь возмущают осредненное течение и приводят к возникновению новых возмущений завихренности. Основные уравнения, описывающие этот процесс [4], имеют вид

$$\frac{\partial \omega(x, y, t)}{\partial t} + U(y) \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{d^2 U}{dy^2} v = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (6.2)$$

В случае периодических по координате x колебаний и соответствующих граничных условий интегрирование уравнения (6.2) дает

$$v(x, y, t) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\eta, t) \exp(-\alpha |y - \eta| + i\alpha x) d\eta. \quad (6.3)$$

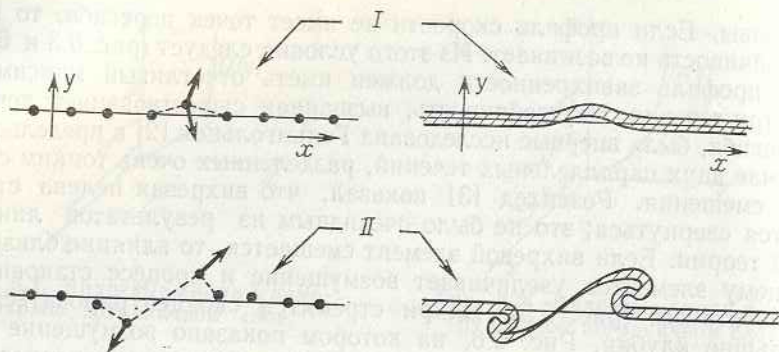


Рис. 6.5. Неустойчивость вихревой дорожки (вихревой пелены). Если вихревой элемент отклоняется от линии, то начинается необратимый процесс сворачивания (I — начальное возмущение, II — возмущение в последующий момент времени).

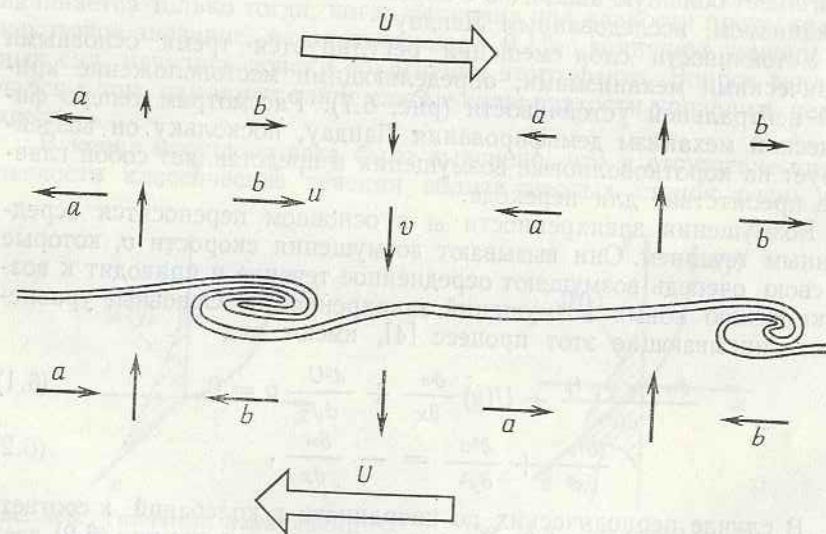


Рис. 6.6. Возмущения потенциального течения, вызванное сворачиванием вихревой пелены.

Тонкими стрелками показаны возмущения скорости основного течения. Давление повышается в точках *a* и понижается в точках *b*.

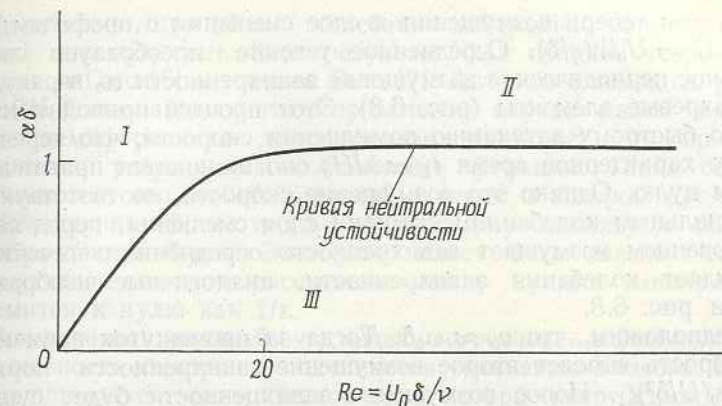


Рис. 6.7. Диаграмма устойчивости слоя смешения толщиной δ . I — область вязкого демпфирования; II — область демпфирования Ландау; III — область неустойчивости Гельмгольца.

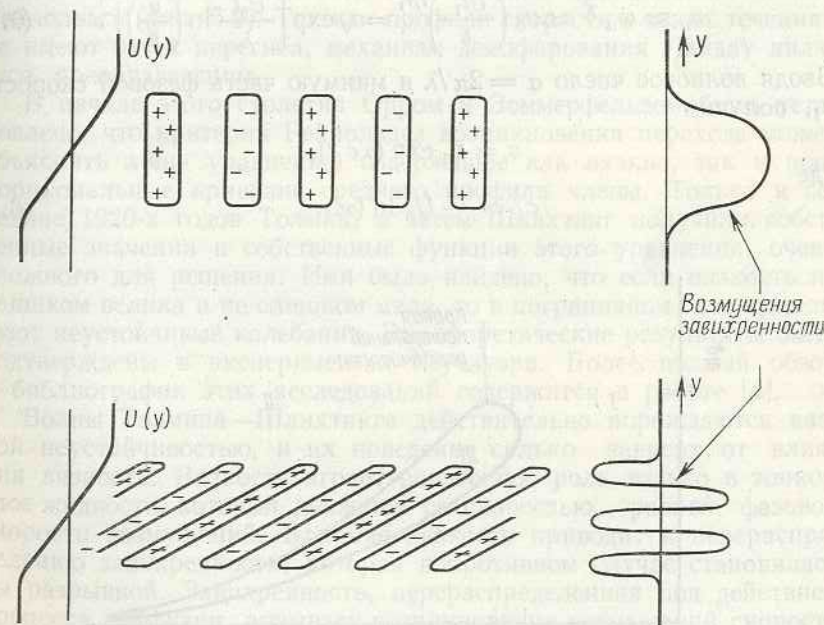


Рис. 6.8. Механизм демпфирования Ландау в слое смешения.

Вверху изображено начальное возмущение завихренности, внизу — распределение завихренности в последующий момент времени, полученное без учета определяющего ее генерацию члена в уравнении (6.1). Вследствие «дробления» вихрей возникшее потенциальное течение быстро затухает. Перед своим исчезновением оно генерирует новое возмущение завихренности периодического типа.

Рассмотрим теперь возмущения в слое смещения с профилем скорости $U = U_0 \text{th}(y/\delta)$. Осредненное течение преобразует любое начальное периодическое возмущение завихренности ω_0 в регулярные вихревые элементы (рис. 6.8). Этот процесс приводит к настолько быстрому затуханию возмущения скорости, что через некоторое характерное время $t_1 \approx \lambda/U_0$ оно становится практически равным нулю. Однако это возмущение скорости, соответствующее потенциальным колебаниям снаружи слоя смещения, перед своим исчезновением возмущает завихренность осредненного течения и возбуждает колебания завихренности, аналогичные изображенным на рис. 6.8.

Предположим, что $v_0 \approx \omega_0 \delta$. Тогда за промежуток времени t_1 эта скорость вызовет второе возмущение завихренности порядка $\omega_1 \approx v_0(U/\delta^2)t_1$. Новое возмущение завихренности будет существовать до тех пор, пока основное течение не раздробит его снова на дискретные вихри. Этот процесс повторяется и за время $t = nt_1$ приводит к результату, который можно приближенно оценить следующим образом:

$$v_n \approx \omega_n \delta \approx v_0 \left(\frac{Ut_1}{\delta} \right)^{n/t_1} = v_0 \exp \left[\frac{U_0 t}{\lambda} \ln \left(\frac{y}{\delta} \right) \right]. \quad (6.4)$$

Вводя волновое число $\alpha = 2\pi/\lambda$ и мнимую часть фазовой скорости c_i , получим

$$\begin{aligned} v &= v_0 \exp(\alpha c_i t), \\ c_i &= -U_0 \ln(\alpha \delta). \end{aligned} \quad (6.5)$$

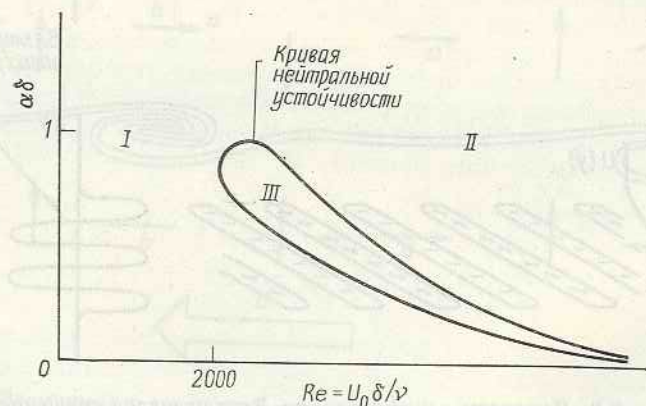


Рис. 6.9. Диаграмма устойчивости течения в пограничном слое.
I — вязкое демпфирование; II — демпфирование Ландау; III — неустойчивость Толмина — Шлихтинга.

Следовательно, при $\alpha \delta = 1$ колебания нейтрально устойчивы. При $\alpha \delta > 1$ они затухают. Этот результат был получен теоретически Тацуми и Гото [6] и уточнен Гото [7]. Автором с помощью расчета на ЭВМ было найдено, что в предельном случае малой вязкости такое демпфирование действительно возникает, но при этом становятся разрывными собственные функции. Таким образом, оказывается, что любой невязкий процесс, в котором происходит дробление вихрей, не поддается обычному анализу с помощью преобразований Фурье. Этот факт может быть связан с тем, что в отсутствие вязкости расстояние между нулями завихренности стремится к нулю как $1/t$.

Аналогичная по своей сути задача встретилась в физике плазмы, где плотность электронов подчиняется уравнению Власова. В плазме индуцируется электрическое поле, которое посредством взаимодействия со средним профилем вызывает новые возмущения плотности электронов. Ландау [8, 9], используя переход в комплексную плоскость, решил эту задачу аналитически.

Возвращаясь теперь к течениям в пограничных слоях, можно понять причину устойчивости этих течений при больших числах Рейнольдса (рис. 6.9). Так как профили скорости в таких течениях не имеют точек перегиба, механизм демпфирования Ландау является преобладающим.

В начале этого столетия Орром и Зоммерфельдом было установлено, что критерий Рейнольдса возникновения перехода может объяснить лишь уравнение, содержащее как вязкие, так и пропорциональные кривизне среднего профиля члены. Только в середине 1920-х годов Толмин, а затем Шлихтинг получили собственные значения и собственные функции этого уравнения, очень сложного для решения. Ими было найдено, что если вязкость не слишком велика и не слишком мала, то в пограничном слое существуют неустойчивые колебания. Эти теоретические результаты были подтверждены в экспериментах Шубауэра. Более полный обзор и библиография этих исследований содержится в работе [4].

Волны Толмина — Шлихтинга действительно порождаются вязкой неустойчивостью, и их поведение сильно зависит от влияния вязкости. Вязкость играет решающую роль только в тонком слое жидкости, который движется со скоростью, равной фазовой скорости возмущений. Влияние вязкости приводит к перераспределению завихренности, которая в противном случае становилась бы разрывной. Завихренность, перераспределенная под действием процесса диффузии, вызывает возникновение возмущений скорости определенного типа. Таким образом, вязкость приводит к возникновению добавочного движения, которое не совпадает по фазе с основными колебаниями, и это является причиной неустойчивости течения в пограничном слое. Сдвиг фазы завихренности вызывает определенные возмущения скорости, которые в свою очередь при-

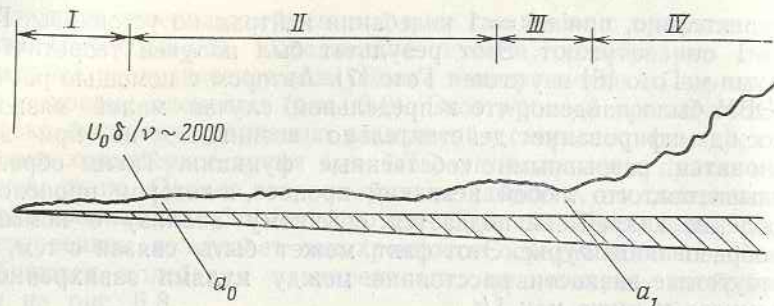


Рис. 6.10. Неустойчивый пограничный слой на плоской пластине.

Линейный процесс развития возмущений готовит течение к переходу в турбулентное (I — область устойчивого течения; II — область линейного развития неустойчивых возмущений; III — область нелинейного развития возмущений; IV — область турбулентного течения; a_0 — начальная амплитуда возмущений; a_1 — амплитуда возмущений, вызывающих переход).

водят к возникновению напряжений Рейнольдса. Напряжения Рейнольдса передают энергию от основного течения к возмущениям. Критический слой очень тонок, и рост или затухание волны сильно зависят от местоположения этого слоя. Вероятно, он является той частью пограничного слоя, которая наиболее чувствительна к случайным возмущениям. Располагается он на некотором расстоянии от стенки. Вероятно, внутри критического слоя впервые начинают проявляться нелинейные эффекты, однако этот процесс остается еще мало исследованным.

Описанный метод исследования устойчивости был распространен на другие течения, и результаты его применения в случае течения Пуазейля в плоском канале вызвали серьезные споры, которые нельзя разрешить до тех пор, пока ЭВМ не станут более мощными.

Кроме того, экспериментаторы указывают, что эти колебания, являясь очень низкочастотными и длинноволновыми, не имеют никакого сходства с турбулентностью. Вязкая неустойчивость, возникающая при числах Рейнольдса порядка 10^3 , только «подготавливает» течение для более сильных возмущений (рис. 6.10).

Из изложенного становится ясно, что уравнение Орра—Зоммерфельда не описывает всех явлений в области перехода, и проблема остается пока нерешенной.

6.3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСКОЛЬКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ

С целью проверки теоретических выводов Толмина проводились экспериментальные исследования. Клебановым и др. [10] было найдено, что при достижении некоторой амплитуды колебаний

в вязком течении появляются первые признаки турбулентности. Сначала осциллограммы колебаний скорости обнаруживают изолированные и острые пики, соответствующие одиночным возмущениям. Затем ниже по течению появляются пары таких пиков, а вскоре вслед за этим — большие группы их, которые постепенно превращаются в турбулентные пятна (рис. 6.11). Эммонс [11] при наблюдениях перехода в слое воды, стекающей с наклонной пластины, заметил, что турбулентность начинается в клиньях, которые затем постепенно расширяются в поперечном направлении (рис. 6.12).

Такое поведение течения в области перехода было неожиданным, поскольку оно не совпадало с общепринятыми взглядами. Ричардсон описывал турбулентность как каскадный процесс, в котором большие вихри порождают все более мелкие вихри до тех пор, пока вязкость не прекращает этого процесса. Находясь под впечатлением эффектных достижений линейных методов, математики при решении этой задачи до настоящего времени не могут отказаться от применения преобразования Фурье и подобных ему разложений в надежде, что в конце концов они везде будут сходиться и хорошо описывать реальные процессы. Типичный пример такой уверенности в применимости принципа суперпозиции можно найти в книге Л. Ландау и Е. Лифшица [12]: «При дальнейшем увеличении

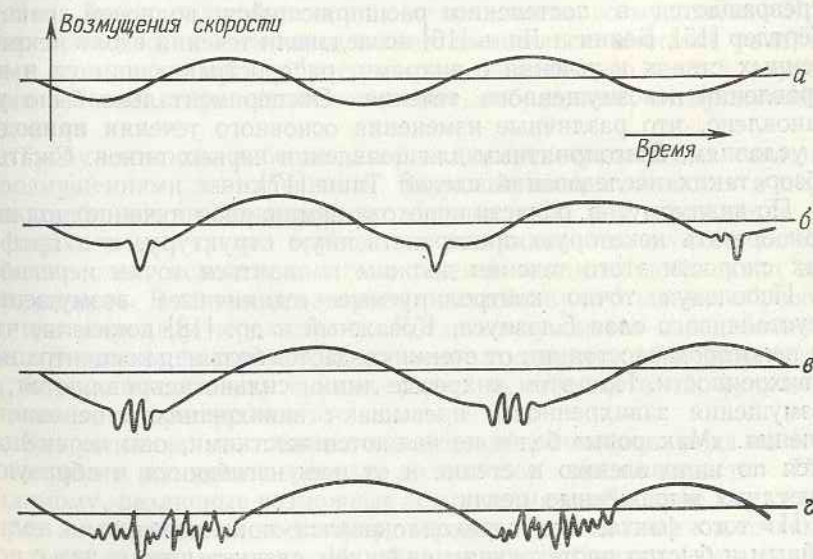


Рис. 6.11. Флуктуации скорости в колеблющемся пограничном слое. а — течение до области перехода; б, в — первые признаки перехода; г — течение внутри области перехода.

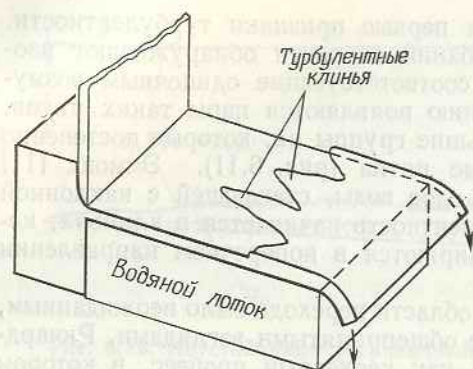


Рис. 6.12. Переход в ламинарном пограничном слое. Свободная поверхность водного потока показывает нерегулярную форму границы, разделяющей ламинарное и турбулентное течение, и важное явление образования турбулентных клиньев.

числа Рейнольдса появляются последовательно все новые и новые периоды... Что касается самих вновь появляющихся движений, то они имеют все более мелкие масштабы...».

Поэтому теоретические исследования продолжали развиваться в этом направлении и были обобщены на случай волн, распространяющихся под углом к направлению течения (такие волны впервые изучались Сквайром [13], а затем Криминале и Коважным [14], показавшими, как первоначально локализованное возмущение превращается в постепенно расширяющийся волновой пакет). Гёртлер [15], Бенни и Линь [16] исследовали течения вдоль искривленных стенок и течения с вихрями, распространяющимися в направлении невозмущенного течения. Экспериментально было установлено, что различные изменения основного течения приводят к условиям, благоприятным для появления первых пиков. Сжатый обзор таких исследований сделал Тани [17].

По-видимому, в области перехода ламинарное течение должно приобретать некоторую пространственную структуру, а в профилях скорости этого течения должны появляться точки перегиба.

Используя точно контролируемые «единичные» возмущения неустойчивого слоя Блазиуса, Коважный и др. [18] показали, что на некотором расстоянии от стенки создается большая концентрация завихренности. При этом вихревые линии сильно искривляются, а возмущения завихренности превышают завихренность основного течения. «Макароны» более не являются жесткими, они перемещаются по направлению к стенке и от нее, изгибаются и образуют отчетливо выраженные петли.

Из того факта, что переход оказался локализованным нелинейным и быстро протекающим явлением, следует, что анализ с помощью преобразования Фурье не был подходящим инструментом для исследования явлений этого типа. Его нельзя описать с помощью нескольких синусоидальных составляющих; вместо них необходимо

исследовать волны, фазы которых определенным образом согласованы.

К сожалению, когда теоретики вынуждены были расстаться со столь любимым ими инструментом исследований, экспериментаторы достигли предела применимости своих приборов. Любой термоанемометр возмущает течение, и поэтому на практике нельзя одновременно проводить измерения в точках, одна из которых лежит ниже другой по течению.

6.4. РОСТ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Теперь необходимо проанализировать важное направление исследований, лежащее несколько в стороне от вышеописанных. А. Смит [19] изучал суммарное усиление простых возмущений вследствие неустойчивости Толмина—Шлихтинга от точки нейтральной устойчивости до области, где течение становится полностью турбулентным. Исследование различных течений, основанное на многочисленных расчетах устойчивости течений с различными профилями скорости, показывает, что начальное возмущение может возрастать в e^9 , или примерно в 8000 раз. Погрешность в определении показателя экспоненты составляет около $\pm 0,5$. Для использования в практических расчетах эта точность представляется достаточной.

Этот вывод поднимает вопрос о начальных возмущениях. Хорошо известно, что переход может вызываться многими различными возмущениями: турбулентностью набегающего потока, звуковыми волнами, шероховатостью стенки, вибрациями, возмущениями энтропии и т. п.

Турбулентность набегающего потока непосредственно связана с возмущениями завихренности. Звуковые волны являются в первом приближении безвихревыми; однако когда они отражаются от твердых стенок, трение приводит к возникновению особого пограничного слоя, вследствие чего в течение вводится добавочная завихренность. Возмущения энтропии воздействуют главным образом на теплопередачу через стенку. Когда возмущаются как давление, так и энтропия, ускорение, создаваемое градиентом давления, нельзя больше представить в виде градиента от некоторой функции, и возникает завихренность.

Как сопоставлять влияние возмущений различного вида на возникновение процесса перехода, до сих пор еще не известно. По-видимому, различные возможные возмущения необходимо выражать через завихренность, поскольку, вероятно, она является ключевым фактором в этом процессе. Из обнаруженного Смитом факта сохранения приблизительно постоянным коэффициента суммарного усиления следует, что если соответствующими мерами устранить главные возмущения, то суммарное влияние всех оставшихся возму-

щений должно быть эквивалентно некоторому однородному фону возможных начальных возмущений. Поскольку большинство процессов усиления следует экспоненциальному закону, а турбулентность возникает, когда амплитуда возмущений достигает определенного уровня a_1 (около 1% завихренности невозмущенного течения), основное соотношение имеет вид

$$a_0 e^G = a_1, \quad (6.6)$$

где a_0 — амплитуда начальных возмущений, а e^G — коэффициент усиления. Отметим, что для того чтобы получить то же самое значение a_1 при уменьшении a_0 в 2 раза, потребуется возрастание G от 9 до 9,7. Отсюда следует, что величину a_0 необходимо определять достаточно хорошо.

Могут ли тепловые колебания создать постоянный уровень возмущений? В газе каждая молекула имеет случайно направленную скорость порядка скорости звука c . Небольшое облачко, состоящее из N молекул, находится в групповом движении, возмущения скорости которого имеют порядок $cN^{-1/2}$. Кроме того, в облачке происходит броуновское движение с кинетической энергией $\frac{1}{2}kT$ на одну степень свободы. Следовательно, в газе существуют тепловые возмущения с любым характерным размером. Это же свойственно жидкостям, однако к подсчету степеней свободы здесь необходимо относиться более осторожно. Спектр тепловых возмущений скорости рассматривался в книге Л. Ландау и Е. Лифшица [12], а позже был рассчитан Бетчовом [20]. Уровень присутствующей во всех течениях турбулентности в случае облачка газа или сгустка жидкости, образованного N молекулами, имеет порядок приблизительно $(c/U)N^{-1/2}$. В него входят и возмущения завихренности.

При $G = 9$ и $a_1 = 10^{-2}$ начальная амплитуда a_0 должна быть равна 10^{-6} . Заметим, что отношение U/c является просто числом Маха, и примем $U/c = 0,03$. Это приводит к значению $N = 10^{14}$ или приблизительно 10^{-9} моля. В земной атмосфере ему соответствует куб со стороной около 0,3 мм. Применительно к волнам Толмина—Шлихтинга такой порядок имеет толщина критического слоя, т. е. часть пограничного слоя, в которой возмущения завихренности перераспределяются под действием вязкости.

Может ли броуновское движение в действительности порождать волны Толмина—Шлихтинга и вследствие этого быть причиной перехода? Во-первых, тепловые колебания представляются слишком слабыми, чтобы приводить к существенно двумерным процессам. Для заполнения всего критического слоя требуется слишком много таких малых кубов. До тех пор, пока не проинтегрировано неоднородное уравнение Орра—Зоммерфельда и не проанализированы связи между шумом и медленно затухающими внешними колебаниями, нельзя легко разрешить поставленный вопрос.

Подробное изучение рассматриваемых проблем и анализ экспе-

риментальных данных продолжил Цуге [21]. Приближенное исследование процесса перехода в слое смешения позволило получить число Рейнольдса перехода, равное 150 [5].

6.5. ВОЗМУЩЕНИЯ С БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДОЙ В ПРОСТЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В настоящее время мы находимся только на пороге исследований сильных возмущений в простых течениях. Возможно, что, за исключением некоторых важных положений, их еще слишком рано описывать. По-видимому, такие исследования будут в основном опираться на использование вычислительной техники. Нет никаких сомнений, что наступит время, когда термоанемометр и(или) лазер откроют новые возможности исследований. Для подробного численного моделирования течения в процессе перехода, так же как и для метеорологических исследований, требуются искусное программирование и использование большого количества узловых точек.

Внимание некоторых исследователей было сосредоточено на простых течениях с большой концентрацией завихренности. Связь между скоростью и завихренностью подвергается изучению уже много лет. Если завихренность сосредоточена на единственной линии тока, то скорость определяется с помощью интеграла Био и Савара:

$$v = c_0 \int \frac{(\omega \times r)}{r^3} dr. \quad (6.7)$$

До тех пор пока вихревая линия остается прямой, для расчетов не требуется использование ЭВМ. На рис. 6.13 показан случай прямой вихревой линии. Вихревую линию необходимо рассматривать как нить конечного радиуса a (т. е. определенной толщины), поскольку в противном случае как скорость, так и кинетическая энергия в центре ее были бы бесконечными. Под влиянием собственной завихренности вихревой элемент вращается, но не перемещается поступательно.

Если вихревой элемент образует окружность радиуса R , то индуцированная им скорость заставляет двигаться сам вихрь. Примером являются знакомые всем кольца дыма. Скорость поступательного движения вихря была определена Прандтлем:

$$v = \frac{a^2 \Omega}{2R} \ln \left(\frac{6R}{a} \right). \quad (6.8)$$

Отметим, что если $a \rightarrow 0$, то $v \rightarrow \infty$. Причиной этого эффекта является то, что движение вихревого элемента происходит под действием его частей, отклонившихся от положения на общей прямой

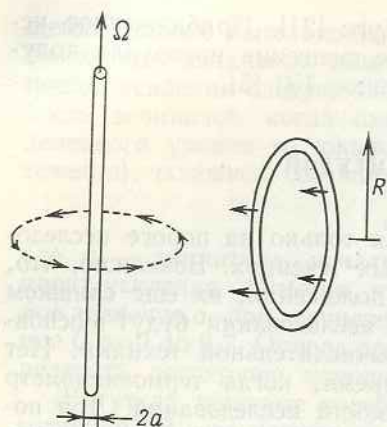


Рис. 6.13. Прямолинейный и круговой вихревые элементы. Стрелки на круговых контурах указывают направление индуцированных скоростей.

линии. Для вихревого элемента произвольной формы Армс (неопубликованное сообщение) предложил использовать уравнение (6.8) с локальным радиусом кривизны. При этом предполагается, что круговые и спиральные вихревые линии сохраняют свою форму в процессе поступательного движения, а все другие различным образом искажаются. Вихревой элемент с переменной кривизной, первоначально расположенный на плоскости, будет затем свертываться. Этот процесс свертывания исследовал Хама [22]. Позднее Бетчов [23] изучил связь между свертыванием и кривизной, а Хасимото [24] показал, что кривизну и свертывание можно объединить в комплексной функции, удовлетворяющей единственному уравнению, аналогичному уравнению Шредингера для уединенных частиц. Это нелинейное уравнение уже привлекло внимание физиков, исследовавших частицы высоких энергий (уравнение Кортевега—де Фриза). Замечательным свойством этого уравнения является то, что некоторые решения его распространяются вдоль первоначально прямолинейного элемента без изменения своей формы. Эти решения в квантовой механике называются «солитонами», когда они описывают устойчивые изолированные частицы.

В гидродинамике это означает, что начальное малое возмущение прямолинейного вихревого элемента может привести к появлению двух спиралевидных возмущений, распространяющихся в обе стороны. С помощью численного решения нетрудно воспроизвести такие наблюдения, однако сильная неустойчивость вычислений препятствует более детальному исследованию (рис. 6.14).

Что же происходит в случае большого начального возмущения? Может ли такое возмущение создавать пару спиралевидных возмущений, становящихся устойчивыми? Может ли вихревая линия на этой начальной стадии самопересекаться? В случае прохождения

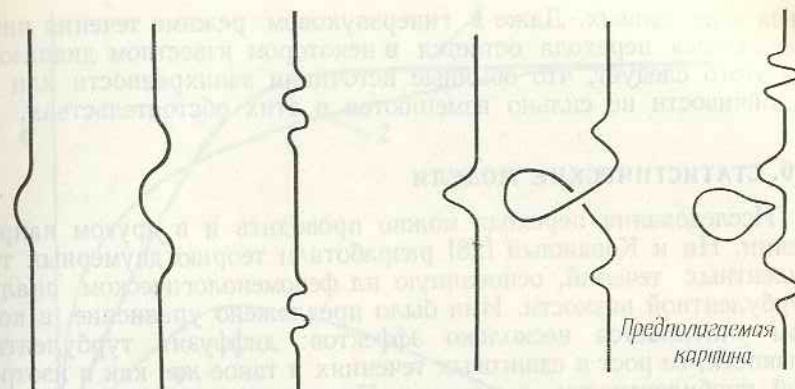


Рис. 6.14. Малое возмущение прямолинейного вихревого элемента.

Простой начальный выгиб (слева) без кручения приводит к возникновению двух спиралевидных возмущений, которые расходятся в противоположные стороны по вихревому элементу.

Рис. 6.15. Большое возмущение прямолинейного вихревого элемента.

Весьма возможно, что вихревой элемент самопересекается, а вязкость может приводить к отделению образовавшейся петли, которая уносится потоком.

друг через друга двух различных частей вихревого элемента решающую роль будут снова играть вязкие эффекты. Недавно Леонард [25] исследовал такие случаи и установил, что два вихревых элемента могут пересекаться. Из этого следует, что замкнутый вихрь может отделяться от первоначального вихревого элемента и уноситься от него на большое расстояние (рис. 6.15).

В процессе развития механики жидкости были введены многие основные понятия, которые сыграли важную роль в других областях физики. Термины «плотность», «ток» и «волна», которые сейчас часто употребляются в электродинамике и квантовой механике, имеют один и тот же общий источник — гидродинамику. Возможно, что кольцевой вихрь и солитон продолжают эту традицию.

Еще более сложной проблемой является переход в течениях сжимаемой жидкости. При больших числах Маха начинают влиять новые факторы: теплопередача и градиенты энтропии. Когда одновременно изменяются энтропия и давление, в картину перехода вносится новый источник завихренности. Более того, в течениях сжимаемой жидкости энергия может переноситься звуковыми волнами со скоростью, присущей распространению волны. Как показано на примере Маком [26], эти факторы сильно увеличивают вероятность возникновения неустойчивых колебаний. В детальном обзоре проблемы, выполненном Морковиным [27], не только показаны трудности интерпретации большого количества экспериментальных данных, но и предлагается основной параметр для ана-

лиза этих данных. Даже в гиперзвуковом режиме течения число Рейнольдса перехода остается в некотором известном диапазоне. Из этого следует, что обычные источники завихренности или неустойчивости не сильно изменяются в этих обстоятельствах.

6.6. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Исследования перехода можно проводить и в другом направлении. Ни и Коважный [28] разработали теорию двумерных турбулентных течений, основанную на феноменологическом анализе турбулентной вязкости. Ими было предложено уравнение, в котором учитывается несколько эффектов: диффузия турбулентной вязкости, ее рост в сдвиговых течениях и такое же, как в изотропной турбулентности, затухание. Применение этой модели к полностью развитым турбулентным течениям было очень успешным.

Недавно Ни (частное сообщение) использовал этот метод для расчета течения в области перехода. Начиная расчет с профиля Блазиуса при критическом числе Рейнольдса и при нулевой (за исключением малого начального возмущения) турбулентной вязкости, он использовал численный метод для исследования последующего поведения течения. Пограничный слой является наиболее чувствительным к возмущениям, которые вводятся в окрестности критического слоя. Турбулентная вязкость постепенно растет, начиная с произвольного начального уровня, равного 10% молекулярной вязкости. Наиболее сильно она увеличивается в окрестности стенки, что быстро приводит к изменению основного течения. Затем область влияния отодвигается от стенки, и профиль скорости приобретает форму, классическую для турбулентных течений. Этот метод обладает одним заслуживающим внимания свойством: с его помощью получается резкая граница между турбулентным и ламинарным течениями, которую часто называют «супер-слоем». Поперек этого «супер-слоя» быстро исчезает турбулентная вязкость.

На рис. 6.16 показаны профили скорости и турбулентной вязкости в ламинарном течении и турбулентном течении, соответствующем возрастанию турбулентной вязкости в 60 раз по отношению к молекулярной.

Кривые в случае турбулентного течения соответствуют местоположению, в котором число Рейнольдса равнялось бы 4000, если бы слой оставался ламинарным. Далее вниз по течению турбулентная вязкость продолжает расти вплоть до уровня, превышающего молекулярную вязкость примерно в 200 раз. Заметно наличие пристеночной области, где турбулентная вязкость возрастает линейно.

Поскольку описанная модель является существенно двумерной, она не описывает ни турбулентных клиньев, ни пятен. Перед тем

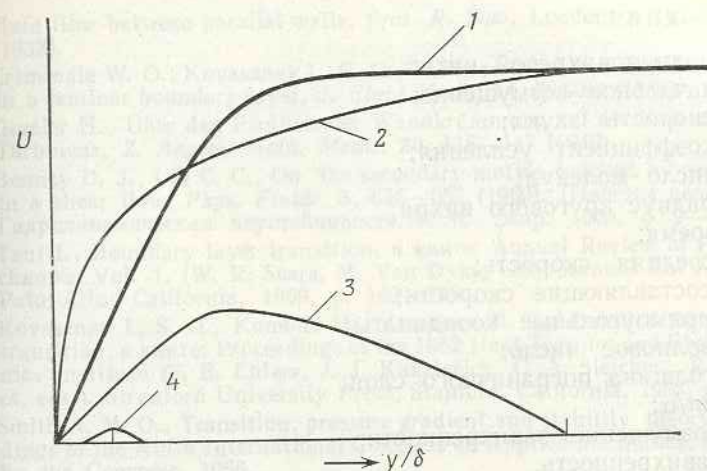


Рис. 6.16. Двумерная модель процесса перехода (по В. Ни). Для турбулентной вязкости ν_e постулируется уравнение переноса.

Первоначальное ламинарное течение быстро преобразуется в течение с профилем скорости, характерным для турбулентности, причем турбулентная вязкость быстро растет. 1 — профиль Блазиуса при $Re \approx 2000$; 2 — профиль турбулентного пограничного слоя; 3 — $\nu_e \approx 60\nu_m$; 4 — начальный профиль завихренности, $\nu_e \approx 0,1\nu_m$.

как распространить ее на случай пространственных процессов, необходимо обобщить уравнение для турбулентной вязкости, чтобы учесть влияние изменений течения в поперечном направлении. Поскольку процесс распространения турбулентности в этом направлении недостаточно понятен, решить такую задачу не просто; по-видимому, для этого потребуются некоторые экспериментальные данные. Возможно, что ключом к решению этой задачи окажется исследование простых возмущений, вносимых одной или несколькими вихревыми линиями.

6.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Медленно, но уверенно, шаг за шагом объединяются в единое целое отдельные аспекты теории перехода. Временами кажется, что прогресс остановился. Но в этих перерывах в развитии часто происходят разработка новых методов и пересмотр устаревших взглядов. Понадобилось столетие для достижения современного уровня понимания явления перехода, и нет никаких сомнений, что нас ожидает еще больше открытий в этой области.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — радиус вихревой нити;
 a_0 — начальное возмущение;
 c — скорость звука;
 G — коэффициент усиления;
 N — число молекул;
 R — радиус кругового вихря;
 t — время;
 U — средняя скорость;
 u, v — составляющие скорости;
 x, y — прямоугольные координаты;
 α — волновое число;
 δ — толщина пограничного слоя;
 $\lambda = 2\pi/\alpha$;
 ω — возмущение завихренности;
 Ω — завихренность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hama F. R., Streaklines in a perturbed flow, *Phys. Fluids*, 5, 644—650 (1962).
2. Helmholtz H. von, Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, *Akad. Wiss.*, Berlin, April, 215 (1868). [Имеется перевод: Гельмгольц Г., Два исследования по гидродинамике, СПб, 1902.]
3. Rosenhead L., The formation of vortices from a surface of discontinuity, *Proc. R. Soc., London*, A134, 170—192 (1932).
4. Betchov R., Criminale W. O., Stability of Parallel Flow, Academic Press, New York, 1967. [Имеется перевод: Бетчов Р., Криминале В., Вопросы гидродинамической устойчивости. — М.: Мир, 1971.]
5. Betchov R., Szewczyk A., Stability of a shear layer between parallel streams, *Phys. Fluids*, 6, 1391—1396 (1963).
6. Tatsumi T., Gotoh D., The stability of free boundary layers between two uniform streams, *J. Fluid Mech.*, 7, 433—441 (1960).
7. Gotoh D., The damping of the large wave number disturbances in a free boundary layer flow, *J. Phys. Soc. Japan*, 20, 164—169 (1965).
8. Ландау Л. Д., О колебаниях электронной плазмы, *ЖЭТФ*, 1946, 16, 574.
9. Stix T. H., The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill Book Co., New York, 1962. [Имеется перевод: Стикс Т. Х., Теория плазменных волн. — М.: Госатомиздат, 1965.]
10. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M., The three-dimensional nature of boundary layer instability, *J. Fluid Mech.*, 12, 1—34 (1962).
11. Emmons H. W., The laminar-turbulent transition in a boundary layer—Part I, *J. Aeronaut. Sci.*, 18, 490—498 (1951).
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред. — М.: ГИТТЛ, 1953.
13. Squire H. B., On the stability for three-dimensional disturbances of viscous

- fluid flow between parallel walls, *Proc. R. Soc., London*, A 142, 621—628 (1933).
14. Criminale W. O., Kovaszny L. S. G., The growth of localized disturbances in a laminar boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 14, 59—80 (1962).
 15. Görtler H., Über den Einfluss der Wandkrümmung auf die Entstehung der Turbulenz, *Z. Angew. Math. Mech.*, 20, 138—147 (1940).
 16. Benney D. J., Lin C. C., On the secondary motion induced by oscillations in a shear flow, *Phys. Fluids*, 3, 656—657 (1960). [Имеется перевод: сб. Гидродинамическая неустойчивость. — М.: Мир, 1964, с. 9—36.]
 17. Tani I., Boundary layer transition, в книге: Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 1, (W. R. Sears, M. Van Dyke, eds), Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, 1969, p. 169—196.
 18. Kovaszny L. S. G., Komoda H., Vasudeva B. R., Detailed flow field in transition, в книге: Proceedings of the 1962 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute (F. E. Ehlers, J. J. Kauzlarich, C. A. Sleicher, R. E. Street, eds), Stanford University Press, Stanford, California, 1962, p. 1—26.
 19. Smith A. M. O., Transition, pressure gradient and stability theory, Proceedings of the Ninth International Congress on Applied Mechanics, Published by the Congress, 1956.
 20. Betchov R., Thermal Agitation and Turbulence, в книге: Proceedings of the Second International Symposium on Rarefied Gas Dynamics (L. Talbot, ed.), Academic Press, New York, 1961, p. 307—321.
 21. Tsugé S., Approach to the origin of turbulence on the basis of two-point kinetic theory, *Phys. Fluids*, 17, 22—23 (1974).
 22. Hama F. R., Progressive deformation of a perturbed line vortex filament, *Phys. Fluids*, 6, 526—534 (1963).
 23. Betchov R., On the curvature and torsion of an isolated vortex filament, *J. Fluid Mech.*, 22, 471—479 (1965).
 24. Hasimoto H., A soliton on a vortex filament, *J. Fluid Mech.*, 51, 477—485 (1972).
 25. Leonard A., Numerical simulation of interacting three-dimensional vortex filaments, Proceedings of the Fourth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics (R. D. Richtmeyer, ed.), Springer, Berlin (1975).
 26. Mack L. M., Boundary layer stability theory, Jet Propulsion Laboratory, California, Institute of Technology report № 900-277, 1969.
 27. Morkovin M., On the many faces of transition, в книге: Symposium on Viscous Drag Reduction (S. Wells, ed.), Plenum Press, New York, 1969, p. 1—31.
 28. Nee V. W., Kovaszny L. S. G., Simple phenomenological theory of turbulent shear flows, *Phys. Fluids*, 12, 473—484 (1969).

Турбулентные процессы и простые схемы замыкания

Р. ДЕЙССЛЕР¹⁾

7.1. ВВЕДЕНИЕ

Происхождение проблемы замыкания обсуждалось в ряде предыдущих глав этой книги. В настоящей главе дается краткий обзор этой проблемы и вводятся простые схемы замыкания, позволяющие получить решения некоторых простейших задач. Эти решения будут использоваться для иллюстрации процессов, происходящих в турбулентных течениях. Затем будет рассмотрен метод замыкания в задачах с известными начальными условиями. Наконец, будут описаны инженерные схемы замыкания для более сложных задач, таких, как течения в пограничных слоях и трубах.

7.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Чтобы проиллюстрировать важность процессов диссипации и переноса энергии турбулентности в пространстве волновых чисел или между вихрями различных размеров, рассмотрим сначала статистически однородное поле турбулентности в отсутствие градиентов средней скорости. Такая турбулентность с течением времени вырождается, так как в системе отсутствует подвод энергии; следовательно, нужно рассмотреть задачу с известными начальными условиями. Начальное состояние турбулентности должно создаваться с помощью каких-либо устройств; примером является турбулентное течение за сеткой.

Сначала запишем уравнения Навье — Стокса для двух произвольных точек P и P' , расположенных в поле турбулентности и разделенных вектором $\vec{r}$ (см. рис. 7.1; индексы в приведенных там уравнениях могут принимать значения 1, 2 или 3 и по повторяющимся индексам в каждом слагаемом подразумевается суммирование, не указываемое явно; величины u_i и u_j являются составляющими

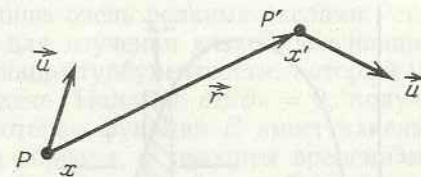


Рис. 7.1. Двухточечные корреляционные уравнения.

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right] u'_j;$$

$$\left[\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \frac{\partial (u'_j u'_k)}{\partial x'_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x'_k \partial x'_k} \right] u_i;$$

$$\frac{\partial \overline{u_i u'_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_h} \left[\overline{u_i u'_j u'_h} - \overline{u_i u'_h u'_j} \right] = - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \overline{p' u_i}}{\partial r_j} - \frac{\partial \overline{p u'_j}}{\partial r_i} \right] +$$

$$+ 2\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u'_j}}{\partial r_h \partial r_h}.$$

мгновенной скорости течения, x_i — пространственная координата, t — время, ρ — плотность, ν — кинематический коэффициент вязкости, p — мгновенное давление). Затем умножим уравнение, записанное для точки P , на составляющую скорости в точке P' , а уравнение, записанное для точки P' , — на составляющую скорости в точке P , сложим результаты, осредним и получим уравнение, содержащее корреляции скоростей и давлений в точках P и P' (см. последнее уравнение к рис. 7.1) [1]. Кроме двойных корреляций скорости в этом уравнении имеются корреляции скорости с давлением и тройные корреляции скорости. Полученное уравнение можно записать в спектральной форме, применяя к нему трехмерное преобразование Фурье и полагая $i = j$ (это первое уравнение к рис. 7.2, где κ — волновое число, E — энергетический спектр и W — член, характеризующий перенос энергии, обусловленный тройными корреляциями скорости [1]). Отметим, что при таком преобразовании уравнение в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение. Физический смысл различных членов этого спектрального уравнения можно выяснить, умножая его на $d\kappa$ (ширину полосы в пространстве волновых чисел, см. рис. 7.2). Энергетический спектр E учитывает вклады вихрей различных размеров в полную энергию турбулентности. Следовательно, площадь под спектральной кривой равна полной энергии турбулентности $\overline{u_i u_i}/2$. В левой части спектрального уравнения для заштрихованной полосы волновых чисел записана скорость

¹⁾ R. G. Deissler, Lewis Research Center, National Aeronautics and Space Administration, Cleveland, Ohio 44135.

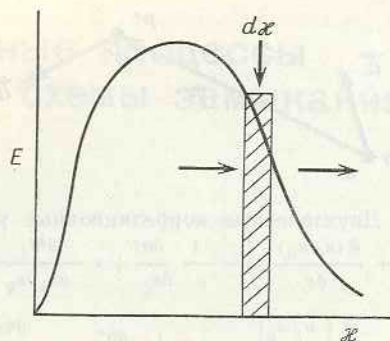


Рис. 7.2. Энергетический спектр и спектральные уравнения.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = W - 2\nu k^2 E; \quad \frac{\partial (Edx)}{\partial t} = W dx - 2\nu k^2 E dx;$$

$$\int_0^\infty E dx = \frac{\overline{u_i u_i}}{2} = \frac{1}{2} \left[\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2} \right];$$

для слабой турбулентности: $E = J_0 k^4 \exp[-2\nu k^2 (t - t_0)]$.

изменения энергии турбулентности в этой полосе. Первый член в правой части $W dx$ характеризует суммарную скорость подвода энергии в эту полосу волновых чисел за счет нелинейных эффектов, т. е. тройных корреляций скорости (рис. 7.1). Наконец, последний член $2\nu k^2 E dx$ определяет скорость диссипации энергии турбулентности в рассматриваемой полосе волновых чисел за счет вязкости. В противоположность члену, характеризующему перенос энергии, диссипативный член всегда отрицателен. Отметим, что в рассматриваемом уравнении для полной энергии турбулентности, содержащейся в полосе волновых чисел dx , спектральный член, соответствующий корреляциям скорости с давлением, отсутствует. Это показывает, что корреляции скорости с давлением не оказывают влияния на скорость изменения энергии турбулентности, однако они могут вызывать перераспределение энергии по различным направлениям движения.

В спектральное уравнение входят две неизвестные величины E и W , так что без дополнительной информации его решение в общем случае невозможно. Это является, конечно, отражением проблемы замыкания в теории турбулентности и следствием нелинейности исходных уравнений Навье—Стокса. Однако в случае достаточно слабой турбулентности инерционным или переносным членом W можно пренебречь и получить при заданных начальных условиях чрезвычайно простое решение [1] (см. последнее уравнение к рис. 7.2, где J_0 и t_0 — постоянные, определяемые из начальных условий). Несмотря на то что область применимости этого решения

ограничивается лишь очень низкими числами Рейнольдса, его можно использовать для изучения вязкой диссипации — единственного процесса эволюции турбулентности, который учитывался в рассматриваемой задаче. Полагая $\partial E / \partial k = 0$, получим, что волновое число k_m , при котором функция E имеет максимум, равно $[\nu(t - t_0)]^{-1/2}$. Таким образом, с течением времени максимум энергии турбулентности сдвигается в область более низких волновых чисел, т. е. к более крупным вихрям. Физическое объяснение этого сдвига состоит в том, что более мелкие вихри вырождаются быстрее, чем более крупные, так как в вихрях меньшего размера создаются более значительные градиенты скорости (и более значительные касательные напряжения). Существенной особенностью процесса диссипации турбулентности является, по-видимому, то, что скорость диссипации всегда имеет отрицательный знак и оказывает наибольшее влияние на мелкие вихри.

Если интенсивность турбулентности не столь мала, как на конечной стадии ее вырождения, то инерционные или переносные эффекты существенны ($W \neq 0$) и их следует каким-либо образом учитывать. Способы вычисления функции переноса W предлагались многими авторами, включая Гейзенберга [2], Коважного [3] и Крейчана [4]. Число различных представлений для функции переноса практически совпадает с числом авторов, занимавшихся этой проблемой. Мы ограничимся рассмотрением простого дедуктивного метода, который по существу сводится к исследованию возмущений решения, соответствующего конечному периоду вырождения [5, 6].

С этой целью кроме двухточечных корреляций, приведенных на рис. 7.1, будут рассматриваться трехточечные и иногда четырехточечные корреляции. Соответственно можно записать уравнения Навье — Стокса для скоростей в трех или в четырех произвольно выбранных точках турбулентного потока (рис. 7.3). Затем можно получить трехточечные корреляционные уравнения, в которые будут входить трехточечные и четырехточечные корреляционные функции, и четырехточечные корреляционные уравнения, в которые будут входить четырехточечные и пятиточечные корреляционные функции. Структура этих уравнений показана в подписи к рис. 7.3. Однако число неизвестных по-прежнему будет превышать число уравнений вследствие все той же нелинейности уравнений Навье — Стокса. Эту систему уравнений можно сделать детерминированной, используя метод, аналогичный применявшемуся при исследовании конечного периода вырождения турбулентности. Однако вместо предположения об очень слабой турбулентности, которое позволяет пренебречь инерционным членом в двухточечном уравнении, мы будем предполагать теперь, что вследствие малой интенсивности турбулентности можно пренебречь инерционным членом только в уравнении высшего порядка из рассматриваемой нами системы. Кроме того, чтобы получить представление о пере-

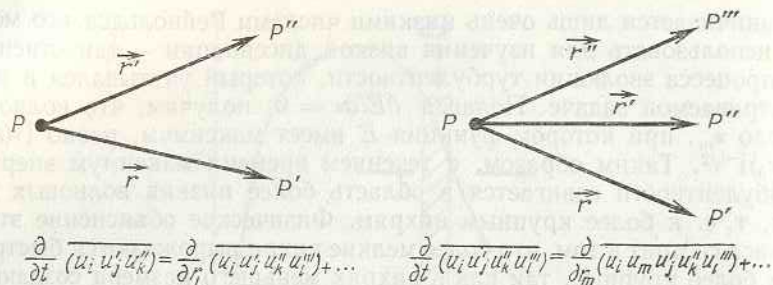


Рис. 7.3. Трехточечные и четырехточечные корреляционные уравнения.

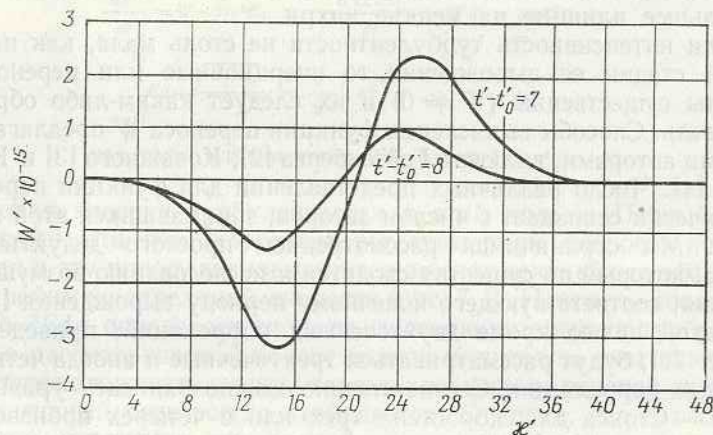


Рис. 7.4. Спектры безразмерного переноса энергии.

$$W' = J_0 W / \nu^3; \quad x' = J_0^{1/3} x / \nu^{2/3}; \quad t' = \nu^{7/3} t / J_0^{2/3} \times 10^8;$$

$t_0' = -6,33 \times 10^{-3}$. J_0 и t_0 — постоянные, входящие в начальные условия.

носных или инерционных процессах с помощью наиболее простых средств, мы будем использовать лишь двухточечные и трехточечные уравнения [5], несмотря на то что этот метод можно распространить и на четырехточечные уравнения [6]. Таким образом, пренебрегая в трехточечных уравнениях четырехточечными корреляциями, приходим к детерминированной системе уравнений, которую можно использовать на стадиях, предшествующих конечному периоду вырождения.

Полученные из этих уравнений спектры переноса энергии приведены на рис. 7.4 [5]. Они отрицательны при низких волновых

числах и положительны при более высоких волновых числах; следовательно, энергия переносится из области низких волновых чисел в область более высоких волновых чисел. Суммы площадей, описываемых этими спектральными кривыми, равны нулю, так как рассматриваемый член не оказывает влияния на скорость изменения полной энергии турбулентности. Перенос энергии в область больших волновых чисел, т. е. малых масштабов вихрей, можно рассматривать как процесс дробления больших вихрей на вихри меньшего размера или как растяжение вихревых трубок (уменьшение их диаметра).

Рассчитанные энергетические спектры, соответствующие различным моментам времени, приведены на рис. 7.5 [5]. Можно видеть, как с течением времени форма спектральных кривых изменяется и приближается к виду, характерному для конечного периода вырождения. При малых временах влияние инерционных, или переносных, членов сводится к переносу энергии в область больших волновых чисел, т. е. малых масштабов вихрей, в результате чего в области больших волновых чисел спектральные кривые оказываются менее крутыми, чем при больших временах, когда они имеют форму, более или менее близкую к синусоиде. Следовательно, роль инерционных членов в спектральных уравнениях состоит в возбуждении движений с большими волновыми числами (малыми масштабами вихрей) путем переноса энергии в соответствующие области спектра. В отсутствие инерционных эффектов эти области спектров также отсутствуют, как, например, в случае конечного периода вырождения.

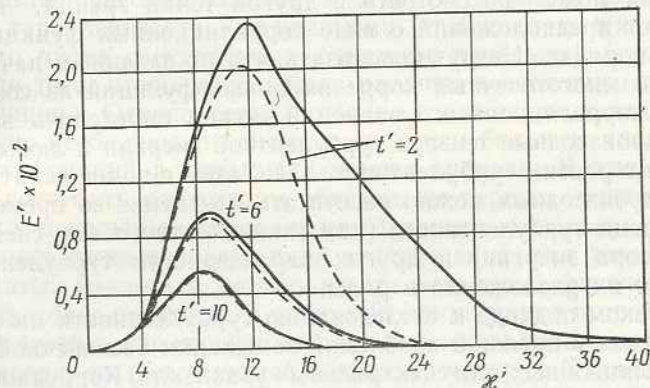


Рис. 7.5. Сопоставление безразмерных спектров до и во время конечного периода вырождения.

$$E' = J_0^{1/3} E / \nu^{8/3} \quad (\text{определение остальных величин см. рис. 7.4}).$$

— перед конечным периодом; — — в конечный период.

Перенос энергии в пространстве волновых чисел под действием инерционных и диссипативных эффектов происходит в противоположных направлениях. Однако механизмы этих двух эффектов оказываются различными. В то время как инерционные эффекты обеспечивают перенос энергии в область высоких волновых чисел путем дробления крупных вихрей на более мелкие (или же путем растяжения вихревых трубок), диссипативные эффекты приводят к сдвигу энергетического спектра в область малых волновых чисел вследствие разрушения вихрей, так как мелкие вихри диссипируют в первую очередь. По мере вырождения турбулентности диссипативные эффекты должны, конечно, становиться преобладающими, так как при низких числах Рейнольдса, соответствующих большим временам, влияние инерционных эффектов становится пренебрежимо малым.

Прежде чем переходить к исследованию влияния градиентов средней скорости на развитие турбулентности, необходимо кратко рассмотреть метод замыкания в задачах с известными начальными условиями. Заметим, что в рассмотренных выше методах замыкания по мере того, как вводится все большее число точек в поле турбулентности, т. е. повышается порядок корреляционных уравнений, приходится задавать все большее число начальных условий, определяющих решение системы уравнений (так как число зависимых переменных увеличивается). Кроме того, необходимо замкнуть систему, используя какие-либо предположения о корреляционных функциях наивысшего порядка. Если можно задать большое число начальных условий, что, конечно, необходимо для полной определенности задачи об эволюции турбулентности [1], то проблему замыкания можно рассмотреть с другой точки зрения, которая не требует предположений о виде корреляционных функций наивысшего порядка. Нетрудно показать, что по заданным начальным значениям многоточечных корреляционных функций из соответствующих корреляционных уравнений можно определить все временные производные тензора турбулентной энергии и любых других характеристик турбулентности [7]. Затем с помощью этих временных производных можно рассчитать изменение во времени тензора энергии турбулентности (или эквивалентного ему спектрального тензора энергии) и других характеристик турбулентности, используя их разложения в ряды.

При таком подходе к исследованию турбулентности мы уже не сталкиваемся с прежней проблемой замыкания бесконечной системы корреляционных или спектральных уравнений. Корреляционные уравнения используются только для установления связей между корреляционными функциями и их производными в начальный момент времени, а сами корреляционные функции должны быть заданы, что позволяет определить в этот момент времени все характеристики турбулентности. Конечно на практике мы, как правило,

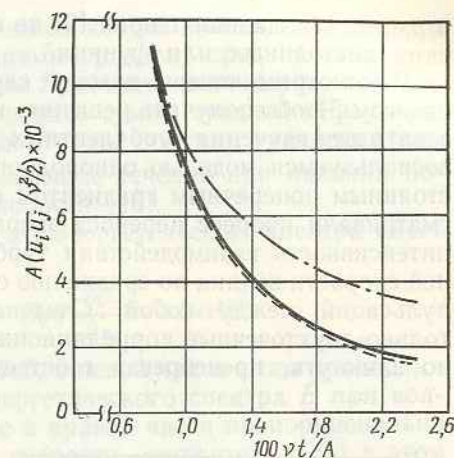


Рис. 7.6. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных по затуханию энергии турбулентности [23].

— — приближение слабой турбулентности; — — теория; — — эксперимент.

располагаем сведениями лишь о небольшом числе корреляционных функций и, следовательно, об их временных производных, однако для достаточно хорошего описания задачи число известных функций может оказаться достаточным. Согласно теории, развитой в работе [7], задавая в начальный момент времени n спектральных функций, где $n \geq 3$ — нечетное целое число, можно рассчитать эволюцию во времени этих n спектральных функций. При $n = 3$ и 5 было получено хорошее согласие результатов с экспериментальными данными [7, 8].

Характер рассматриваемой задачи (за исключением случая слабой турбулентности), по-видимому, требует задания трех или большего числа спектральных функций в начальный момент времени для того, чтобы можно было рассчитать эволюцию любой из этих функций. Однако часто (особенно в инженерных задачах) отсутствуют необходимые данные о трех или большем числе спектральных функций в начальный момент времени. В этих случаях можно поступить следующим образом: во-первых, можно определить эти начальные спектральные функции, используя экспериментальные данные предыдущих исследований или теоретические результаты; во-вторых, можно ввести некоторые физические или математические гипотезы. В работе [9] используется второй подход. Предполагается, что перенос энергии зависит от начальных условий и от энергии, соответствующей волновому числу κ . С помощью этой гипотезы оказалось возможным рассчитать эволюцию спектральных функций E и W , задавая только их значения в начальный момент времени. Полученные результаты сравниваются с экспериментальными данными на рис. 7.6 — 7.8, где A — постоянная, входящая в начальные условия. Подобно теории, рассматриваемой

в работе [7], данная теория [9] не содержит каких-либо эмпирических постоянных или функций.

Рассмотрим теперь важный случай турбулентных течений со сдвигом. Чтобы получить решение, которое можно было бы использовать для изучения турбулентных процессов в потоках со сдвигом, воспользуемся моделью однородного турбулентного течения с постоянным поперечным градиентом средней скорости. Мы уже рассматривали процесс переноса энергии; поэтому предположим, что интенсивность взаимодействия турбулентности с градиентом средней скорости велика по сравнению с взаимодействием турбулентных пульсаций между собой. Следовательно, можно рассматривать только двухточечные корреляционные уравнения, так как их можно замкнуть, пренебрегая собственными взаимодействиями тур-

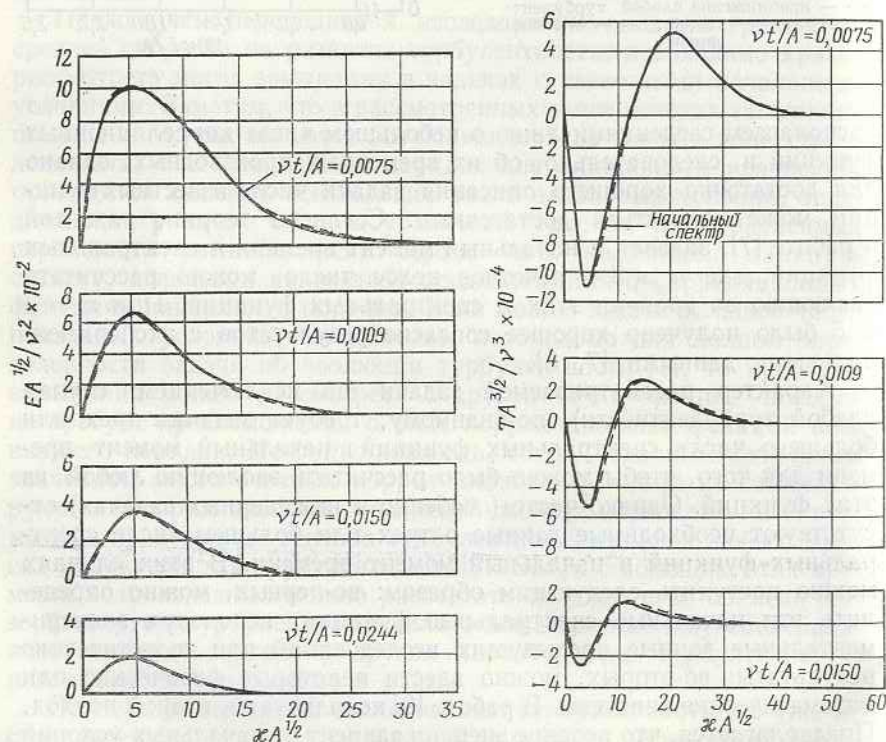


Рис. 7.7. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных по затуханию трехмерных энергетических спектров турбулентности [23].

— теория; — — эксперимент.

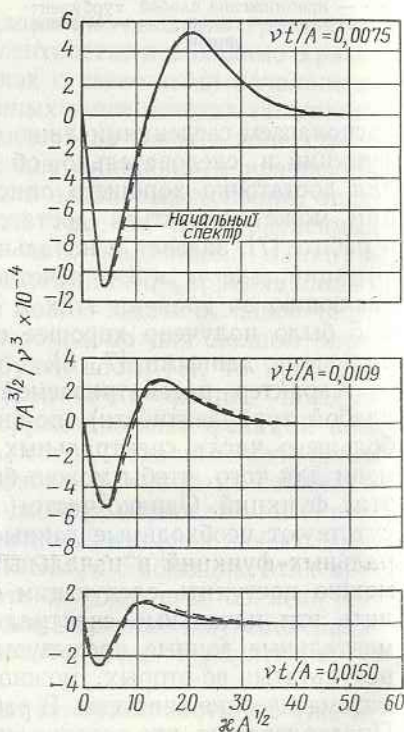


Рис. 7.8. Сопоставление теоретических и экспериментальных данных по затуханию спектров переноса энергии [23].

— теория; — — эксперимент.

булентных пульсаций, т. е. тройными корреляциями скорости, по сравнению с членами, содержащими градиент средней скорости. Этот анализ подобен только что рассматривавшемуся, однако теперь скорость представляется в виде суммы средней и флуктуационной составляющих. Прделав это, мы получим уравнения для $u_i u_j$ и их фурье-образов, описывающие течение при наличии постоянного градиента средней скорости [10].

Соответствующее уравнение для энергетического спектра имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} = P(x) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + T(x) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - 2\nu k^2 E.$$

Как и в первом уравнении рис. 7.2, в левой части этого уравнения записана скорость изменения энергетического спектра E при волновом числе x . Первое слагаемое в правой части пропорционально поперечному градиенту средней скорости; множитель $P(x)$ в этом слагаемом пропорционален спектральной составляющей турбулентного касательного напряжения. Следовательно, этот член можно интерпретировать как скорость генерации энергии при волновом числе x за счет работы, совершаемой градиентом скорости на спектральной составляющей турбулентного касательного напряжения.

Второе слагаемое также пропорционально градиенту средней скорости, однако оно будет интерпретироваться как скорость переноса, а не генерации энергии. В самом деле, интеграл от этого слагаемого по x в пределах от 0 до ∞ равен нулю [10]. Рассматриваемый член не дает вклада в полную энергию турбулентности, однако он характеризует перенос энергии в пространстве волновых чисел. Таким образом, несмотря на пренебрежение тройными корреляциями скорости, в этом уравнении все еще имеется член, характеризующий перенос энергии, который аналогичен переносу энергии, обусловленному тройными корреляциями скорости. Различие здесь состоит в том, что в случае тройных корреляций скорости перенос энергии осуществляется за счет нелинейного взаимодействия турбулентных пульсаций между собой, тогда как в данном случае перенос энергии обусловлен внешним воздействием на турбулентность, создаваемым градиентом средней скорости. Тем не менее результаты в обоих случаях оказываются аналогичными, как показывают приведенные на рис. 7.9 данные, соответствующие начальным условиям частного вида [10]. Так как безразмерная спектральная функция энергетического переноса при малых волновых числах принимает отрицательные значения, а затем, при более высоких волновых числах, становится положительной (суммарная площадь под кривой равна нулю), энергия в основном переносится из области малых волновых чисел в область больших волновых чисел, как и в случае переноса энергии,

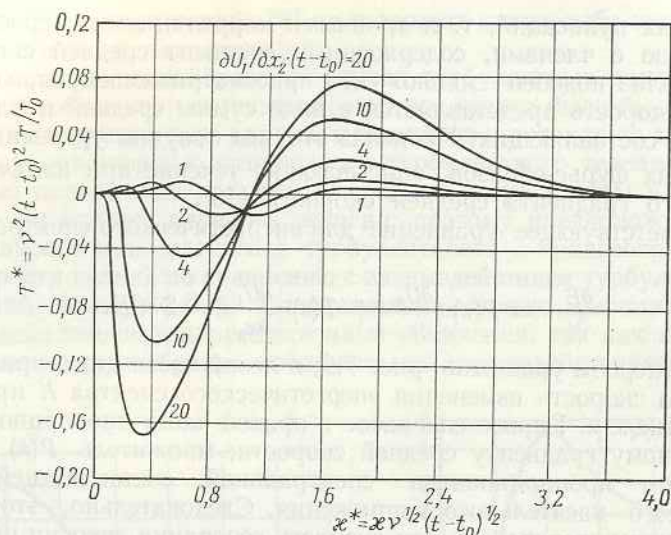


Рис. 7.9. Спектры переноса энергии, обусловленного градиентом средней скорости.

обусловленного тройными корреляциями скорости. Отметим, что безразмерная функция T^* может увеличиваться с течением времени, так как в определение величины T^* входит время [10].

Наконец, последнее слагаемое в спектральном уравнении представляет, как и ранее, скорости диссипации.

Спектральные плотности энергии, скорости генерации и скорости диссипации в некоторый момент времени приведены на рис. 7.10 [10] (вследствие принятой нормировки все кривые имеют одинаковые максимумы). По этим результатам мы можем описать эволюцию энергии турбулентности следующим образом. Энергия турбулентности заимствуется из основного потока и сосредотачивается главным образом в крупных вихрях. Затем энергия крупных вихрей передается мелким вихрям. Этот процесс описывается переносным слагаемым, как было показано выше. С физической точки зрения перенос энергии можно рассматривать как следствие растяжения вихревых трубок под действием градиента средней скорости. Наконец, энергия рассеивается в мелких вихрях под действием вязкости. Физически оправдано, что диссипация происходит главным образом в мелких вихрях, так как в них создаются более значительные касательные напряжения. Как показывает график энергетического спектра, основная часть энергии сосредоточена в области, расположенной между областями генерации и диссипации.

В работе [11] аналитическое решение, полученное при реаль-

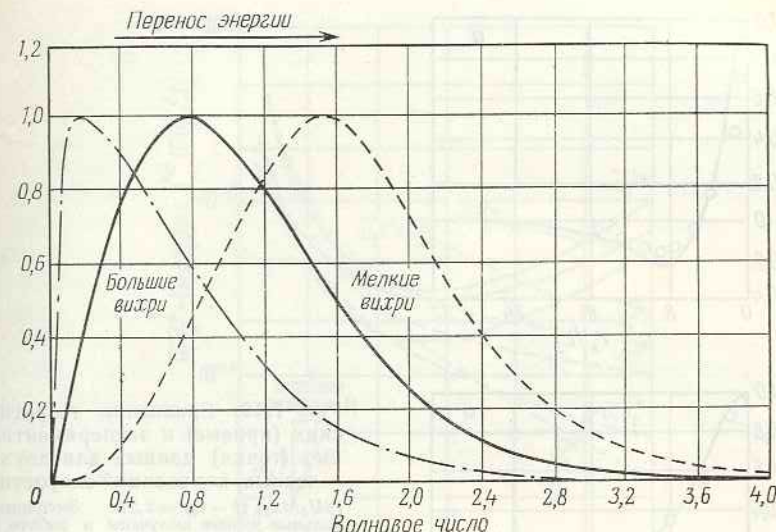


Рис. 7.10. Области генерации и диссипации и энергосодержащая область. — — — скорость генерации энергии; — — — спектральная плотность энергии; — — — скорость диссипации энергии.

ных начальных условиях, сравнивалось с экспериментальными данными для турбулентного течения с постоянным поперечным сдвигом. Некоторые результаты этой работы представлены на рис. 7.11 и 7.12. Соответствие теоретических и экспериментальных данных хорошее, включая отрицательную область одной из двухточечных корреляционных функций.

Несмотря на хорошее согласие теории с экспериментом в рассматриваемом случае, следует отметить, что полученные резуль-

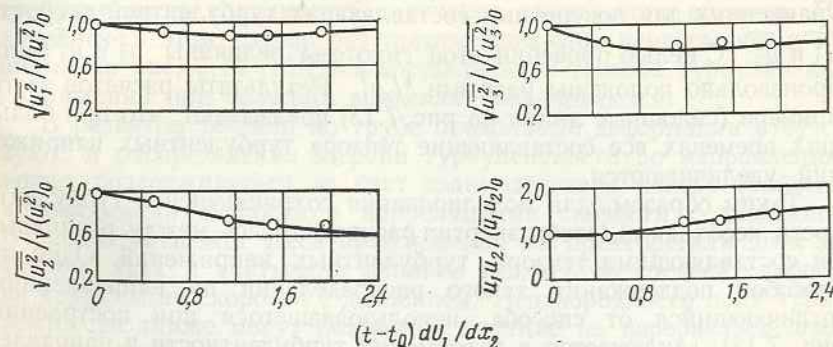


Рис. 7.11. Сравнение теоретических (кривые) и экспериментальных (точки) данных по эволюции одноточечных моментов второго порядка в турбулентном потоке с постоянным поперечным сдвигом [22].

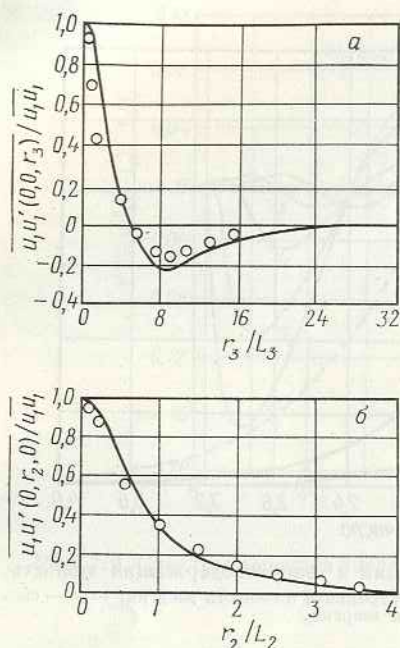


Рис. 7.12. Сравнение теоретических (кривые) и экспериментальных (точки) данных для двухточечных корреляций скорости.

$(dU_1/dx_2)(t-t_0) = 2.27$. Экспериментальные данные получены в работе [22] при следующих условиях: а) две точки раздвигаются вдоль направления, нормального как к направлению течения, так и к направлению градиента скорости; б) две точки раздвигаются вдоль направления градиента скорости.

таты не могут быть перенесены на случай развитых неоднородных течений (например, течений в трубах), так как все полученные в расчетах составляющие тензора турбулентных напряжений уменьшаются с течением времени. Эти результаты показаны штриховыми линиями на рис. 7.13 [12]. По-видимому, вырождение турбулентности обусловлено отсутствием членов, соответствующих генерации турбулентности, в полных уравнениях для поперечных составляющих турбулентной скорости $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$. С целью проверки этой гипотезы величины $\overline{u_2^2}$ и $\overline{u_3^2}$ были произвольно положены равными $1/2 \overline{u_1^2}$. Результаты расчетов этого примера (сплошные линии на рис. 7.13) показывают, что при больших временах все составляющие тензора турбулентных напряжений увеличиваются.

Таким образом, для моделирования сохраняющейся турбулентности необходимо, чтобы энергия распределялась между различными составляющими тензора турбулентных напряжений. Один из способов поддержания такого распределения по направлениям (отличающийся от способа, использовавшегося при построении рис. 7.13) заключается в деформации турбулентности в направлении течения, аналогичной влиянию продольного градиента скорости ($\partial U_1/\partial x_1 > 0$). При таком воздействии энергия передается

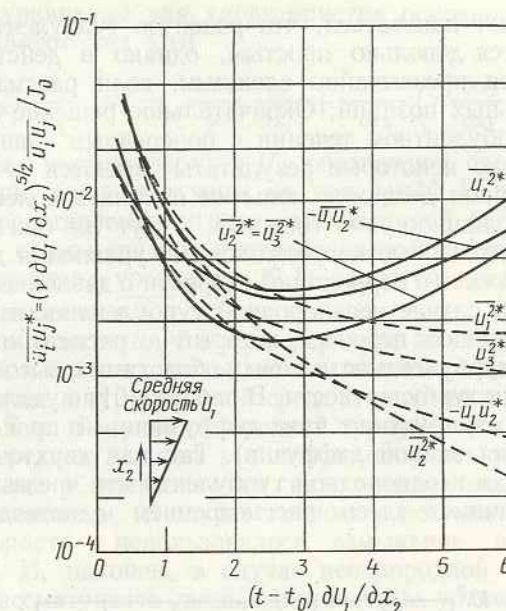


Рис. 7.13. Усиление турбулентности, обусловленное воздействием сдвига на слабую однородную турбулентность, при условии $\overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = 1/2 \overline{u_1^2}$ и сопоставление с результатами для случая, когда при вычислении всех составляющих тензора турбулентных напряжений используется приближение слабой турбулентности.

— $\overline{u_2^2} = \overline{u_3^2} = \overline{u_1^2}/2$; --- приближение слабой турбулентности.

поперечным составляющим турбулентной скорости, и поэтому турбулентность сохраняется в течение длительного времени. Полученные в этом случае результаты показаны непрерывными линиями на рис. 7.14 [12]; все составляющие тензора турбулентных напряжений при больших временах увеличиваются.

В развитом течении по трубе продольные деформации отсутствуют, и распределение энергии турбулентности по направлениям может поддерживаться за счет взаимодействия между тройными корреляциями скорости и корреляциями скорости с давлением. В рассматриваемом здесь приближении мы пренебрегали этим эффектом, хотя и учитывали влияние градиентов средней скорости на корреляции скорости с давлением. Неоднородности поля турбулентности также могут оказывать влияние на перераспределение энергии турбулентности по направлениям [13].

Обсуждавшиеся вопросы подводят нас к изучению более сложных турбулентных течений, например течений в пограничных слоях

и трубах. Может показаться, что развитое турбулентное течение в трубе является довольно простым, однако в действительности оно оказывается чрезвычайно сложным, если рассматривать его с фундаментальных позиций. Окончательное решение задачи о неоднородном турбулентном течении с поперечным сдвигом пока не получено, однако некоторые результаты имеются в работе [13]. В настоящее время делаются попытки получить более полное решение, однако слишком рано говорить, будут ли они успешными.

Полные двухточечные корреляционные уравнения для двойных корреляций скорости и корреляций скорости с давлением приведены в работе [10]. В случае неоднородной турбулентности имеется еще один основной процесс переноса, который не рассматривался выше. Это диффузия турбулентности между областями с высокой и низкой интенсивностями турбулентности. В работе [10] не удалось получить решения, иллюстрирующие этот диффузионный процесс (за исключением случая вязкой диффузии). Так как двухточечные уравнения для случая неоднородной турбулентности чрезвычайно сложны, мы ограничимся здесь рассмотрением односточечных урав-

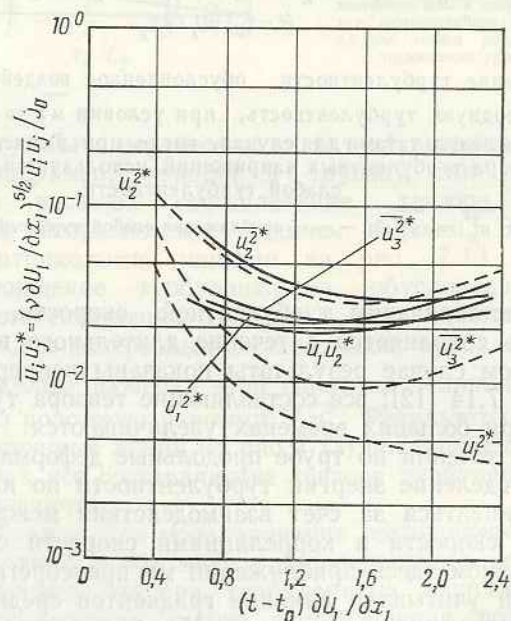


Рис. 7.14. Усиление турбулентности, обусловленное воздействием сдвига на слабую однородную турбулентность при наличии нормальной деформации.
 --- $(\partial U / \partial x_2) / (\partial U_1 / \partial x_1) = 0$;
 — $(\partial U / \partial x_2) / (\partial U_1 / \partial x_1) = 2$.

нений, т. е. уравнений для характеристик основного течения. Эти уравнения имеют вид [10]

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u_i u_k} \right), \quad (7.1)$$

где величины с чертой сверху и U_i обозначают средние значения. Эти уравнения были получены из уравнений Навье—Стокса посредством представления мгновенных значений скорости и давления в виде суммы средних и пульсационных составляющих. Для замыкания системы уравнений (7.1) вводятся предположения относительно величин $\overline{u_i u_j}$.

Интересно отметить, что при переходе от сравнительно простых течений к более сложным мы вынуждены рассматривать меньшее число точек в турбулентной среде и уменьшать порядок схемы замыкания. Так, в случае однородной турбулентности в отсутствие градиентов средних величин мы смогли получить решение, применяя замыкание к трехточечным или четырехточечным корреляционным уравнениям. В случае течения с постоянным градиентом средней скорости использовалось замыкание в двухточечных уравнениях. И, наконец, в случае неоднородной турбулентности мы будем рассматривать лишь односточечные уравнения (7.1). Некоторые авторы использовали, кроме того, односточечные уравнения более высоких порядков, решение которых несколько упрощается по сравнению с решением многоточечных уравнений высокого порядка. Некоторые из этих методов будут рассматриваться в следующих главах. Однако следует отметить, что при повышении порядка односточечных уравнений число неизвестных увеличивается быстрее, чем число уравнений, что приводит к значительному увеличению эмпирической информации, требуемой для замыкания. Тем не менее в некоторых случаях такие уравнения оказались весьма полезными.

Если ограничиться рассмотрением течений, к которым применимы предположения теории пограничного слоя, то в уравнении (7.1) вместо всех величин $\overline{u_i u_k}$ необходимо учитывать только составляющую $\overline{u_1 u_2}$ — касательное напряжение Рейнольдса. В уравнении остается также поперечный градиент скорости $\partial U_1 / \partial x_2$. Тогда приведенная выше система уравнений сводится к одному уравнению. Одним из течений, для которых легко получить замкнутую форму этого уравнения, является умеренно короткий пограничный слой с сильным градиентом давления. В работе [14] было показано, что в этом случае переменную $\overline{u_1 u_2}$ можно считать «замороженной» при заданных начальных значениях, с которыми она переносится вдоль линий тока. Теоретические профили скорости и числа Стэнтона (т. е. безразмерного коэффициента теплоотдачи) сравниваются с экспериментальными данными на рис. 7.15 и 7.16

[14, 15]. Величина τ_w есть значение касательного напряжения на стенке. Характеристики теплоотдачи определяются при совместном решении уравнения (7.1) для средней скорости и аналогичного ему уравнения энергии. Можно считать, что теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Проведенный анализ пригоден для случаев, когда замыкание можно применить непосредственно к напряжениям Рейнольдса. Для протяженных пограничных слоев или в случае меньших градиентов давления такое упрощение невозможно и требуется использовать другие, менее дедуктивные методы. Причина, по которой удалось получить решение, заключается в том, что в одном предельном случае определяющую роль играли заданные начальные условия. В другом предельном случае имеют место развитые течения, в которых начальные условия не оказывают влияния на характеристики турбулентности. Для таких течений и других промежуточных типов течений в общем случае используются простые модели, основывающиеся на физических соображениях и анализе размерностей. Выше упоминалось, что если использовать пред-

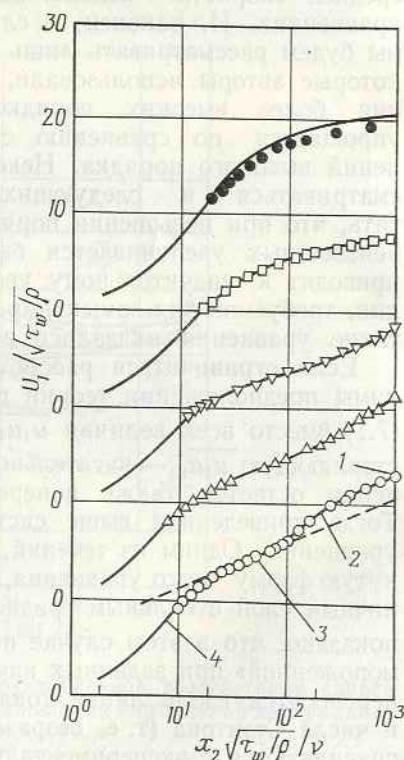


Рис. 7.15. Теоретические профили скорости в течениях с сильными отрицательными градиентами давления, построенные в полулогарифмических координатах закона стенки, и их сравнение с экспериментальными данными работы [21].

Для наглядности профили скорости раздвинуты вдоль вертикали. 1 — начальный профиль; 2 — зона следа; 3 — логарифмический участок; 4 — вязкий подслей.

U_∞/U_0	1,82	1,45	1,14	1,03	1,00
$\nu dp/dx_1 / \rho U_\infty^3 \times 10^6$	-2,17	-3,81	-3,69	-0,86	0

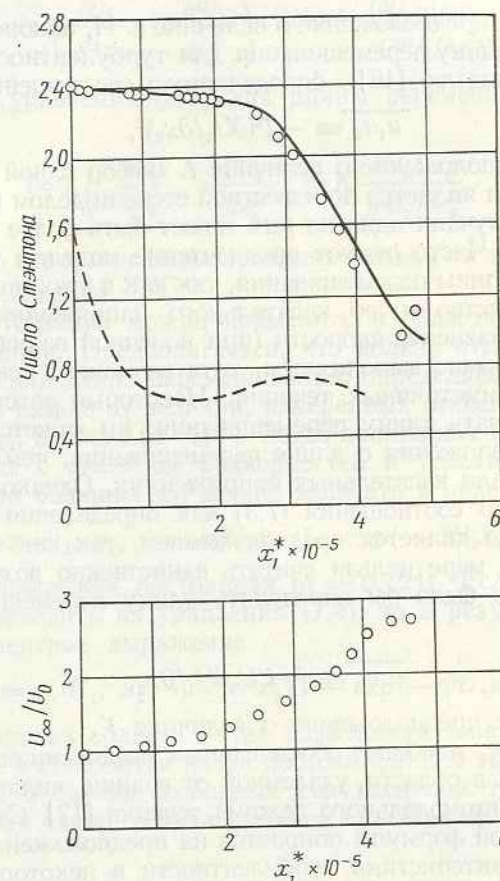


Рис. 7.16. Сравнение теоретического и измеренного распределения числа Стэнтона в турбулентном пограничном слое, подвергнутом сильному ускорению на сравнительно коротком участке [20].

— теория; $\circ$ эксперимент; --- $\tau_{w2} = u_1 u_2 = 0$.

положения теории пограничного слоя, то в одноточечных уравнениях (7.1) можно ограничиться рассмотрением только одной составляющей $u_1 u_2$ тензора напряжений Рейнольдса $u_i u_j$.

Здесь можно воспользоваться по меньшей мере тремя типами схем замыкания. Во-первых, можно использовать предположение непосредственно о величине $u_1 u_2$ (модель для касательного напряжения Рейнольдса). Во-вторых, по аналогии с молекулярной вязкостью можно ввести турбулентную вязкость ε , определяемую соотношением

$$\overline{u_1 u_2} \equiv -\varepsilon \partial U_1 / \partial x_2, \quad (7.2)$$

и использовать предположение о величине ε . И, наконец, в-третьих, можно ввести длину перемешивания для турбулентности (путем сдвига по Прандтлю [16]), определяемую соотношением

$$\overline{u_1 u_2} = -l^2 (\partial U_1 / \partial x_2)^2, \quad (7.3)$$

и сделать предположение о величине l . Выбор одной из этих трех схем замыкания является до известной степени делом вкуса, однако в некоторых случаях одна из них может быть более удобной, чем другие схемы. Часто отдают предпочтение моделям турбулентной вязкости или длины перемешивания, так как в этих моделях обеспечивается равенство нулю касательного напряжения Рейнольдса в отсутствие градиента скорости (при конечной величине ε или l). Это условие обычно выполняется, хотя возможны исключения для некоторых асимметричных течений. Некоторые авторы предпочитают использовать длину перемешивания: им кажется, что проще вводить предположения о длине перемешивания, чем о турбулентной вязкости или касательных напряжениях. Однако следует указать, что выбор соотношения (7.3) как определения длины перемешивания уже является предположением, так как это определение ни в коей мере нельзя считать единственно возможным. Например, можно было бы определить длину перемешивания l' по Тейлору [16]:

$$\overline{u_1 u_2} = -l' U_1 \partial U_1 / \partial x_2, \quad (7.4)$$

и затем ввести предположение о величине l' .

По-видимому, наиболее обоснованным выражением для длины перемешивания в области, удаленной от границ, является формула Кармана для автомодельного режима течения [17]. Самый простой путь вывода этой формулы опирается на предположение, что вдали от границ характеристики турбулентности в некоторой точке зависят от условий течения и, в частности, от первой и второй производных скорости в рассматриваемой точке лишь в некоторой окрестности этой точки. Тогда можно в равной степени использовать напряжение Рейнольдса, турбулентную вязкость или длину перемешивания, определяемую соотношением (7.3); однако соотношение (7.4) не используется, так как из него следует, что скорость течения относительно стенки также является существенным параметром. Рассматривая напряжение Рейнольдса и используя анализ размерностей, получаем

$$\overline{u_1 u_2} = \overline{u_1 u_2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \right) = -K^2 \frac{(\partial U_1 / \partial x_2)^4}{(\partial^2 U_1 / \partial x_2^2)^2}, \quad (7.5)$$

где K — постоянная Кармана. Исходя из уравнения (7.2) для турбулентной вязкости и используя анализ размерностей, можно получить

$$\varepsilon = \varepsilon \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \right) = K^2 \frac{(\partial U_1 / \partial x_2)^3}{(\partial^2 U_1 / \partial x_2^2)^2}. \quad (7.6)$$

Наконец, из уравнения (7.3) для длины перемешивания следует соотношение

$$l = l \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \right) = K \frac{\partial U_1 / \partial x_2}{\partial^2 U_1 / \partial x_2^2}. \quad (7.7)$$

Очевидно, что все три подхода приводят к одному и тому же результату для напряжения $\overline{u_1 u_2}$.

Гипотезу Кармана можно применить к области течения, удаленной от стенки. Предполагается, что вблизи стенки турбулентная вязкость или длина перемешивания, определяемая уравнением (7.4), зависит только от величин, измеренных относительно стенки, т. е. от U_1 и x_2 , а также от ν [17]. Тогда простейшее предположение, согласующееся с анализом размерностей и условием ослабления влияния ν при больших x_2 , можно записать в виде

$$\varepsilon = \varepsilon(U_1, x_2, \nu) = n^2 U_1 x_2 [1 - \exp(-n^2 U_1 x_2 / \nu)], \quad (7.8)$$

где n — эмпирическая постоянная ($n = 0,124$). Если вместо уравнения (7.2) исходить из уравнения (7.4), то в результате получается эквивалентное выражение

$$l' = l'(U_1, x_2, \nu) = n^2 x_2 [1 - \exp(-n^2 U_1 x_2 / \nu)]. \quad (7.9)$$

Имеется третья область — так называемая зона следа, в которой величина ε становится почти постоянной. Эта зона оказывается существенной в случае свободных турбулентных течений, однако она появляется также вблизи внешней границы пограничного слоя

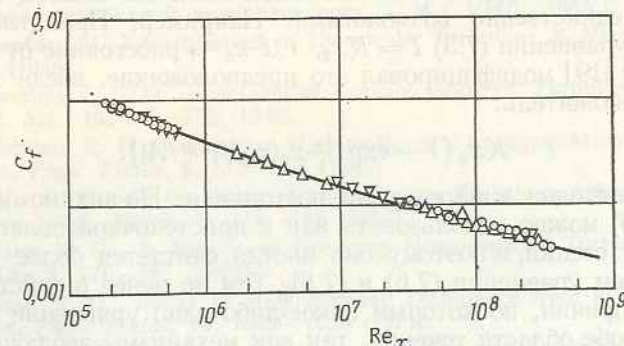


Рис. 7.17. Сравнение теоретических и экспериментальных данных по коэффициенту поверхностного трения плоской пластины при низких скоростях обтекания.

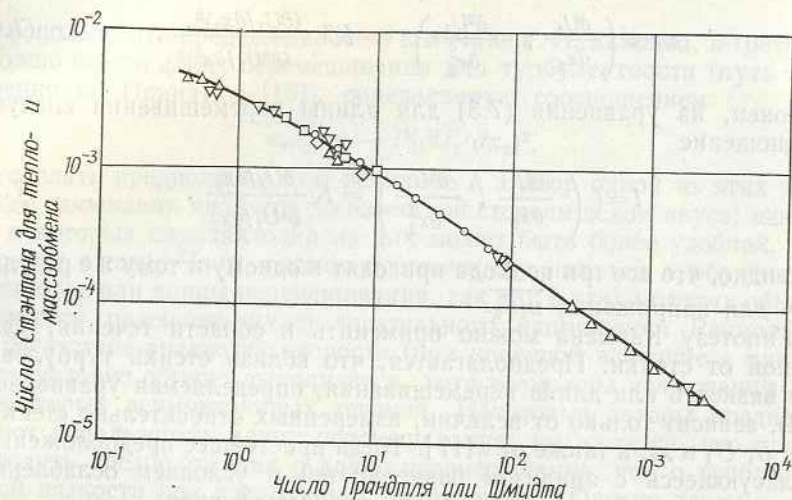


Рис. 7.18. Сравнение теоретических и экспериментальных данных по тепло- и массообмену в развитом течении с числом $Re = 10\,000$.

и около центральной линии трубы. Тем не менее в последних двух случаях наличие этой зоны игнорируется, и тогда, в частности, для эмпирической постоянной K вместо значения 0,4 выбирается значение 0,36. Рассчитанные по уравнениям (7.6) и (7.8) характеристики течения и теплоотдачи (или массообмена) в трубах и пограничных слоях хорошо согласуются с экспериментальными данными (рис. 7.17 и 7.18) [17, 18].

Рассмотренные здесь гипотезы замыкания ни в коей мере не являются единственно возможными. Например, Прандтль предполагал в уравнении (7.3) $l = Kx_2$, где x_2 — расстояние от стенки. Ван Дрифт [19] модифицировал это предположение, введя демпфирующий множитель:

$$l = Kx_2 \{1 - \exp[-x_2(\tau_w/\rho)^{1/2}/A]\}. \quad (7.10)$$

где A — еще одна эмпирическая постоянная. По-видимому, уравнение (7.10) можно использовать как в пристеночной области, так и вдали от стенки, и поэтому оно иногда считается более универсальным, чем уравнения (7.6) и (7.8). Тем не менее в действительности нет причин, по которым какое-либо одно уравнение должно описывать обе области течения, так как механизмы эволюции турбулентности около стенки и вдали от нее существенно различаются. Поэтому использование двух уравнений также можно считать оправданным.

7.3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой главе сделана попытка показать, как можно получить решения, описывающие турбулентные движения, используя простые схемы замыкания уравнений турбулентности. Хотелось бы надеяться, что при этом также удалось до некоторой степени разъяснить процессы, происходящие в турбулентных течениях.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A — постоянная, зависящая от начальных условий;
- E — энергетический спектр;
- J_0 — постоянная, зависящая от начальных условий;
- n — постоянная;
- p — давление;
- P, P' — пространственные точки;
- r — радиус-вектор;
- T — скорость переноса энергии;
- t — время;
- t_0 — постоянная, зависящая от начальных условий;
- u_i, u_i' — составляющие мгновенной скорости;
- U_i — составляющие средней скорости;
- W — член, характеризующий перенос энергии;
- x_i — пространственные координаты;
- κ — волновое число;
- ν — кинематический коэффициент вязкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K., The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge University Press, New York, 1953. [Имеется перевод: Бэтчелор Дж. К., Теория однородной турбулентности. — М.: ИИЛ, 1955.]
2. Heisenberg W., Zur statistischen Theorie der Turbulenz, *Z. Phys.*, **124**, 628—657 (1948).
3. Kovasznay L. S. G., Spectrum of Locally Isotropic Turbulence, *J. Aeronaut. Sci.*, **15**, 745—753 (1948).
4. Kraichnan R. H., Lagrangian-History Closure Approximation for Turbulence, *Phys. Fluids*, **8**, 575—598 (1965).
5. Deissler R. G., On the Decay of Homogeneous Turbulence before the Final Period, *Phys. Fluids*, **1**, 111—121 (1958).
6. Deissler R. G., A Theory of Decaying Homogeneous Turbulence, *Phys. Fluids*, **3**, 176—187 (1960).
7. Deissler R. G., Decay of Homogeneous Turbulence from a Given Initial State, *Phys. Fluids*, **14**, 1629—1638 (1971).
8. Deissler R. G., Further Comparison of Theory and Experiment for Decay of Homogeneous Turbulence, *Phys. Fluids*, **15**, 1353—1355 (1972).
9. Deissler R. G., Remarks on the Decay of Homogeneous Turbulence from a Given State, *Phys. Fluids*, **17**, 652—653 (1974).

10. Deissler R. G., Effects of Inhomogeneity and of Shear Flow in Weak Turbulent Fields, *Phys. Fluids*, 4, 1187—1198 (1961).
11. Deissler R. G., Comparison of Theory and Experiment for Homogeneous Turbulence with Shear, *Phys. Fluids*, 18, 1237—1240 (1975).
12. Deissler R. G., Growth of Turbulence in the Presence of Shear, *Phys. Fluids*, 15, 1918—1920 (1972).
13. Deissler R. G., Problem of Steady-State Shear-Flow Turbulence, *Phys. Fluids*, 8, 391—398 (1965).
14. Deissler R. G., Evolution of a Moderately Short Turbulent Boundary Layer in a Severe Pressure Gradient, *J. Fluid Mech.*, 64, 763—774 (1974).
15. Deissler R. G., Evolution of the Heat Transfer and Flow in Moderately Short Turbulent Boundary Layers in Severe Pressure Gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 17, 1079—1085 (1974).
16. Hinze J. O., Turbulence, McGraw-Hill Book Co., New York, 1959. [Имеется перевод: Хинце И. О., Турбулентность. — М.: ГИФМЛ, 1963.]
17. Deissler R. G., Turbulent Heat Transfer and Friction in Smooth Passages, в книге: Turbulent Flows and Heat Transfer (C. C. Lin ed.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 288—313, 1959. [Имеется перевод: Дейслер Р. Дж., Турбулентная теплопередача и трение в гладких трубопроводах, в кн.: Турбулентные течения и теплопередача под ред. Линь Цзя-цзяо. — М.: ИИЛ, 1963, с. 297—323.]
18. Deissler R. G., Loeffler A. L., Analysis of Turbulent Flow and Heat Transfer on a Flat Plate at High Mach Numbers with Variable Fluid Properties, NASA Report № TR-17, Washington, D. C., 1959.
19. Van Driest E. R., On Turbulent Flow Near a Wall, *J. Aeronaut. Sci.*, 23, 1007—1011 (1956).
20. Moretti P. M., Kays W. M., Heat Transfer to a Turbulent Boundary Layer with Varying Free-Stream Velocity and Varying Surface Temperature — An Experimental Study, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 8, 1187—1202 (1965).
21. Patel V. C., Head M. R., Reversion of Turbulent to Laminar Flow, *J. Fluid Mech.*, 34, 371—392 (1968).
22. Champagne F. H., Harris V. G., Corrsin S., Experiments on Nearly Homogeneous Turbulent Shear Flow, *J. Fluid Mech.*, 41, 81—139 (1970).
23. Ling S. C., Huang T. T., Decay of Weak Turbulence, *Phys. Fluids*, 13, 2912—2924 (1970).

Модели переноса кинетической энергии

П. ХАРША¹⁾

8.1. ВВЕДЕНИЕ

В практических приложениях механики жидкостей и теории теплопередачи наиболее часто встречаются задачи, в которых поле течения является в основном турбулентным. В принципе для расчета таких течений необходимо решать нестационарные уравнения Навье—Стокса. Однако решение этих уравнений невозможно без использования численных методов, в которых поле течения аппроксимируется конечным числом расчетных точек. Основная трудность такого расчета турбулентных течений обусловлена тем фактом, что в турбулентности важное значение имеют движения, масштабы которых намного меньше расстояний между узловыми точками в самых мелких используемых на практике расчетных сетках. Тем не менее даже если бы расчеты поля скорости в турбулентных течениях вплоть до самых малых представляющих интерес масштабов были бы возможны, пришлось бы столкнуться с другой проблемой. Вследствие случайности флуктуаций поля скорости в турбулентных потоках важными с практической точки зрения характеристиками течения являются средние по времени или по ансамблю значения пульсационных переменных. Чтобы рассчитать эти средние величины, необходимо многократно провести подробные расчеты, каждое со слегка отличными начальными условиями, а затем вычислить средние по ансамблю. По этим причинам прямые расчеты полей турбулентных течений практически невозможны.

Другой подход к расчету турбулентных течений заключается в построении модели течения, описывающей поведение осредненных характеристик потока настолько близко, насколько это возможно. Все используемые в настоящее время методы основаны на таких моделях поля течения. Эти модели различаются детальностью пред-

¹⁾ P. T. Harsha, R & D Associates, Santa Monica, California, Present address: Science Applications, Inc., Woodland Hills, California.

ставления поля течения, точностью описания по крайней мере какого-нибудь из классов турбулентных течений и сложностью расчета; однако всегда необходимо помнить, что решения, полученные с помощью рассматриваемых методов, характеризуют поведение моделей течения, лишь приближенно описывающих турбулентное течение.

Все модели турбулентности, описанные в этой главе, основаны на полученных Рейнольдсом уравнениях движения для осредненных величин. По существу уравнения Рейнольдса для средних величин сами являются моделью турбулентных течений, так как при применении процедуры осреднения могут быть упущены некоторые характерные свойства поля течения. Например, установлено, что в основе по крайней мере некоторых турбулентных течений лежит крупномасштабное упорядоченное движение [1]. Поэтому в работе [2] была предложена процедура осреднения на трех уровнях, согласно которой поле течения разделяется на осредненное (основное) течение, крупномасштабное турбулентное движение и процессы, характеризующие малыми масштабами длины. Крупномасштабное турбулентное движение можно моделировать с помощью детерминированных моделей, описывающих поведение больших вихрей в турбулентном течении, причем случайность на этом уровне учитывается путем постулирования случайности возникновения этих вихрей во времени и расположения их в пространстве. Мелкомасштабное турбулентное движение рассматривается как перенос основным течением и крупными вихрями изотропной турбулентности. Эта модель успешно применялась [3] для расчета шума, излучаемого турбулентными струями. Однако шум турбулентной струи гораздо более сильно зависит от деталей структуры турбулентного течения, чем другие интересные с практической точки зрения характеристики. Успешное использование уравнений Рейнольдса для осредненных величин при расчетах скорости турбулентного смещения и явлений теплопередачи указывает, что модель Рейнольдса с осреднением на двух уровнях пригодна для расчета явлений, слабо зависящих от деталей структуры турбулентности.

Уравнение сохранения в среднем количества движения, полученное с помощью осреднения по Рейнольдсу, можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_j U_k + \langle u_k u_j \rangle) = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\delta_{jk} P + T_{kj}), \quad (8.1)$$

где

$$T_{kj} \equiv \nu \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \quad (8.2)$$

представляет собой тензор вязких напряжений. Если можно установить зависимость члена $\langle u_k u_j \rangle$ от известных или вычисляемых

величин, то уравнение (8.1) и осредненное уравнение неразрывности вместе с соответствующими граничными условиями в случае течения несжимаемой жидкости образуют замкнутую систему уравнений, решение которой вполне возможно. Тензор напряжений Рейнольдса $\langle u_k u_j \rangle$ характеризует в течении турбулентные касательные напряжения. Таким образом, целью при моделировании турбулентных движений является построение модели для $\langle u_k u_j \rangle$, т. е. замыкание уравнений Рейнольдса для осредненных величин.

В своей превосходной обзорной статье о методах замыкания уравнений турбулентного движения для средних величин Меллор и Херринг [4] разделили модели турбулентных течений на модели, замыкаемые с помощью поля средней скорости (ПСС), и модели, в которых используются поля осредненных характеристик турбулентности (ПХТ). В расчетах с применением методов замыкания ПСС для получения оценок величины турбулентных касательных напряжений используются (и во многих случаях успешно) довольно простые модели. Кроме величин турбулентных касательных напряжений эти модели позволяют рассчитать только поле средней скорости. С другой стороны, методы замыкания второго типа (ПХТ) предназначены как для получения некоторой информации о полях осредненных характеристик турбулентности, так и для расчета поля средней скорости. Далее Меллор и Херринг [4] ввели подразделение методов ПХТ по получаемой в результате расчета дополнительной информации о турбулентности на методы замыкания с помощью поля напряжений Рейнольдса (ПНР), предназначенные для расчета всего тензора напряжений Рейнольдса $\langle u_k u_j \rangle$, и на методы замыкания с помощью поля средней турбулентной кинетической энергии (ПКЭ), определяемой из выражения $e \equiv \frac{1}{2} \langle u_k u_k \rangle$. Описание последней группы моделей и является основной целью настоящей главы.

Методы ПСС применяются во многих моделях. Простейшими из них являются модели, в которых используется понятие турбулентной вязкости (или длины смешения); примерами таких моделей могут служить модель Прандтля длины смешения [5] и модель турбулентной вязкости, описанная в работе [6]. Позднее были предприняты попытки [7—9] учесть влияние изменения плотности в течениях сжимаемой жидкости на турбулентную вязкость. Ни и Коважный [10], а также Саффмен [11] использовали другой подход к построению таких моделей. Они предполагали, что турбулентная вязкость является скалярной величиной, удовлетворяющей уравнению переноса, которое можно написать по аналогии с уравнением переноса скалярной величины в турбулентном течении, а это уравнение в свою очередь можно строго получить из уравнения Навье—Стокса. Меллор и Херринг [4] включили в эту группу также модель, разработанную Брэдшоу и др. [12], поскольку используемое этими исследователями уравнение для турбулентного напряжения трения

не совпадает с уравнением, которое для этого напряжения можно строго вывести из уравнений Навье—Стокса. По существу эта модель занимает промежуточное положение между моделями, замыкаемыми с помощью уравнения переноса турбулентной вязкости, и моделями, замыкаемыми с помощью поля напряжений Рейнольдса (ПНР) или поля турбулентной кинетической энергии (ПКЭ), которые в классификации Меллора и Херринга образуют группу моделей, замыкаемых на основании полей характеристик турбулентности (ПХТ). Все методы замыкания с использованием турбулентной вязкости применялись для расчета течений в пограничных слоях на стенках и течений со свободными границами вдали от твердых стенок. Модели Ни и Коважного [10], а также Саффмена [11] в основном применялись для решения задач с твердыми границами (о применении последней модели см., например, работу Саффмена и Уилкокса [13]). Брэдшоу и др. [12] применяли свой метод только для расчета плоских течений. Однако Морел и др. [14], а также Морел и Торда [15] обобщили этот метод на случай двумерных течений со свободными границами.

Во многих работах описывается применение к течениям в пограничном слое различных методов замыкания ПХТ. К ним относятся работы Глушко [16], Беквитца и Башнелла [17], Меллора и Херринга [18], а также Нг и Сполдинга [19]. В методах этих авторов используются полуэмпирические модели Колмогорова [20] и Прандтля и Вигхарта [21], связывающие турбулентную вязкость с турбулентной кинетической энергией и масштабом турбулентности. В первых трех из этих работ [16—18] масштаб турбулентности вводится непосредственно в виде функции толщины пограничного слоя, тогда как в работе [19] для расчета пространственного изменения этого масштаба используется дифференциальное уравнение, основанное на уравнении переноса масштаба турбулентности, которое получил Ротта [22] из осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса. Метод замыкания ПКЭ, описанный Джонсом и Лаундером [23], основан на решении для пограничного слоя двух дополнительных уравнений, одним из которых является уравнение турбулентной кинетической энергии, а другим — уравнение для скорости ее диссипации ϵ . Скорость диссипации в свою очередь можно связать с масштабом турбулентности, хотя в модели Джонса и Лаундера это не делается в явной форме.

Также интенсивно исследовались модели ПКЭ в случае течения со свободными границами (т. е. течения вдали от твердых стенок). Роди [24], Роди и Сполдинг [25], а также Лаундер и др. [26] разработали модели, основанные на гипотезе Прандтля—Колмогорова о турбулентной вязкости; во всех этих моделях были использованы различные уравнения переноса масштаба турбулентности. В работе Ли и Харша [27], а также в работах Харша [28, 29] описана модель, замыкаемая с помощью метода ПКЭ. В этой модели исполь-

зовалось предложенное Брэдшоу и др. [12] соотношение между напряжением трения и турбулентной кинетической энергией, однако вместо уравнения переноса напряжения трения решалось уравнение переноса турбулентной кинетической энергии. В моделях работ [27—29] для определения масштаба турбулентности использовалось алгебраическое выражение, а не уравнение переноса этой величины.

Все вышеупомянутые модели (ПСС или ПХТ/ПКЭ) основаны на представлении поля турбулентного течения в узловых точках (т. е. на конечно-разностной аппроксимации). Для расчета течений в пограничном слое на стенках Пейтел и Хэд [30] на основе модели Брэдшоу и др. [12], а для течений со свободными границами — Петерс и Фарес [31] на основе модели Харша [28] разработали интегральные методы. Вообще говоря, интегральные методы, кроме большей по сравнению с конечно-разностными методами скорости вычислений, имеют и другое преимущество: путем соответствующей обработки известных экспериментальных данных и введения их в уравнения можно компенсировать недостаток знаний о поведении других переменных. Примером такого подхода может служить описанная Петерсом и Фаресом [31] модель, в которой использование семейства эмпирических профилей турбулентной кинетической энергии позволяет избавиться от необходимости моделирования членов, характеризующих диффузию этой энергии.

Более подробного анализа турбулентных течений можно ожидать от применения методов замыкания ПНР. В этом классе моделей уравнения для всех составляющих тензора напряжений Рейнольдса обычно используются вместе с уравнениями для нескольких масштабов турбулентности, входящих в задачу. Например, для пограничного слоя в несжимаемой жидкости это означает необходимость получения уравнений для турбулентного касательного напряжения $\langle uv \rangle$, для квадратов флуктуаций скорости u'^2 , v'^2 , w'^2 , а также для масштаба турбулентности. Примеры моделей типа ПНР дали Чу [32], Ротта [33], Дейли и Харлоу [34], а Дональдсон [35] и Левеллен и др. [36] при помощи этих моделей выполнили расчеты течений со свободными границами и течений типа пограничного слоя. Ханжалик и Лаундер [37], а также Лаундер и др. [26] для расчета течений в каналах и течений со свободными границами применяли комбинированные модели (ПКЭ/ПНР). В этих моделях используются уравнения для кинетической энергии турбулентности $e = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2)$, для турбулентного касательного напряжения $\langle uv \rangle$ и для скорости диссипации турбулентной кинетической энергии ϵ .

Можно, конечно, получить модели турбулентности без обращения к осредненным по Рейнольдсу уравнениям, например, в случае явных крупномасштабных детерминированных образований в некоторых течениях (см., например, работу Коважного [21]). Тщатель-

ная проверка методов усреднения [38] позволила сделать вывод о том, что если последовательно подходить к проблеме замыкания моделей, то такие методы, действительно, необходимы. Другой подход к решению этой проблемы заключается в использовании кинетической теории газов и в получении непосредственно из уравнения Больцмана новых моментных уравнений для корреляционных функций в турбулентном течении. При этом поле средней скорости по-прежнему описывается уравнениями Навье—Стокса, а для напряжений Рейнольдса получаются новые уравнения. Такой подход описан Иеном [39], и в случае течения сжимаемой жидкости с малыми скоростями он приводит к системе 40 уравнений с 40 неизвестными. Однако решений этих уравнений до сих пор не получено.

Как было показано в этом кратком обзоре, в настоящее время существует большое количество различных методов расчета турбулентных течений. В данной главе основное внимание будет обращено на модели, включающие уравнение турбулентной кинетической энергии или аналогичные ему уравнения (такие, как уравнения переноса турбулентных касательных напряжений или турбулентной вязкости). Некоторые из этих моделей будут обсуждаться в последующих разделах. Первыми будут описаны модели Ни и Коважнго [10], а также Саффмена [11], замыкаемые с помощью поля средней скорости. Хотя в эту группу моделей Меллор и Херринг [4] включили и модель, разработанную Брэдшоу и др. [12], по заложенным в ней идеям она более близка к моделям ПХТ и по этой причине будет обсуждаться вместе с аналогичными моделями работ [19, 24, 26, 29]. Будет дано сопоставление результатов расчетов, выполненных конечно-разностными методами, а также с использованием разработанных Пейтелом и Хэдом [30] и Петерсом и Фаресом [31] интегральных методов.

8.2. МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Поскольку хорошо известно, что равновесные пограничные слои можно довольно точно рассчитать с помощью модели турбулентной вязкости (или длины смешения), естественно обобщить эту модель на случай неравновесного пограничного слоя, предполагая, что поведение турбулентной вязкости можно описать с помощью уравнения переноса. Таким путем можно избежать локальной зависимости, характерной для классических моделей турбулентной вязкости, сохранив при этом хорошие свойства этих моделей.

В случае течений в пограничном слое обычно предполагается, что турбулентная вязкость является скалярной величиной. В работе [10] было показано, что любая переносимая течением скаляр-

ная величина F при условии выполнения законов сохранения удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial \Phi_{F,j}}{\partial x_j} + \left[\begin{array}{c} \text{член, характеризующий} \\ \text{генерацию } F \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{член, характеризующий} \\ \text{диссипацию } F \end{array} \right], \quad (8.3)$$

где $\Phi_{F,j}$ — поток величины F вследствие диффузии. Если предположить, что полная вязкость (т. е. сумма молекулярной и турбулентной вязкости) $n = \nu + \nu_T$ является переносимой течением скалярной величиной и что в турбулентных течениях коэффициент диффузии величины n равняется n (условие самодиффузии), то уравнение (8.3) примет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + U_j \frac{\partial n}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(n \frac{\partial n}{\partial x_j} \right) + G - D. \quad (8.4)$$

Выражения для членов G и D , описывающих генерацию и диссипацию n , были получены Ни и Коважнго [10] по аналогии с выражениями для этих членов в уравнении переноса турбулентной кинетической энергии. В случае плоского течения в пограничном слое эти члены имеют вид

$$G = A(n - \nu) \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad D = \frac{B}{L^2} n(n - \nu), \quad (8.5)$$

где L — масштаб турбулентности; предполагается, что A и B являются «универсальными» постоянными, т. е. пригодны для различных течений.

При применении этого метода к расчетам неравновесных пограничных слоев было постулировано [40] существование добавочного члена

$$- C \frac{n(n - \nu)}{U_\infty^2} \frac{dU_\infty}{dx} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad (8.6)$$

учитывающего влияние на турбулентную вязкость деформации турбулентных образований, вызванной градиентом средней скорости. Таким образом, в случае плоского течения в пограничном слое уравнение переноса турбулентной вязкости принимает следующий вид:

$$U \frac{\partial n}{\partial x} + V \frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(n \frac{\partial n}{\partial y} \right) + A(n - \nu) \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| - \frac{Bn(n - \nu)}{L^2} - \frac{Cn(n - \nu)}{U_\infty^2} \frac{dU_\infty}{dx} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|. \quad (8.7)$$

Для большинства расчетов полей течений, выполненных с помощью этой модели, Ни и Коважный использовали следующие значения постоянных: $A = 0,133$, $B = 0,8$ и $C = 0$; однако лучшее согласие с экспериментальными данными для некоторых типовых течений [41] было получено при другом выборе постоянных: $A = 0,10$, $B = 1,0$ и $C = 1,0$.

Саффменом [11] описан похожий метод расчета турбулентных течений. В этом случае модельные уравнения были получены с использованием гипотезы о том, что турбулентные течения можно характеризовать в терминах плотности энергии ε^* и завихренности ω^* , которые описываются соответствующими уравнениями переноса. Турбулентная вязкость в этом методе определяется соотношением

$$\nu_T = \gamma \varepsilon^* / \omega^*, \quad (8.8)$$

и при этом предполагается, что γ — универсальная постоянная. Величина ω^* приближенно определялась Саффменом как средне-квадратическая величина завихренности энергосодержащих вихрей, а величина ε^* — как кинетическая энергия движения, вызванного этой завихренностью; уравнения переноса для ε^* и ω^* выводятся по аналогии с точными уравнениями для турбулентной кинетической энергии и квадратической завихренности. Полученные таким образом уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_i} = \alpha^* \varepsilon^* (2S_{ij}^2)^{1/2} - \beta^* \varepsilon^* \omega^* + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma^* \nu_T \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^{*2}}{\partial t} + U_i \frac{\partial \omega^{*2}}{\partial x_i} = \alpha \omega^{*2} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^2 \right]^{1/2} - \\ - \beta \omega^{*3} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma \nu_T \frac{\partial \omega^{*2}}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (8.10)$$

При этом предполагается, что все постоянные являются универсальными, а $S_{ij} = \frac{1}{2}(\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i)$. На основании общих соображений, относящихся к турбулентным течениям в различных предельных случаях, Саффмен [11] показал, что $\beta^* = 1$, $\gamma = 1$, $\frac{5}{3} < \beta < 2$, $\sigma = \sigma^* = \frac{1}{2}$, $\alpha^* = 3$, $(\alpha^*/2)^{1/2} < \alpha < (\alpha^*/2)$, т. е. без непосредственного сопоставления с экспериментальными данными можно установить, что значения постоянных в уравнениях (8.9) и (8.10) лежат в довольно узких интервалах.

Эти модельные уравнения применялись Саффменом и Уилкоксом [13] для расчета течения сжимаемого газа в пограничном слое

на плоской пластине. Главная трудность применения этой модели к задаче течения в пограничном слое на твердой поверхности заключается в определении граничных условий для завихренности на стенке, однако такие граничные условия все же могут быть определены. Из уравнений (8.9) и (8.10) можно получить закон стенки для сжимаемой жидкости в форме Ван-Дриста и показать, что этот закон в терминах срачиваемых асимптотических разложений является для модели Саффмена соответствующим граничным условием. Этот прием, конечно, сильно сокращает время расчета заданного течения в пограничном слое.

Модели Саффмена [11] и Ни и Коважного [10] не нашли широкого применения в расчетах различных турбулентных течений. Ни и Коважный [40] представили свою модель на Стенфордской конференции 1968 года [41]; однако на этой конференции было показано, что гипотеза переноса турбулентной вязкости уступает в точности представленным там же моделям переноса турбулентной кинетической энергии. Вероятно, основной недостаток двух рассмотренных выше моделей заключается в том, что в них не моделируются реальные физические величины: турбулентная вязкость в модели Ни и Коважного, а также плотность энергии и завихренность в модели Саффмена сами являются модельными величинами. С другой стороны, все исследования, основанные на осредненных по Рейнольдсу уравнениях Навье—Стокса, представляют собой по существу исследование моделей течений, и поэтому предпочтение здесь следует отдать той модели, которая обеспечивает лучшие результаты при расчете полей турбулентных течений. С этой точки зрения превосходство моделей переноса турбулентной кинетической энергии, описываемых ниже, является очевидным.

8.3. МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ТУРБУЛЕНТНОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Модели переноса турбулентной кинетической энергии можно определить как модели, в которых величина турбулентного касательного напряжения в точке связывается с локальным значением турбулентной кинетической энергии либо модельным соотношением, либо посредством системы взаимосвязанных уравнений [1] и в которых для получения пространственного распределения касательных напряжений решается уравнение переноса турбулентной кинетической энергии [2]. В этих моделях могут использоваться решения других уравнений, например, для масштаба турбулентности и скорости диссипации турбулентной кинетической энергии. Однако модели, содержащие решение уравнений для всех составляющих тензора напряжений Рейнольдса (ПНР-модели, в терминологии Меллора и Херринга [4]), не входят в эту группу.

Модели переноса кинетической энергии также удобно разделить

на группы в зависимости от вида используемого соотношения, связывающего касательное напряжение с кинетической энергией. Одну группу, в которой используется соотношение, предложенное Невзглядовым [42] и Драйденом [43], а также некоторыми др. авторами, а именно

$$\tau = a_1 \rho e, \quad (8.11)$$

мы будем называть моделями Невзглядова—Драйдена (НД), а другую группу, основанную на соотношении, предложенном Прандтлем [21] и Колмогоровым [20] — моделями ПК:

$$\tau = \rho \nu_T \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (8.12)$$

где

$$\nu_T = C_\mu e^{1/2} l_k, \quad (8.13)$$

а l_k представляет собой масштаб турбулентности. Можно надеяться, что как a_1 , так и C_μ являются универсальными постоянными, значения которых для всех течений можно определить заранее. Однако сразу же становится ясно, что уравнение (8.11) без какой-либо модификации нельзя использовать для течений, в которых меняется знак касательных напряжений, или для осесимметричных струй, в которых касательное напряжение на оси симметрии равняется нулю, а кинетическая энергия в нуль не обращается. Для таких течений Ли и Харша [27] предложили следующее выражение:

$$a_1 = a_1^* \frac{(\partial U / \partial y)}{|\partial U / \partial y|_{\max}}. \quad (8.14)$$

Здесь $|\partial U / \partial y|_{\max}$ представляет собой абсолютное значение градиента средней скорости в точке, где достигается максимум абсолютной величины касательного напряжения. Эта модификация превращает выражение (8.11) в соотношение, совпадающее по форме с выражением (8.12), при

$$\nu_T = a_1^* e / |\partial U / \partial y|_{\max}. \quad (8.15)$$

Модели, разработанные Брэдшоу и др. [12] для плоских течений в пограничном слое, Ли и Харша [27], а также Харша [28, 29] для плоских и осесимметричных течений со свободными границами, Морелом и др. [14], а также Морелом и Торда [15] для плоских течений со свободными границами, Пейтелом и Хэдом [30] для течений в пограничном слое и Петерсом и Фаресом [31] для плоских и пространственных течений со свободными границами, принадлежат к группе моделей Невзглядова—Драйдена. Кроме вышеперечисленных, к этой группе относятся модели Ли и др. [44], Микатаряна и Бенфилда [45], а также Родса и др. [46]. В этих ра-

ботах, выполненных в последнее время, основное внимание уделено моделированию течений двухкомпонентных и реагирующих смесей.

Методы расчета плоских и осесимметричных течений со свободными границами, относящиеся к группе моделей Прандтля—Колмогорова, разработаны Лаундером и др. [26], а также Роди [24], а соответствующий метод для плоских течений в пограничном слое—Нг и Сполдингом [19]. Известны различающиеся в основном выбором переменных во вспомогательных уравнениях (для масштаба турбулентности и скорости диссипации турбулентной кинетической энергии) варианты этих моделей, приложения которых к расчетам различных течений описаны в литературе. Эти приложения включают в себя расчеты течений в плоских пограничных слоях при низких числах Рейнольдса [23], а также полей течения эллиптического типа, образующихся в результате резкого расширения трубы [47].

8.3.1. Модели Невзглядова — Драйдена первого типа: Брэдшоу и др. [12]

Первый практический метод расчета, основанный на модели турбулентности Невзглядова—Драйдена [уравнение (8.11)], был разработан в 1967 г. Брэдшоу и сотр. [12]. Описание этого метода в окончательном виде содержится в работе Брэдшоу и Ферриса [48], где, кроме того, описываются некоторые его приложения. Как утверждает в работе [48], метод «был успешно применен к течениям в пограничном слое с учетом сжимаемости, теплопередачи, трехмерности и нестационарности, причем почти все эмпирические входные данные были получены для течений с малыми скоростями при постоянном давлении. С изменениями в числовых значениях эмпирических постоянных метод был обобщен на случаи течений в трубах и в свободных слоях смешения».

Поскольку при расчете турбулентных течений основная проблема заключается в определении выражения для напряжений Рейнольдса, естественно рассмотреть уравнение переноса, описывающее скорость изменения этих напряжений. В случае плоского течения несжимаемой жидкости в пограничном слое уравнение для напряжений Рейнольдса

$$\tau = -\rho \bar{uv}$$

имеет вид

$$\underbrace{U \frac{\partial \tau}{\partial x} + V \frac{\partial \tau}{\partial y}}_I = \underbrace{\rho \bar{v}^2 \frac{\partial U}{\partial y}}_{II} - \underbrace{\rho' \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{III} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} (\rho' u + \rho \bar{u} v^2)}_{IV} - \underbrace{\mu \frac{(\bar{u} \nabla^2 v + v \nabla^2 u)}{V}}_V. \quad (8.16)$$

Члены этого уравнения можно интерпретировать следующим образом: I — перенос осредненным течением; II — генерация; III — деформации под действием сил давления; IV — перенос, обусловленный турбулентностью; V — влияние вязкости.

Уравнение (8.16) можно получить точно из уравнений Навье—Стокса, однако, как и во всех других уравнениях для осредненных по Рейнольдсу характеристик турбулентных течений, здесь появляются члены, зависимость которых от известных или рассчитываемых величин необходимо установить, прежде чем использовать уравнение в расчетах. Для этого необходимо иметь экспериментальные данные, но поскольку до сих пор не разработано общепринятых методов измерений пульсаций давления, входящих в III и IV члены, для анализа можно использовать уравнение переноса турбулентной кинетической энергии

$$\rho e = -\frac{1}{2} \rho (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2),$$

которое можно записать в следующем виде:

$$\underbrace{U \frac{\partial \rho e}{\partial x} + V \frac{\partial \rho e}{\partial y}}_I = \underbrace{\tau \frac{\partial U}{\partial y}}_{II} - \underbrace{-\frac{\partial}{\partial y} (\overline{p'v} + \rho \bar{e}v)}_{III} - \underbrace{\rho \varepsilon}_{IV}. \quad (8.17)$$

Членам этого уравнения можно дать следующее физическое толкование: I — конвективный перенос осредненным течением; II — генерация; III — диффузия; IV — вязкая диссипация.

В уравнении (8.17) все еще содержится член с пульсациями давления, однако измерения величин других членов в этом уравнении показывают, что этот член обычно мал и во всяком случае составляет часть того же самого процесса диффузии, что и член вида $\rho \bar{e}v$. Величины остальных членов в уравнении (8.17) можно измерить, и характер их поведения, по крайней мере в безградиентных течениях несжимаемой жидкости, хорошо известен.

Для того чтобы использовать в расчетах уравнение (8.17), Брэдшоу и Феррис на основании работы Таунсенда [49] выдвинули гипотезу о том, что «любому заданному профилю касательных напряжений $\tau(y)$ соответствует единственный профиль любой другой характеристики турбулентности» [48]. Для замыкания уравнения (8.17) эти авторы использовали следующие соотношения:

$$a_1 \equiv \frac{\tau}{\rho e}, \quad (8.18)$$

$$L \equiv \frac{(\tau/\rho)^{3/2}}{\varepsilon}, \quad (8.19)$$

$$G \equiv \frac{\overline{p'v}/\rho + \bar{e}v}{(\tau/\rho)(\tau_{\max}/\rho)^{1/2}}, \quad (8.20)$$

где a_1 и G — безразмерные величины, L — масштаб длины (масштаб диссипации), а $\tau_{\max}$ определяется как максимальное значение касательного напряжения во внешней части пограничного слоя.

Выражения (8.18) — (8.20) фактически являются определениями величин a_1 , L и G ; для того чтобы использовать эти выражения, необходимо присвоить величинам a_1 , L и G значения, применимые для многих различных течений. На основании анализа экспериментальных данных Брэдшоу и Феррис [48] установили, что поведение a_1 , L и G описывается универсальными эмпирическими функциями, вид которых воспроизводится на рис. 8.1.

Интересно отметить, что если диффузионный член определяется выражением (8.20), то система уравнений движения [нераз-

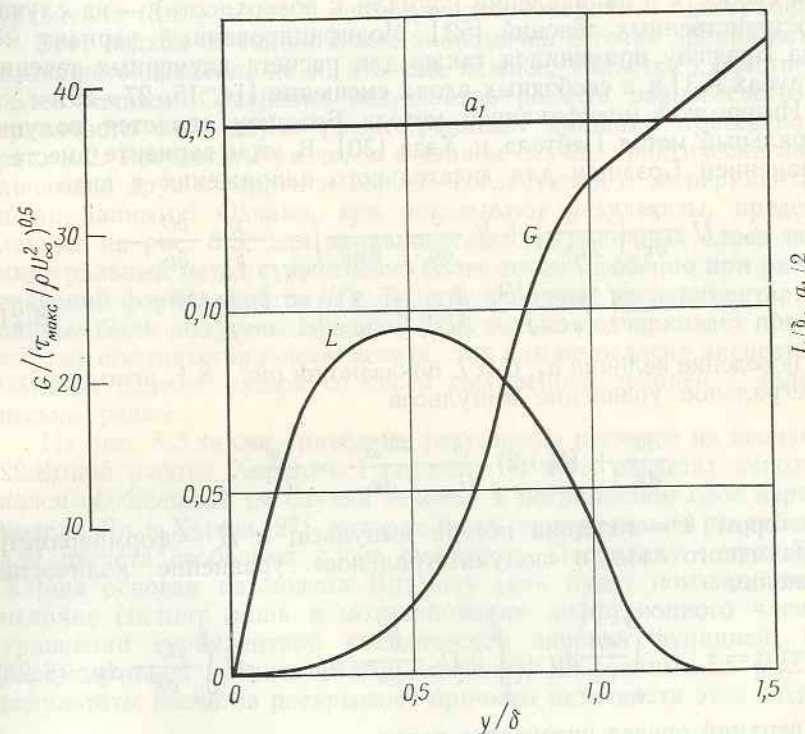


Рис. 8.1. Эмпирические функции Брэдшоу и др. [12].

рывности, количества движения и уравнения (8.17), преобразованного с помощью выражения (8.18) в уравнение для турбулентного касательного напряжения] является *гиперболической*, что позволяет для ее численного решения использовать метод характеристик. Физическая интерпретация этого факта заключается в том, что малое возмущение, вносимое в некоторую точку поля течения, возмущает течение только внутри области влияния, ограниченной проходящими через эту точку характеристиками.

Точность этой модели была продемонстрирована для большого числа различных течений в пограничном слое; результаты расчетов приведены, например, в работах [12, 48] и в трудах Стенфордской конференции 1968 года [41]. Этот метод расчета был распространен на случай течения сжимаемого газа у теплоизолированной стенки [50]; путем введения, по аналогии с соотношением (8.17), уравнения для скалярной величины, характеризующей перенос примеси, — на случай течения несжимаемой жидкости с теплопередачей или с переносом примесей [51]; путем введения уравнения для другой составляющей тензора касательных напряжений $\rho \overline{wv}$ (v — составляющая скорости в направлении нормали к поверхности) — на случай пространственных течений [52]. Модифицированный вариант метода Брэдшоу применялся также для расчета двумерных течений в трубах [53] и в свободных слоях смешения [14, 15, 27–29].

Интересной модификацией метода Брэдшоу является полуинтегральный метод Пейтела и Хэда [30]. В этом варианте вместе с уравнением Брэдшоу для касательного напряжения в виде

$$U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau}{2a_1 \rho} \right) + V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau}{2a_1 \rho} \right) = \frac{\tau}{\rho} \frac{\partial U}{\partial y} - \left(\frac{\tau_{\max}}{\rho} \right)^{1/2} \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\tau}{\rho} \right) - \frac{(\tau/\rho)^{3/2}}{L}, \quad (8.21)$$

где поведение величин a_1 , G и L показано на рис. 8.1, используется интегральное уравнение импульсов

$$\frac{d\theta}{dx} + (H+2) \frac{\theta}{U_\infty} \frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty}, \quad (8.22)$$

в котором θ — толщина потери импульса, а H — формпараметр пограничного слоя, и «полуинтегральное» уравнение количества движения

$$\tau(y) = \tau_w + \int_0^y \frac{dp}{dx} dy + \int_0^y 2\rho U \frac{\partial U}{\partial x} dy - \rho U \int_0^y \frac{\partial U}{\partial x} dy, \quad (8.23)$$

где верхний предел интегралов равен половине толщины пограничного слоя. Затем в уравнении (8.23) используется двупараметри-

ческое семейство профилей скорости Томпсона и соответствующий им закон касательного напряжения на стенке [54]; эти профили скорости и коэффициент трения являются функциями θ и H .

Используемый Пейтелом и Хэдом алгоритм решения системы уравнений (8.21) — (8.23) заключается в следующем: сначала в точке с номером $i+1$ задаются значением формпараметра H ; затем из уравнения (8.22) при заданном градиенте давления определяется значение θ ; по этим значениям θ , H и семейству профилей определяется значение касательного напряжения при $y = 0,5\delta$, где δ — толщина пограничного слоя в промежуточной точке $i + \frac{1}{2}$; наконец, решается уравнение (8.21), и его решение используется для проверки того, удовлетворяет ли уравнению (8.21) приращение касательного напряжения вдоль линии $y = 0,5\delta$ на участке от точки $(i - \frac{1}{2})$ до точки $(i + \frac{1}{2})$, определяемое по заданному семейству профилей. Если этот критерий не удовлетворяется, то выполняется новая итерация, в которой используется вновь полученное значение H , и эта процедура продолжается до тех пор, пока уравнения (8.21) и (8.22) не будут удовлетворяться одновременно.

Этот подход не только более экономичен с точки зрения затрат машинного времени, но и, что еще важнее, является существенно более точным. Сравнение результатов расчета равновесного пограничного слоя двумя рассмотренными методами приведено на рис. 8.2. Результаты расчетов в данном случае практически не отличаются друг от друга и хорошо согласуются с экспериментальными данными. Однако, как показывают результаты, представленные на рис. 8.3, для неравновесных пограничных слоев полуинтегральный метод существенно более точен (особенно при расчете значений формпараметра H). То, что исходные экспериментальные данные были получены Брэдшоу [55], только подчеркивает преимущество полуинтегрального метода, так как несогласие экспериментальных данных автора со своей собственной теорией — явление весьма редкое.

На рис. 8.3 также приведены результаты расчетов из неопубликованной работы Харша и Глассмана. В этих расчетах использовался обобщенный на случай течения в пограничном слое вариант модели Ли и Харша [27], которая была первоначально разработана для расчета свободных слоев смешения. Поскольку метод Ли и Харша основан на модели Брэдшоу (как будет показано ниже, отличие состоит лишь в моделировании диффузионного члена в уравнении турбулентной кинетической энергии функцией, пропорциональной градиенту этой энергии), показанные на рис. 8.3 результаты расчетов раскрывают причины неточности этой модели.

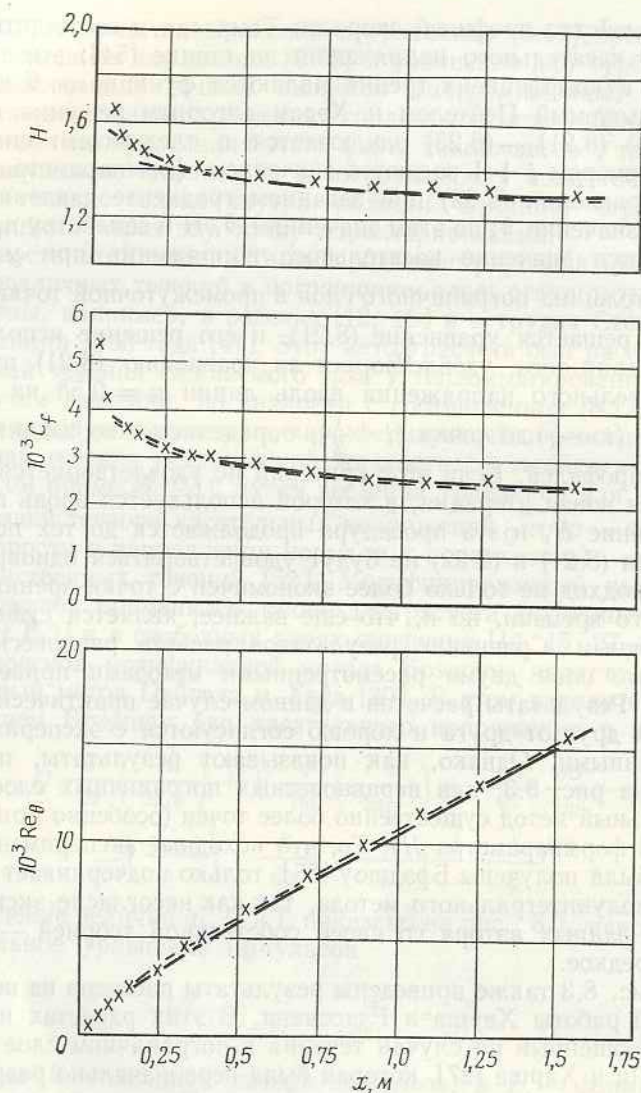


Рис. 8.2. Сопоставление результатов расчетов равновесного пограничного слоя по интегральному и конечно-разностному вариантам модели переноса турбулентной кинетической энергии. Рисунок взят из работы Пейтла и Хэда [30]. — Брэдшоу [51]; — — — Пейтел и Хэд [30]; x эксперимент [30].

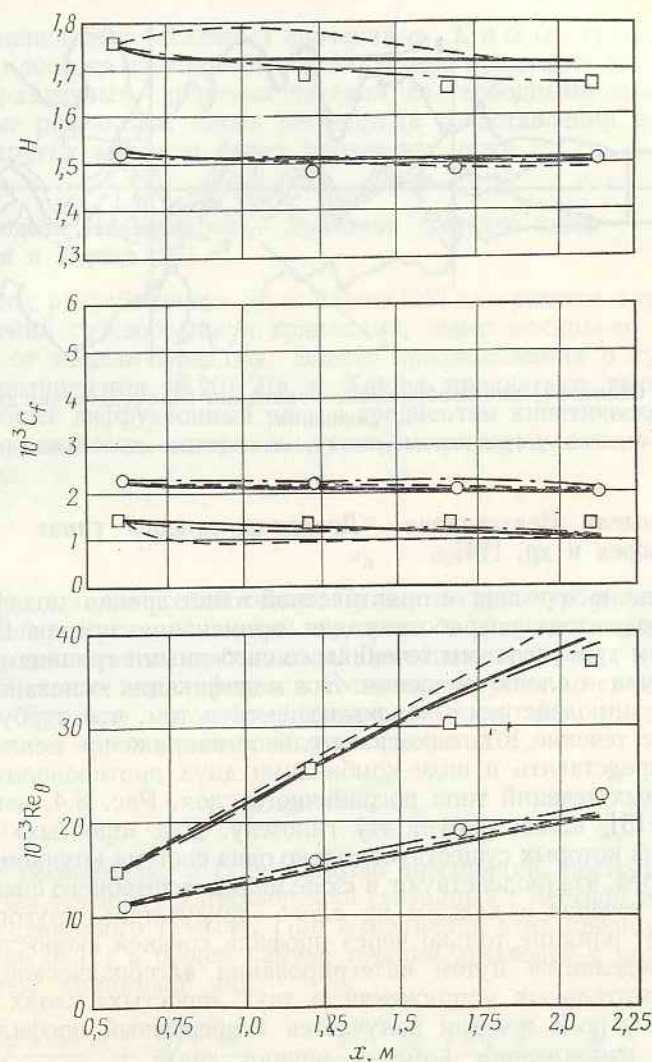


Рис. 8.3. Сопоставление результатов расчета по интегральному и конечно-разностному вариантам модели переноса турбулентной кинетической энергии с данными измерений в плоском пограничном слое. $\circ$ $\square$ эксперимент [41]; расчет: — Пейтел и Хэд [30], — — — Брэдшоу и др. [41], — · — · Харша и Гласмен (неопубликованные данные).

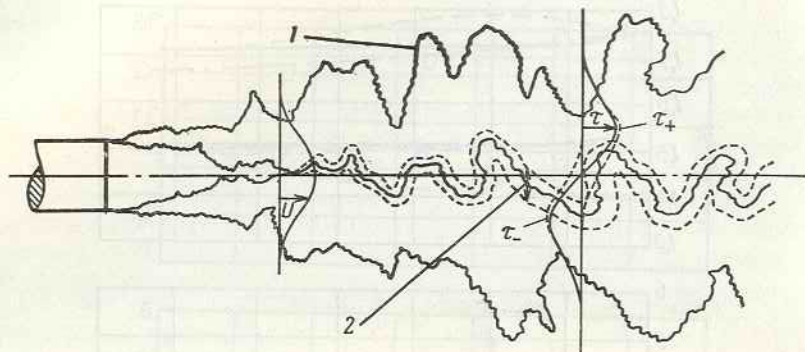


Рис. 8.4. Схематическое изображение концепции взаимодействия двух слоев смещения.

1 — граница турбулентного потока; 2 — зона мелкомасштабного смещения.

8.3.2. Модели Невзглядова — Драйдена второго типа: Морел и др. [14]

Другая интересная с практической точки зрения модификация основного метода разработана для применения модели Брэдшоу к плоским турбулентным течениям со свободными границами в следах, струях и слоях смещения. Эта модификация основана на понятии «взаимодействия», заключающемся в том, что турбулентное сдвиговое течение, в котором касательное напряжение меняет знак, можно представить в виде комбинации двух противоположно направленных течений типа пограничного слоя. Рис. 8.4, взятый из работы [15], иллюстрирует эту гипотезу. Два «простых» слоя, в каждом из которых существует только одна система крупномасштабных вихрей, взаимодействуют в «зоне мелкомасштабного смещения». На поле течения в каждом из слоев присутствие другого слоя оказывает влияние только через профиль средней скорости, который определяется путем интегрирования алгебраической суммы полей касательных напряжений в двух «простых» слоях. Таким образом, в поле течения получается непрерывный профиль касательных напряжений, которые меняют знак.

Данный подход позволяет использовать в свободных сдвиговых течениях эмпирические функции, полученные для случая плоского течения в пограничном слое на стенке, однако применение его становится весьма проблематичным в случае осесимметричных течений (необходимо постулировать взаимодействие бесконечного числа пограничных слоев). Из такого представления течения также следует, что значения a_1 , L и G , полученные для течения в пограничном слое, нельзя непосредственно использовать в расчетах свободных сдвиговых течений. Тем не менее данный метод с некото-

рыми изменениями численных значений a_1 , L и G (по сравнению со случаем плоского пограничного слоя) можно применять для расчета многих различных сдвиговых течений со свободными границами; некоторые результаты таких расчетов (в сопоставлении с результатами других методов) будут приведены ниже.

8.3.3. Модели Невзглядова — Драйдена третьего типа: Ли и Харша [27]

Модель, разработанная Ли и Харша [27] для расчета турбулентных течений со свободными границами, имеет несколько важных отличий от модели Брэдшоу. Вместо предположения о существовании соотношения (8.20) Ли и Харша предлагают выражение, связывающее диффузионный член с градиентом кинетической энергии турбулентности, которое в случае, например, плоского течения имеет вид

$$(\overline{\rho'v} + \overline{\rho'v_e}) = \frac{\rho'v_T}{\sigma_h} \frac{\partial e}{\partial y}, \quad (8.24)$$

где σ_h представляет собой «число Прандтля» для турбулентной кинетической энергии, значение которого в рассматриваемом течении предполагается постоянным. Диссипативный член в уравнении (8.17) также моделировался несколько другим по сравнению с моделью Брэдшоу способом. Предполагалось, что имеет место соотношение, предложенное Колмогоровым [20],

$$\rho e \equiv \frac{a_2 \rho e^{3/2}}{l_h}, \quad (8.25)$$

где a_2 — постоянная, а l_h — масштаб диссипации, постоянный поперек поля течения и алгебраически связанный с местной толщиной области сдвигового течения. При выполнении этих предположений уравнение (8.17) в общем случае течений жидкости с переменной плотностью принимает вид

$$\rho U \frac{\partial e}{\partial x} + \rho V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho'v_T y^2}{\sigma_h} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \rho'v_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{a_2 \rho e^{3/2}}{l_h}, \quad (8.26)$$

где член, характеризующий генерацию турбулентной энергии, определяется на основании соотношений (8.11) и (8.12). Величина a равняется 0 для плоского течения и 1 в случае осесимметричного. Полученное уравнение является *параболическим*, и, таким образом, главное различие между моделями Ли и Харша [27] и Брэд-

шоу [12, 48] заключается в том, что в первой из них получается параболическая система уравнений движения, а не гиперболическая, как во второй. Сопоставление результатов расчетов по этим двум моделям показывает, что влияние этого различия обычно невелико. Этот факт можно объяснить тем, что, по крайней мере в турбулентных течениях типа пограничного слоя, член в уравнении (8.26), определяющий диффузию турбулентной кинетической энергии, мал по сравнению с другими членами.

Для того чтобы использовать уравнение (8.26) в расчетах турбулентных течений со свободными границами, необходимо аппроксимировать довольно сложное поведение параметров a_1 , a_2 и масштаба диссипации l_k . Подробно эта процедура описана в работах [28, 29]. Вообще говоря, параметр a_1 можно записать в виде

$$a_1 = 0,3 f_1(y), \quad (8.27)$$

где конкретный вид функции $f_1(y)$ меняется в зависимости от рассматриваемого течения в соответствии с данными табл. 8.1. Упоминаемые в табл. 8.1 режимы течения схематически показаны на рис. 8.5, а результаты, приведенные на рис. 8.6, свидетельствуют о том, что довольно-таки произвольный вид эвристической зависимости $f_1(y)$ по крайней мере для некоторых течений удовлетворительно аппроксимирует изменение a_1 в эксперименте. Масштаб турбулентности l_k также по-разному определяется для различных режимов течения, и в табл. 8.2 приводятся различные способы аппроксимации поведения этой величины. Использование различной аппроксимации обусловлено невозможностью получения общего выражения для масштаба длины, действительного для разнообразных течений.

Во многих представляющих практический интерес течениях члены, определяющие генерацию и диссипацию турбулентной кинетической энергии, являются наибольшими. Так как член, описывающий генерацию кинетической энергии, получен строго, и вследствие того, что значение 0,3 для отношения $a_1/f_1(y)$ хорошо подтверждается экспериментальными данными [56], очевидно, что для увеличения общности модели Ли и Харша необходимо в основном пытаться улучшить моделирование поведения члена, описывающего диссипацию. На проведенной в 1972 г. в Исследовательском центре NASA им. Лэнгли конференции по турбулентным сдвиговым течениям со свободными границами [57] было рассмотрено большое количество исследований различных течений в свободных слоях смещения, в результате чего было отмечено, что модель Ли и Харша (а также соответствующий интегральный метод Петерса и Фареса [31]) в случае многих из этих течений нуждается в улучшении. Это возможно путем моделирования поведения параметра a_2 , определяющего скорость диссипации. Одна из попыток такого моделирования, рассчитанная на применение метода Петерса и Фареса

Таблица 8.1

Определение функции $f_1(y)$ в модели Ли и Харша [27, 29]¹

Режим течения	Диапазон применимости	Выражение для f_1	Примечания
Плоский слой смещения и течение в струе в первом режиме	$0,05 \leq \frac{U - U_e}{U_j - U_e} \leq 0,95$	$f_1(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \left\ \frac{\partial u}{\partial y} \right\ $	Обеспечивает необходимый знак касательного напряжения Величина ν_t остается постоянной, равной значению, полученному при $(U - U_e)/(U_j - U_e) = 0,05$ Величина ν_t остается постоянной, равной значению, полученному при $(U - U_e)/(U_j - U_e) = 0,95$ Обеспечивает необходимый знак касательного напряжения
	$0 \leq \frac{U - U_e}{U_j - U_e} < 0,05$	0	
	$0,95 < \frac{U - U_e}{U_j - U_e} \leq 1,0$	0	
Оссиметричная или плоская струя во втором режиме, течение в следе	$U_c > 0,09 U_j$	$f_1(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \left\ \frac{\partial u}{\partial y} \right\ $	$y_{\max}$ — расстояние по нормали, на котором $ \partial u / \partial y $ достигает максимума
	$U_c < 0,09 U_j$ $y \leq y_{\max}$	$f_1(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \left\ \frac{\partial u}{\partial y} \right\ _{\max}$	
	$U_c > 0,09 U_j$ $y > y_{\max}$	$f_1(y) = \frac{\partial u}{\partial y} \left\ \frac{\partial u}{\partial y} \right\ $	

¹ Для течений с нулевым суммарным импульсом, в которых имеется две точки максимума $|\partial u / \partial y|$, в выражении для $f_1(y)$ используется соответствующий максимум в каждой части течения.

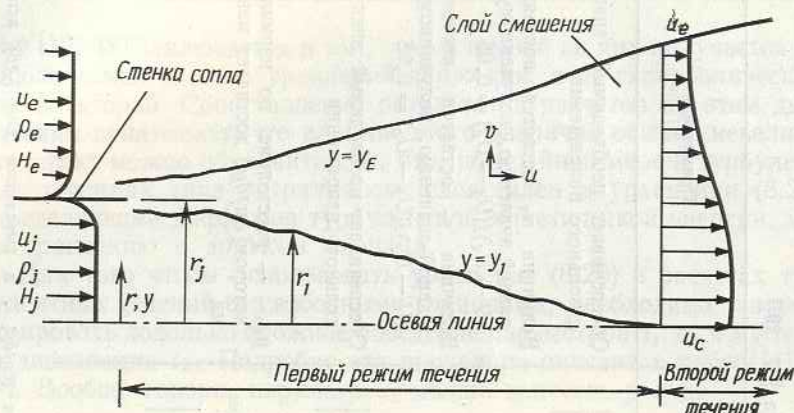


Рис. 8.5. Схематическое изображение поля течения со свободными границами [29].

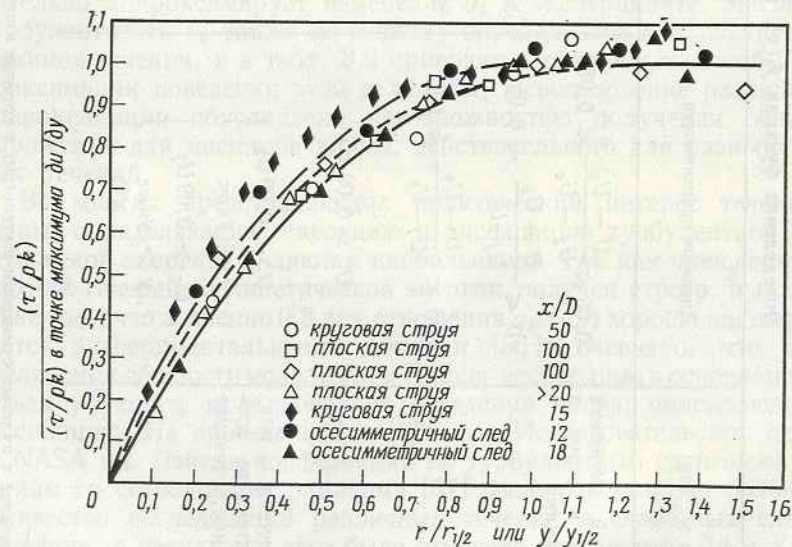


Рис. 8.6. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных для отношения напряжения трения к кинетической энергии [29].

Расчетные кривые: — спутная струя, $x/D=61$; — струя в воздушном пространстве, $x/D=52$; — осесимметричный след, $x/D=23$.

Таблица 8.2

Определение масштаба турбулентности l_k в модели Ли и Харша [27, 29]

Режим течения	Масштаб турбулентности
Плоский слой смешения или струя в первом режиме течения с неполностью развитым профилем	$l_k = y_2 - y_1$, где y_2 — точка, в которой $(U - U_e)/(U_j - U_e) = 0,05$, а y_1 — точка, в которой $(U - U_e)/(U_j - U_e) = 0,95$
с полностью развитым профилем	$l_k = 1,57 (U_j - U_e)/(\partial U/\partial y)_m$, где индекс m обозначает точку, в которой касательное напряжение достигает максимума ¹
Плоский след	$l_k = y_2 - y_1$, где y_2 — точка, в которой $(U - U_e)/(U_j - U_e) = 0,05$, а $y_1 = 0$
Струя во втором режиме течения	$l_k = 2 r_{1/2}$, где $r_{1/2}$ — точка, в которой $(U - U_e)/(U_c - U_e) = 0,5$

¹ Это определение используется, когда имеет место $(y_2 - y_1) < l_k < 1,57 (y_2 - y_1)$.

Таблица 8.3

Определение функции $f_2(R_T)$ в модели Харша [29]

$$f_2(R_T) = \begin{cases} 1/C_1 & \text{при } 0 < R_T < 185, \\ (0,46 + 0,007 R_T)/1,69 C_1 & \text{при } 185 < R_T < 360, \\ 3,20/1,69 C_1 & \text{при } R_T > 360, \end{cases}$$

где

$$R_T = \Delta u l_k / \nu_{Tm}$$

$$\nu_{Tm} = (\tau_m / \rho_m) / (\partial u / \partial y)_m$$

Величина Δu представляет собой изменение скорости поперек вязкого слоя, а индекс m относится к точке максимума касательного напряжения в данном сечении на оси. Множитель C_1 используется для того, чтобы скорректировать влияние изменения плотности. Он определяется выражениями

$$C_1 = \begin{cases} 0,984 + 0,016 \rho_{e1}/\rho_{j1} & \text{при } (\rho_{e1}/\rho_{j1}) > 1, \\ 0,95 + 0,05 R_e T_e / R_j T_j & \text{при } (\rho_{e1}/\rho_{j1}) < 1, \end{cases}$$

где индекс 1 относится к условиям в начальном сечении слоя смешения, R_e — газовая постоянная для течения вне струй, R_j — газовая постоянная для течения в струе, T_e — температура торможения внешнего течения, T_j — температура торможения струи.

[31], заключается в использовании соотношения

$$a_2 = 1,69 f_2(R_T), \quad (8.28)$$

где R_T — турбулентное число Рейнольдса. Вид функции $f_2(R_T)$ зависит также от исходного значения отношения плотностей в смешивающихся течениях, и полная зависимость f_2 от этих величин представлена в табл. 8.3. Хотя указанные в табл. 8.3 частные зависимости довольно-таки сложны, они приводят к хорошим результатам для многих течений в слоях смешения со свободными границами [28, 31] и существенно увеличивают диапазон применимости модели.

Аналогично интегральному варианту Пейтела и Хэда [30] модели Брэдшоу [12] существует интегральный вариант [31] модели Ли и Харша [27, 29]. Введение в интегральный метод соответствующих эмпирических данных позволяет получить модель, описывающую некоторые течения значительно точнее, чем исходная модель в конечно-разностной формулировке.

В методе Петерса и Фареса [31] интегрируются уравнения, описывающие осесимметричное течение сжимаемой жидкости, в результате чего получается следующая система уравнений:

1) Уравнение неразрывности для всего течения

$$\int_0^{r_w} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) r dr = - \rho_e U_e r_w \frac{dr_w}{dx}, \quad (8.29)$$

где r_w — радиус невязкого потока, который, как предполагается, окружает струйное течение, а индекс e указывает, что значение функции берется на внешней границе течения (т. е. на границе струи).

2) Полное уравнение количества движения

$$\int_0^{r_w} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U^2) r dr = - \frac{r_w^2}{2} \frac{dP_w}{dx} - \rho_e U_e^2 r_w \frac{dr_w}{dx}. \quad (8.30)$$

3) Уравнение количества движения в сечениях половинного радиуса

$$\int_0^{r_m} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U^2) r dr - U_m \int_0^{r_m} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) r dr = \tau_m r_m - \frac{r_m^2}{2} \frac{dP_w}{dx}, \quad (8.31)$$

где r_m — радиус, на котором $U_m = 1/2(U_c + U_e)$, а U_c — значение скорости на оси симметрии.

4) Уравнение сохранения расхода одной из составляющих смеси

$$\int_0^{r_w} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U C) r dr = 0. \quad (8.32)$$

5) Интегральное уравнение переноса турбулентной кинетической энергии

$$\int_{r_i}^{r_i+b} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U_e) r dr = \int_{r_i}^{r_i+b} \tau \frac{\partial U}{\partial r} r dr - \frac{a_2}{b} \int_{r_i}^{r_i+b} \rho e^{3/2} r dr. \quad (8.33)$$

В последнем уравнении интегралы берутся поперек вязкой области, внутренняя граница которой располагается на расстоянии r_i от оси симметрии, а толщина равняется b . Интегрирование позволяет избавиться от диффузионного члена, и с учетом того, что генерация турбулентной кинетической энергии равняется отрицательной величине диссипации механической энергии основного движения, т. е.

$$\begin{aligned} \int_{r_i}^{r_i+b} \tau \frac{\partial U}{\partial r} r dr &= - \int_{r_i}^{r_i+b} U \frac{\partial}{\partial r} (\tau r) dr = - \frac{1}{2} \int_0^{r_i+b} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U^3) r dr + \\ &+ \frac{1}{2} U_e^2 \int_0^{r_i+b} \frac{\partial}{\partial x} (\rho U) r dr - \frac{dP_w}{dx} \int_0^{r_i+b} U r dr, \end{aligned} \quad (8.34)$$

уравнение (8.33) можно записать в виде, в котором оно явно не зависит от турбулентного напряжения трения τ .

Затем вводятся семейства профилей для U , C и e ; предположение о равенстве единице числа Льюиса непосредственно связывает энтропию с C . Семейства профилей являются функциями характерных локальных значений зависимых переменных, а также положения в пространстве и толщины вязкой области. Функции в этих семействах имеют форму косинусов, отличаются друг от друга в первом и втором режимах течения и используются вместе с эмпирической переходной функцией, полученной для профилей турбулентной кинетической энергии. Эмпирические данные, на которых основаны эти семейства профилей, получены в основном из экспериментов с течениями несжимаемой жидкости.

После введения семейств профилей в уравнения (8.30) — (8.33) в первом режиме течения получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для P_w , r_i , b и e_m . Во втором режиме зависимыми переменными являются P_w , U_c , b и e_m , причем e_m в обоих режимах течения представляет собой значение кинетической энергии в точке r_m , где скорость равняется полусумме значений U_e и U_c . Из процедуры вывода уравнений следуют два важных свойства: как уже отмечалось, диффузионный член выпадает из уравнения кинетической энергии турбулентности (конечно, диффузия неявным образом входит в уравнение через принятый

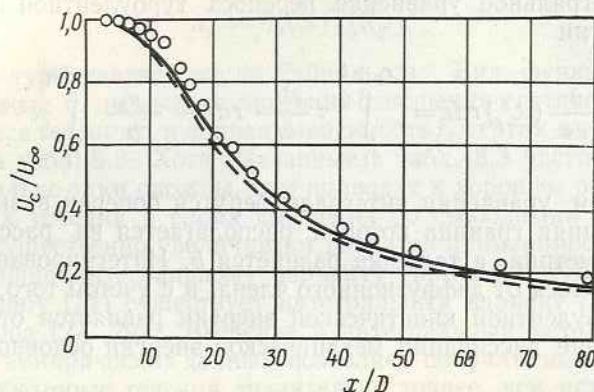


Рис. 8.7. Сопоставление результатов расчета осесимметричной струи по интегральному и конечно-разностному вариантам модели турбулентности при $M_0 = 0,64$, случай 6 из работы [53].
— Харша [28]; --- Петерс и Фарес [31].

для турбулентной кинетической энергии профиль), и, кроме того, теперь достаточно иметь соотношение между напряжением трения и кинетической энергией только в точке r_m внутри течения, где $U = \frac{1}{2}(U_c + U_m)$, а в этой точке выражение

$$|\tau|/(\rho e) = 0,3$$

является превосходной аппроксимацией [56].

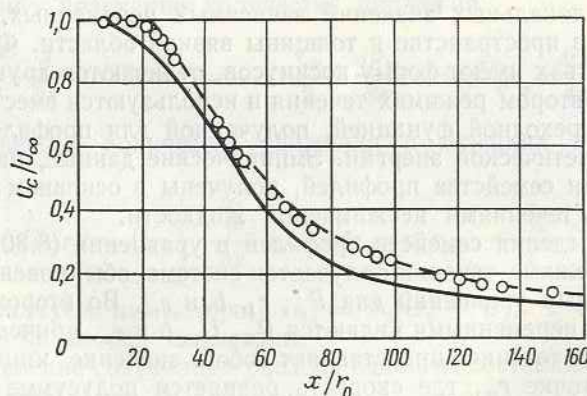


Рис. 8.8. Сопоставление результатов расчета осесимметричной струи по интегральному и конечно-разностному вариантам модели турбулентности при $M_0 = 2,2$, случай 7 из работы [53].
— Харша [28]; --- Петерс и Фарес [31].

Модель Ли и Харша [27] в конечно-разностной [28] и в интегральной формах [31] рассматривалась в 1972 г. на конференции в Исследовательском центре NASA им. Лэнгли [57], и поэтому указанные варианты основной модели могут быть сопоставлены непосредственно. На рис. 8.7 сравниваются результаты расчетов круговой струи слабосжимаемой жидкости по конечно-разностной и интегральной моделям. Расхождение результатов невелико. Однако в случае сверхзвуковой струи (рис. 8.8) интегральная модель дает значительно более точные результаты. В этом случае неточность конечно-разностного метода в переходной области между I и II режимами течения в струе (рис. 8.5) влияет на значительных расстояниях вниз по потоку. Неточность конечно-разностного метода является следствием определений $f_1(y)$ и l_h , данных в табл. 8.1 и 8.2. Когда течение переходит из одного режима в другой, эти функции довольно резко меняются.

Влияние резкого изменения определений $f_1(y)$ и l_h в случае сверхзвуковой струи водорода в воздухе менее существенно по сравнению со случаем сверхзвуковой воздушной струи. На рис. 8.9 сопоставляются результаты расчетов с помощью интегральной и конечно-разностной моделей для первого из вышеупомянутых течений. Относительно небольшие погрешности в рассчитанных с помощью интегральной модели значениях концентрации на оси симметрии являются, вероятно, следствием использовавшихся при разработке интегральной модели предположений о равенстве единице чисел Прандтля и Шмидта. Как показано на рис. 8.10, эти предположения при расчете дозвукового смешения водорода и воздуха приводят к значительно большим ошибкам; более удовлетворительными для этого течения являются результаты расчета по конечно-разностной модели, в которой числа Прандтля и Шмидта могут быть не равными единице.

Представляет интерес сопоставление результатов расчетов в двух следующих случаях. В первом из них рассматривается осесимметричный след в несжимаемой жидкости, результаты расчетов которого по интегральной и конечно-разностной моделям представлены на рис. 8.11. Через W здесь обозначена величина $1 - u_c/u_e$. Хотя ни те, ни другие результаты не являются достаточно точными (необходимо отметить, что способ представления величин на графике усиливает небольшие неточности), форма кривой, полученной с помощью интегрального метода, качественно лучше согласуется с экспериментальными данными. Такое сопоставление становится еще более наглядным при рассмотрении асимптотического поведения струи, результаты расчета которого показаны на рис. 8.12. Соображения подобия показывают, что асимптотика скорости затухания круговой струи несжимаемой жидкости должна быть пропорциональной x^{-1} . Из данных, представленных на этом рисунке, становится ясно, что, хотя результаты

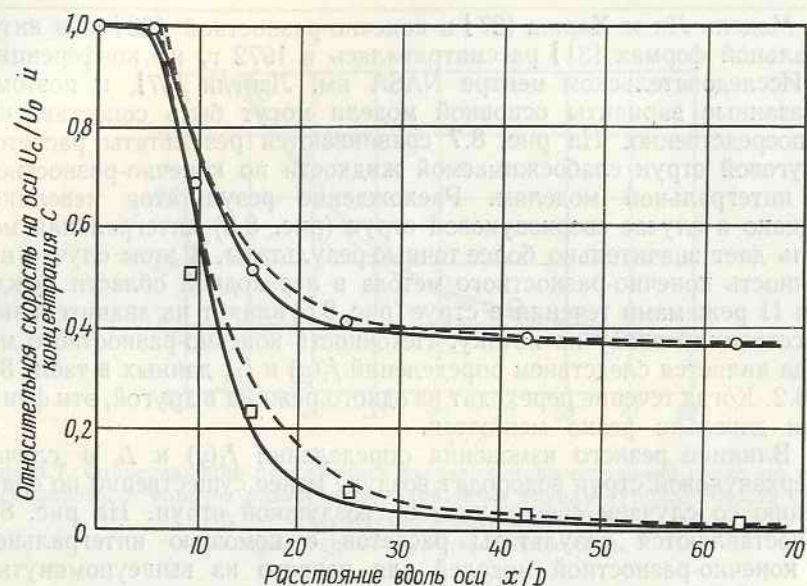


Рис. 8.9. Сопоставление результатов расчета струи водорода в спутном потоке воздуха по интегральному и конечно-разностному вариантам модели переноса турбулентной кинетической энергии при $M_e = 1,33$, случай 12 из работы [53].

Теория: — конечно-разностная модель Харша [28], $Pr_T = Sc_T = 0,85$; --- интегральная модель Петерса и Фареса [31], $Pr_T = Sc_T = 1,0$; эксперимент: $\circ U_c/U_0$, $\square C$.

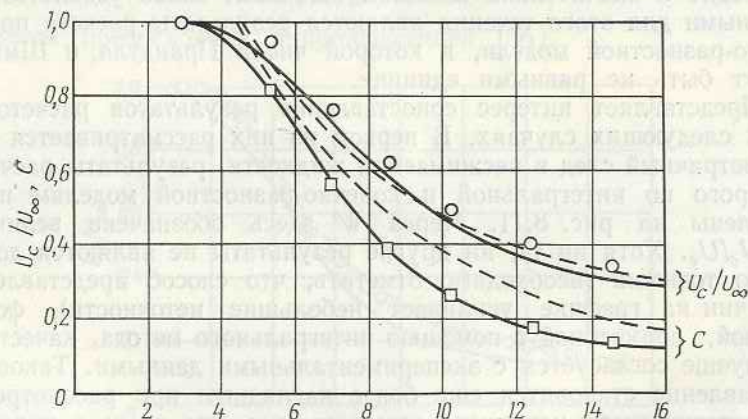


Рис. 8.10. Сопоставление результатов расчета струи водорода в спутном потоке по интегральному и конечно-разностному вариантам модели переноса турбулентной кинетической энергии при $U_c/U_0 = 0,16$, случай 10 из работы [53].

— Харша [28], $Pr_T = Sc_T = 0,85$; --- Петерс и Фарес [31], $Pr_T = Sc_T = 1,0$.

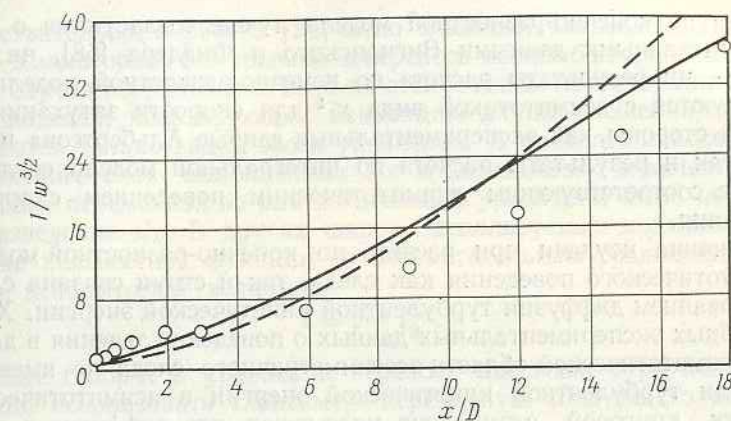


Рис. 8.11. Сопоставление результатов расчета несжимаемого осесимметричного следа по интегральному и конечно-разностному вариантам модели переноса турбулентной кинетической энергии, случай 15 из работы [53].
— конечно-разностная модель Харша [28]; --- интегральная модель Петерса и Фареса [31].

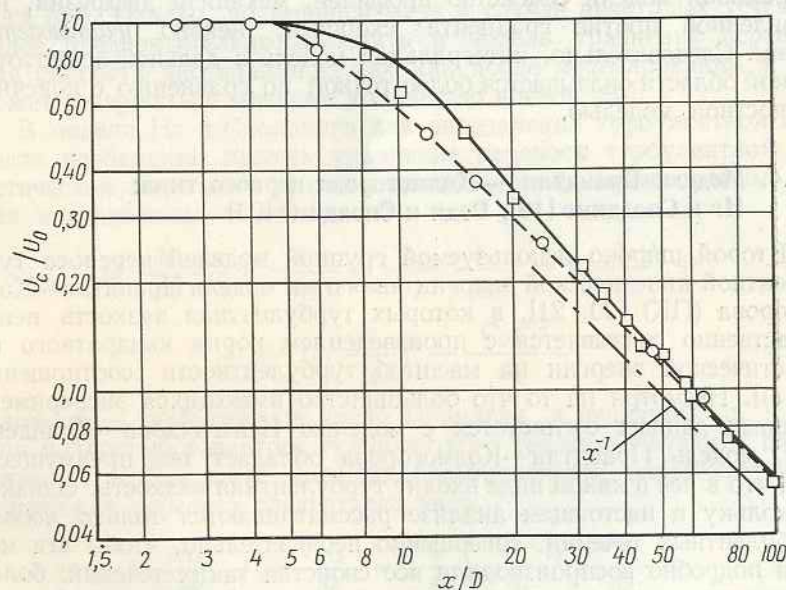


Рис. 8.12. Сопоставление результатов расчета полностью развитой осесимметричной струи по интегральному и конечно-разностному вариантам модели переноса турбулентной кинетической энергии, случай 18 из работы [53].
Теория: — конечно-разностная модель Харша [28]; --- интегральная модель Петерса и Фареса [31]; эксперимент: $\square$ [58], $\circ$ [59].

расчета по конечно-разностной модели лучше согласуются с экспериментальными данными Вигнанского и Фидлера [58], ни эти данные, ни результаты расчета по конечно-разностной модели не согласуются с асимптотикой вида x^{-1} для скорости затухания. С другой стороны, как экспериментальные данные Альбертсона и др. [59], так и результаты расчета по интегральной модели согласуются с соответствующим асимптотическим поведением скорости затухания.

Причина неудачи при расчете по конечно-разностной модели асимптотического поведения как следа, так и струи связана с моделированием диффузии турбулентной кинетической энергии. Хотя подробных экспериментальных данных о поведении течения в дальней асимптотической области осесимметричного следа не имеется, профили турбулентной кинетической энергии в асимптотической области круговой струи ясно указывают, что диффузия в этой области направлена против градиента скорости. Такой механизм диффузии не моделируется уравнением (8.24), а в интегральной модели диффузионный член вообще отсутствует. Однако поскольку эмпирические профили турбулентной кинетической энергии в асимптотической области струи были включены в используемое в интегральной модели семейство профилей, механизм диффузии, направленной против градиента скорости, неявно *учитывается* в нем. Следовательно, интегральная модель в дальней асимптотической области оказывается более точной по сравнению с конечно-разностной моделью.

8.3.4. Модели Прандтля — Колмогорова первого типа: Нг и Сполдинг [19], Роди и Сполдинг [25]

Второй широко используемой группой моделей переноса турбулентной кинетической энергии являются модели Прандтля—Колмогорова (ПК) [20, 21], в которых турбулентная вязкость непосредственно связывается с произведением корня квадратного из кинетической энергии на масштаб турбулентности [соотношение (8.13)]. Несмотря на то что большинство имеющихся экспериментальных данных согласуется с моделью Невзглядова—Драйдена [56], модель Прандтля—Колмогорова обладает тем преимуществом, что в нее в явном виде входит турбулентная вязкость. Однако, поскольку в настоящем анализе рассматриваются только модели турбулентных течений, совершенно необязательно, чтобы эти модели подробно воспроизводили все свойства таких течений; более важным свидетельством в пользу той или иной модели турбулентности является согласие полученных с ее помощью результатов с характеристиками реальных турбулентных течений.

Модели турбулентности Прандтля—Колмогорова обычно используются вместе с уравнением переноса масштаба турбулентности

(действительно, в работе [26] было показано, что модель Прандтля—Колмогорова без уравнения переноса масштаба турбулентности для случая пограничного слоя на стенке лишь незначительно точнее моделей, использующих концепцию длины смешения) и различаются только видом этого уравнения. В расчетах плоского пограничного слоя, выполненных Нг и Сполдингом, в качестве зависимой переменной во вспомогательном уравнении было выбрано произведение el_k . В других широко используемых моделях в качестве неизвестной функции во вспомогательном уравнении переноса используется величина

$$\epsilon = e^{3/2} l_k^{-1}.$$

Вообще говоря, в уравнении переноса масштаба турбулентности можно использовать зависимую переменную следующего вида:

$$e^a l_k^b,$$

и, чтобы получить изменение в пространстве величины

$$z = e^a l_k^b$$

для любых a и b , можно использовать одно и то же уравнение переноса [60]. Однако, по крайней мере в случае некоторых течений, более предпочтительно включить в модель уравнение переноса для скорости диссипации ϵ , так как после моделирования в нем может содержаться меньшее количество членов [60].

В модели Нг и Сполдинга для определения турбулентной вязкости необходимо решить уравнение переноса турбулентной кинетической энергии в форме, предложенной Колмогоровым [20] для несжимаемых течений,

$$U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{1/2} l_k \frac{\partial e}{\partial y} \right) + e^{1/2} l_k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_D e^{3/2}}{l_k}. \quad (8.35)$$

Здесь σ_e — турбулентное число Прандтля, а величины σ_e и C_D для полностью развитого турбулентного течения считаются постоянными. Кроме того, масштаб турбулентности определяется из уравнения переноса следующего вида:

$$U \frac{\partial el_k}{\partial x} + V \frac{\partial el_k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{3/2} l_k}{\sigma_1} \frac{\partial l_k}{\partial y} \right) + \frac{e^{1/2} l_k^2}{\sigma_2} \frac{\partial e}{\partial y} + C_p e^{1/2} l_k^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C'_M e^{3/2}. \quad (8.36)$$

В уравнении (8.36), которое аналогично уравнению, полученному

Ротта [22] из уравнений Навье — Стокса и описывающему пространственное изменение масштаба турбулентности, величины σ_1 , σ_2 , C_p и C_M' считаются универсальными постоянными или функциями, зависящими от локальных характеристик течения. Оказалось, что для того чтобы результаты расчетов течений в пограничном слое на стенке были удовлетворительными, необходимо предположить, что C_M' изменяется в соответствии с соотношением

$$C_M' = C_M + C_W (l_k/y)^q, \quad (8.37)$$

где C_M , C_W и q — постоянные. Соотношение (8.37) не имеет под собой теоретического обоснования, однако с учетом того, что рассматривается лишь модель турбулентности, эвристическое введение соотношения (8.37) не является серьезным препятствием для использования этого метода.

Постоянные, входящие в уравнения (8.35) — (8.37), определяются из сопоставления результатов расчетов турбулентных течений с экспериментальными данными. Некоторые постоянные можно найти путем обращения к простым видам турбулентных течений, для которых имеются аналитические решения, тогда как для оптимального выбора остальных постоянных необходимо численно решать контрольные задачи. Сопоставление результатов расчетов с данными четырех контрольных экспериментов позволило Нг и Сполдингу получить эти постоянные. В табл. 8.4 приведено сравнение полученных постоянных с результатами Роди и Сполдинга [25], которые применяли аналогичную модель для расчетов свободных слоев смешения. При моделировании течений со свободными границами постоянные C_W и q не используются.

Таблица 8.4

Сопоставление значений постоянных в моделях течений в пограничном слое [19] и слое смешения со свободными границами [25]

Модель	C_D	C_p	C_M	C_W	σ_e	σ_1	σ_2	q
Нг и Сполдинг [19]	0,1	0,84	0,055	22	2	1,2	2	4
Роди и Сполдинг [25]	0,09	1	0,057	—	1	0,3	—0,43	—

Нг и Сполдингом [19] были опубликованы результаты расчетов многих различных течений, включая пограничный слой на плоской пластине, полностью развитое течение в трубе, течение в плоском канале и плоскую пристеночную струю. Результаты этих расчетов можно считать удовлетворительными, хотя в случае плоской пристеночной струи и имеются некоторые расхождения с эксперимен-

тальными данными. Как свидетельствуют эксперименты, в этом течении точка на профиле скорости, в которой $\tau = -\rho u v = 0$, не совпадает с точкой, где $\partial U / \partial y = 0$, а с помощью моделей переноса турбулентной вязкости типа модели Прандтля—Колмогорова нельзя описать такие явления. Прямого сопоставления с экспериментальными данными, рекомендованными Стенфордской конференцией 1968 года [41], Нг и Сполдинг не делают, поэтому сравнение их модели с другими моделями для расчета турбулентных пограничных слоев не представляется возможным.

В табл. 8.4 представлены значения постоянных, полученные Роди и Сполдингом [25] для расчетов свободных слоев смешения с помощью модели Прандтля — Колмогорова и уравнений (8.24) и (8.36). Имеются большие расхождения в значениях постоянных, входящих в диффузионные члены этих уравнений, т. е. σ_e , σ_1 и σ_2 . Эта проблема, которая была проиллюстрирована на примере двух методов, обсуждавшихся в настоящем разделе, является основной для моделей с использованием уравнений для e и el_k . Хотя рассчитать с достаточной точностью течения как в пограничном слое на стенке, так и в свободном слое смешения возможно, значения постоянных при этом должны довольно сильно меняться. Вышеуказанные недостатки привели к попыткам разработки более общих моделей на основе использования скорости диссипации ϵ в качестве зависимой переменной. Рассмотрим теперь такой подход к получению уравнения для масштаба турбулентности.

8.3.5. Модели Прандтля — Колмогорова второго типа: Лаундер и др. [26]

Другим наиболее часто применяемым вариантом модели Прандтля — Колмогорова является модель, в которой в качестве зависимой переменной в дополнительном уравнении переноса используется скорость диссипации турбулентной кинетической энергии $\epsilon = e^{3/2} l_k^{-1}$. Два варианта этой модели описаны в работе Лаундера и др. [26] применительно к сдвиговым течениям со свободными границами; кроме того, модель на той же основе использовалась для расчетов течения в пограничном слое на стенке при небольших числах Рейнольдса [23, 61]. В случае плоского или осесимметричного пограничного слоя сжимаемого газа уравнения, описывающие распределение величины v_T при больших числах Рейнольдса, имеют вид

$$\rho U \frac{\partial e}{\partial x} + \rho V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho v_T y^2}{\sigma_k} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \rho v_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \rho \epsilon, \quad (8.38)$$

$$\rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \nu_T y^\alpha}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} \rho \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{e}, \quad (8.39)$$

где $\alpha = 0$ для плоского течения и $\alpha = 1$ для осесимметричного а σ_k , σ_ε , $C_{\varepsilon 1}$ и $C_{\varepsilon 2}$ — постоянные. Турбулентная вязкость определяется соотношением

$$\nu_T = C_\mu e^2/\varepsilon, \quad (8.40)$$

в котором C_μ — дополнительная постоянная. Так же как для вариантов [28, 31] модели Невзглядова—Драйдена, по модели, разработанной Лаундером и др. [26], было выполнено большое число расчетов течений, рекомендованных в качестве контрольных конференцией в Исследовательском центре NASA им. Лэнгли 1972 года [57], в результате чего были построены два варианта модели « $k\varepsilon$ », которые различаются выбором постоянных и диапазоном их применимости.

В варианте модели « $k\varepsilon 1$ » в качестве значений постоянных в уравнениях (8.38) — (8.40) выбраны следующие:

C_μ	$C_{\varepsilon 2}$	$C_{\varepsilon 1}$	σ_k	σ_ε
0,09	1,92	1,43	1,0	1,13

Было показано, что такой выбор постоянных обеспечивает удовлетворительные результаты расчетов различных турбулентных течений, однако расчетные результаты для осесимметричных струй и в меньшей степени для струй в спутном потоке плохо согласовались с экспериментальными данными. Для повышения точности модели применительно к осесимметричным струям в работе Лаундера и др. [25] (аналогично тому, как это было сделано Роди [24]) введены следующие изменения:

$$C_\mu = 0,09 - 0,04 f, \quad (8.41)$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1,92 - 0,0667 f, \quad (8.42)$$

$$f = \left| \frac{Y_g}{2\Delta U} \left(\frac{dU_{c1}}{dx} - \left| \frac{dU_{c1}}{dx} \right| \right) \right|. \quad (8.43)$$

В уравнении (8.43) Y_g представляет собой толщину слоя смешения, а через ΔU обозначена величина характерного изменения скорости поперек этого слоя. В табл. 8.5 приводятся выражения для Y_g . Величина U_{c1} обозначает среднюю скорость потока на осевой линии, и поэтому в первом режиме струйного течения (рис. 8.5) $f \equiv 0$, поскольку $U_{c1} = \text{const}$.

В результате такого усовершенствования модель « $k\varepsilon 1$ » обеспечивала

Таблица 8.5

Определение Y_g , используемое в работе Лаундера и др. [26]

1. В случае монотонно возрастающего или убывающего профиля скорости

$$Y_g = y_2 - y_1,$$

где y_1 — точка, в которой $(U - U_I)/(U_E - U_I) = 0,1$, а y_2 — точка, в которой $(U - U_I)/(U_E - U_I) = 0,9$. Здесь U_E — скорость вдоль оси симметрии на внешней границе, а U_I — аналогичная скорость на внутренней границе.

2. В случае профиля скорости, не имеющего ни максимума, ни минимума на одной из границ,

$$Y_g = y_2 - y_1,$$

где в точке y_1 имеет место $(U - U_I)/(U_E - U_I) = 0,1$ для области между точками минимума и максимума скорости [или $(U - U_{\text{макс}})/(U_E - U_{\text{макс}})$ для внешней области течения], а в точке $y = y_2$ имеет место $U = U_{\text{макс}}$.

достаточно хорошие результаты расчета как плоских, так и осесимметричных течений. Однако вскоре выявилась новая трудность. В случае слабых сдвиговых течений, т. е. когда местная скорость мало отличается от скорости внешнего потока, попытки рассчитать с помощью модели « $k\varepsilon 1$ » соответствующее асимптотическое затухание разности скоростей оказались неудачными. Эта трудность свойственна не только модели « $k\varepsilon 1$ »; аналогичные затруднения встретились при расчете таких течений с помощью как модели Харша [28, 29], так и модели Петерса и Фареса [31].

Для повышения точности расчета слабых сдвиговых течений Роди [24] предложил считать величину C_μ функцией некоторого удобного параметра, характеризующего турбулентное течение. В качестве такого параметра удобно выбрать отношение G/ε генерации турбулентной энергии (за счет деформации профиля средней скорости) к диссипации этой энергии в тепло; кроме того, величину G/ε можно рассматривать как меру отклонения течения от локального равновесия, в условиях которого имеет место $G/\varepsilon = 1$. В работе Роди [24] в качестве аргумента функции C_μ была выбрана величина G/ε , но вместо того, чтобы связывать C_μ непосредственно с локальным значением G/ε , он предложил использовать некоторое единственное для данной осевой координаты значение, т. е. $C_\mu = 0,09g(\overline{G/\varepsilon})$, где

$$\overline{G/\varepsilon} = \int_{Y_I}^{Y_E} \tau \frac{G}{\varepsilon} y^\alpha dy / \int_{Y_I}^{Y_E} \tau y^\alpha dy, \quad (8.44)$$

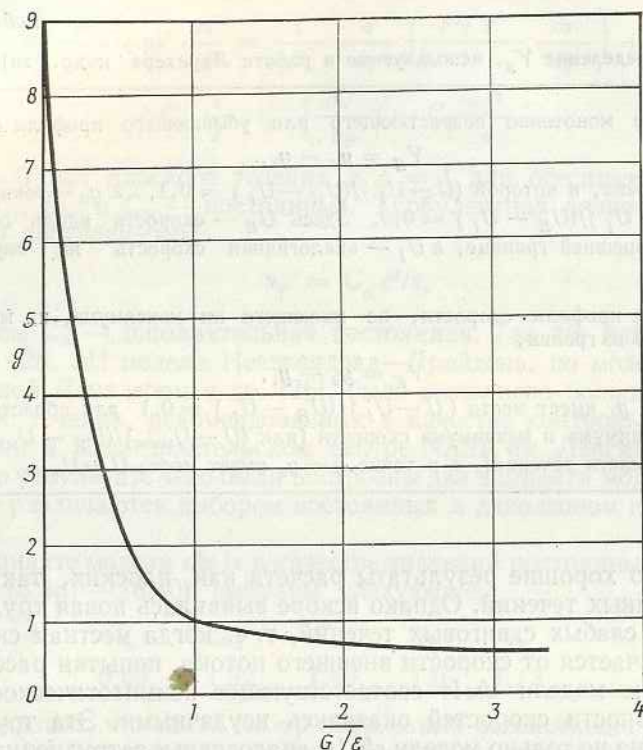


Рис. 8.13. Изменение функции g в зависимости от $\overline{G}/\varepsilon$ в модели « $k\varepsilon 2$ ».

а Y_I и Y_E — внутренняя и внешняя граница области вязкого течения соответственно. Для того чтобы области с большими напряжениями трения оказывали преобладающее влияние на значение $\overline{G}/\varepsilon$, используется весовая функция, пропорциональная этим напряжениям. Представленный на рис. 8.13 график функции $g(\overline{G}/\varepsilon)$ взят из работы [26].

Разработанная Лаундером и др. [26] модель в комбинации с выражением (8.44) была названа моделью « $k\varepsilon 2$ ». Для нее в случае плоского течения Лаундером были выбраны следующие значения постоянных:

C_μ	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε
$0,09g(\overline{G}/\varepsilon)$	1,40	1,94	1,0	1,0

В случае осесимметричных течений значения постоянных модифицируются следующим образом:

$$C_\mu = 0,09g(\overline{G}/\varepsilon) - 0,0543f, \quad (8.45)$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1,94 - 0,1336f, \quad (8.46)$$

где f определяется выражением (8.43).

Как показано в работе [26], применение модели « $k\varepsilon 2$ » приводит к значительному улучшению результатов расчета слабых сдвиговых течений, хотя трудности расчета течений с большими градиентами плотности все еще остаются. Необходимо отметить, что при разработке моделей Харша [28], а также Петерса и Фареса [31] особое внимание обращалось на моделирование течений с большими градиентами плотности, что достигалось при помощи определенной в табл. 8.3 функции R_T . В модели Лаундера [26] такие специальные приемы не использовались, и неудачное применение этой модели для расчета рассматривавшихся в работе [57] течений с большими градиентами плотности показывает, что по крайней мере при моделировании на уровне уравнения турбулентной кинетической энергии влияние градиентов плотности нельзя учесть без дополнительных эмпирических предположений. В следующем разделе результаты расчетов с помощью моделей « $k\varepsilon 1$ » и « $k\varepsilon 2$ » будут сопоставлены с данными для типовых течений, рекомендованных конференцией 1972 года [57], а также с результатами расчетов по другим моделям.

Джонс и Лаундер применили модель « $k\varepsilon$ » для расчета течений в пограничном слое при небольших числах Рейнольдса [23] и для исследования явления «ламинаризации» [61]. Чтобы исследовать область течения в непосредственной близости от стенки, снова потребовалось видоизменить исходную модель. Эта область пограничного слоя часто описывается путем сращивания получаемого в расчетах профиля скорости на некотором расстоянии от стенки с эмпирическим законом стенки [62]; такая процедура расчета была обобщена на случай сжимаемых течений и течений с большими градиентами температуры. Однако в некоторых случаях необходимо вести расчет вплоть до стенки либо вследствие недостатка экспериментальных данных, либо если известно, что в рассматриваемой задаче закон стенки не выполняется с достаточной точностью. Вблизи стенки местное число Рейнольдса мало, и, следовательно, применение эмпирических зависимостей, основанных на экспериментальных данных для течений с большими числами Рейнольдса, становится неоправданным.

Для того чтобы обобщить модель « $k\varepsilon$ » на случай течений с небольшими числами Рейнольдса, Джонс и Лаундер [23, 61] ввели некоторые модификации. Так как при приближении к стенке масштаб турбулентности уменьшается, в уравнения необходимо включить описывающие молекулярный перенос члены, которые не учитывались при больших числах Рейнольдса. Необходимо также видоизменить и модели турбулентности: некоторые постоянные теперь

заменяются функциями, зависящими от местного числа Рейнольдса, определяемого как $\rho \nu_T / \mu$ или $\rho e^2 / \mu \epsilon$; кроме того, в уравнения для e и ϵ вводятся дополнительные члены, которые пренебрежимо малы при больших числах Рейнольдса.

Для течений с небольшими числами Рейнольдса Джонс и Лаундер [23, 61] предложили следующие выражения:

$$C_\mu = 0,09 \exp[-2,5/(1 + R_T/50)], \quad (8.47)$$

$$C_{\epsilon 2} = 2,0 [1,0 - 0,3 \exp(-R_T^2)]. \quad (8.48)$$

Значения всех других постоянных в модели « $k\epsilon 1$ » остаются неизменными. В непосредственной близости от стенки скорость диссипации турбулентной кинетической энергии определяется зависимостью

$$\epsilon = 2\mu \left(\frac{\partial e^{1/2}}{\partial y} \right)^2, \quad (8.49)$$

а на стенке считается равной 0. В уравнение для скорости диссипации вводится дополнительный член

$$- 2\mu \nu_T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2$$

с целью уточнения изменения ϵ в этой области. Выражение (8.49) вводится в основном с целью упрощения граничных условий для скорости диссипации турбулентной кинетической энергии, так как в случае однородных граничных условий на стенке решение уравнения для ϵ значительно упрощается. Введение указанного выше члена позволяет использовать однородное граничное условие для уравнения переноса скорости диссипации кинетической энергии и учесть тот факт, что $\epsilon \neq 0$ на стенке в уравнении турбулентной кинетической энергии.

При этих предположениях уравнения турбулентной кинетической энергии и скорости ее диссипации приобретают вид

$$\begin{aligned} \rho U \frac{\partial e}{\partial x} + \rho V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho(\nu + \nu_T) \frac{\partial e}{\partial y} \right] + \rho \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \\ - \rho \epsilon - 2\rho \nu \left[\frac{\partial (e^{1/2})}{\partial y} \right]^2, \end{aligned} \quad (8.50)$$

$$\begin{aligned} \rho U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho(\nu + \nu_T) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] + \\ + \frac{C_{\epsilon 1} \rho \nu_T \epsilon}{e} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) - C_{\epsilon 2} \frac{\rho \epsilon^2}{e} - 2\rho \nu \nu_T \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (8.51)$$

На основании этой модели был выполнен расчет ряда течений с небольшими числами Рейнольдса и получены удовлетворительные

результаты. При выполнении расчетов профиль средней скорости срачивался в окрестности стенки с ламинарным решением, а не с законом стенки для турбулентного течения. Подробное сопоставление результатов теории с экспериментальными данными проведено в работах [23, 61, 63].

8.3.6. Модели трех уравнений переноса: Ханжалик и Лаундер [37]

Одна из моделей, описанных в работе Лаундера и др. [26], основана на уравнении кинетической энергии и представляет собой модель замыкания более высокого порядка. В этой модели, описанной также в работе Ханжалика и Лаундера [37] и называемой в работе [26] моделью « $uvk\epsilon$ », необходимо совместно решать уравнения переноса турбулентной кинетической энергии, скорости ее диссипации и турбулентного напряжения трения. В явном виде связь между τ и e в этой модели устранена, однако идеи Прандтля—Колмогорова [21, 22] используются неявно при моделировании неизвестных членов уравнений переноса. Для получения напряжения трения в модели « $uvk\epsilon$ » необходимо решить следующую систему уравнений:

1) уравнение переноса напряжения Рейнольдса τ/ρ

$$U \frac{\partial \bar{uv}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{uv}}{\partial y} = C_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \bar{uv}}{\partial y} \right) - C_{\epsilon 1} \left(\frac{\bar{uv}\epsilon}{e} + C_\mu e \frac{\partial U}{\partial y} \right); \quad (8.52)$$

2) уравнение переноса турбулентной кинетической энергии e

$$U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = 0,9 C_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial e}{\partial y} \right) - \bar{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \epsilon; \quad (8.53)$$

3) уравнение переноса скорости диссипации кинетической энергии ϵ

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = C_\epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) - C_{\epsilon 1} \frac{\bar{uv}\epsilon}{e} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{e}. \quad (8.54)$$

Эти уравнения записаны для плоского течения несжимаемой жидкости; кроме того, в них неявно предполагается равенство единице «чисел Прандтля» для $\bar{uv}$, e и ϵ . Для модели « $uvk\epsilon$ » Лаундером и др. [26] предложены следующие значения постоянных:

C_s	$C_{\epsilon 1}$	C_μ	C_ϵ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$
0,1	2,8	0,09	0,09	1,40	1,95

8.3.7. Сопоставление результатов расчета по различным моделям турбулентных течений в свободных слоях смешения с экспериментальными данными

На конференции Исследовательского центра NASA им. Лэнгли 1972 года по сдвиговым течениям со свободными границами [57] для проверки различных моделей турбулентных течений был рекомендован ряд достаточно достоверных экспериментальных данных. В настоящем разделе представлены сводка обсуждавшихся на конференции результатов моделирования турбулентных течений с помощью уравнения кинетической энергии и сравнение этих результатов с экспериментальными данными. Правильно описать изменение скорости расширения плоских слоев смешения в зависимости от числа Маха оказалось возможным только с помощью одной модели (Петерса и Фареса [31]), а результаты расчета изменения этой скорости в слоях смешения несжимаемой жидкости как функции отношения скоростей были удовлетворительными во всех моделях. Изменение скорости расширения слоя смешения между потоками различных газов в зависимости от отношения их плотностей плохо исследовано как теоретически, так и экспериментально. Поэтому обсуждаемые в данном разделе результаты будут в основном касаться течений в плоских и осесимметричных следах и струях.

В табл. 8.6 приведены основные характеристики обсуждавшихся на конференции в центре им. Лэнгли [57] моделей турбулентности которые применялись для расчета сдвиговых течений со свободными границами. Постоянные, использованные в этих расчетах, представлены в табл. 8.7. Для того чтобы облегчить ознакомление с подробностями выбора постоянных и пределами применимости описываемых моделей, ссылки в таблицах сделаны на первоисточники.

Одним из наиболее простых для расчета течений, рассматривавшихся на конференции в центре им. Лэнгли, является течение в дозвуковой осесимметричной струе. Однако, как показано на рис. 8.14, даже в этом простейшем случае результаты расчетов с помощью трех различных моделей, основанных на уравнении турбулентной кинетической энергии, существенно различаются. Наиболее точными являются результаты расчета по модели с одним уравнением, описанной Харша [28], тогда как применение предложенных Лаундером уравнений [26] приводит в случае модели « $k\epsilon 2$ » к несколько заниженным, а в случае модели « k » немного завышенным значениям скорости в области затухания. Здесь и при последующем обсуждении необходимо отметить, что как в модели Харша [26], так и в модели Петерса и Фареса [31] (результаты расчета рассматриваемого течения с помощью обеих моделей прак-

Таблица 8.6

Модели переноса турбулентной кинетической энергии

Модель	Выражения для членов уравнения				Модель касательного напряжения
	Конвекция	Диффузия	Генерация	Диссипация	
Харша [29] Лаундер и др. [26] k	$\rho \frac{De}{Dt}$	$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \gamma T y^2 \frac{\partial e}{\partial y} \right)$	$\rho \gamma T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$	$-a_2 \frac{\rho e^{3/2}}{l_k}$	НД
$k\epsilon 1$	$\rho \frac{De}{Dt}$	$\frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \gamma T y^2 \frac{\partial e}{\partial y} \right)$	$\rho \gamma T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$	$-\rho \frac{e^{3/2}}{l_k}$	ПК
$k\epsilon 2$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{De}{Dt} \\ \rho \frac{D\epsilon}{Dt} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \gamma T y^2 \frac{\partial e}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{y^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \gamma T y^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \rho \gamma T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \\ C_{\epsilon 1} \frac{\rho}{\epsilon} \rho \gamma T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} -\rho \frac{e^{3/2}}{l_k} \\ -C_{\epsilon 2} \frac{\rho e^2}{\epsilon} \end{array} \right\}$	ПК
$\overline{uv} k\epsilon$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{То же, что и для } k\epsilon 1 \\ \left(\frac{De}{Dt} \right) \\ \left(\frac{Duv}{Dt} \right) \\ \left(\frac{D\epsilon}{Dt} \right) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{То же, что и для } k\epsilon 1 \\ 0,9 C_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial e}{\partial y} \right) \\ C_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial uv}{\partial y} \right) \\ C_\epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\tau}{\rho} \left \frac{\sigma_{\max}}{\rho} \right ^{1/2} \right) \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{То же, что и для } k\epsilon 1 \\ -uv \frac{\partial U}{\partial y} \\ -C_{\phi 1} C_\phi \frac{\partial U}{\partial y} \\ -C_{\epsilon 1} \frac{uv\epsilon}{\epsilon} \frac{\partial U}{\partial y} \\ 2a_1 \frac{\tau \partial U}{\partial y} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{То же, что и для } k\epsilon 1 \\ -\epsilon \\ -C_{\phi 1} \frac{uv\epsilon}{\epsilon} \\ -C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{\epsilon} \\ \frac{(\tau/\rho)^{3/2}}{L} \end{array} \right\}$	То же, что и для $k\epsilon 1$ Отсутствует
Морел и Торда [15] Петерс и Фарес [31]	$\int \frac{De}{Dt} y^2 dy$	Отсутствует	$\int \tau \frac{\partial U}{\partial y} y^2 dy$	$-a_2 \int \frac{\rho e^{3/2}}{l_k} y^2 dy$	НД НД

Значения постоянных в моделях переноса турбулентной кинетической энергии

Модель	Значения постоянных				
	Зависимая переменная	Диффузия	Генерация	Диссипация	Масштаб турбулентности
Харша [29] Лаундер и др. [26]	e	$\sigma_k = 0,07$	—	Выражение (8.28)	Табл. 8.2
	k	$\sigma_k = 0,7$	—	—	Табл. 8.5 ¹
	k_{e1}	$\sigma_k = 1,0$ $\sigma_\epsilon = 1,3$	$C_{\epsilon 1} = 1,43$	$C_{\epsilon 2} = 1,92^2$	—
	k_{e2}	$\sigma_k = 1,0$ $\sigma_G = 1,3$	$C_{\epsilon 1} = 1,40$	$C_{\epsilon 2} = 1,94^3$	—
$\overline{uvk_\epsilon}$	e	$C_s = 0,09$	—	—	—
	$\frac{e}{uv}$	$C_s = 0,10$	$C_\mu C_{\epsilon 1} = 0,252$	$C_{\epsilon 1} = 2,5$	—
	ϵ	$C_\epsilon = 0,07$	$C_{\epsilon 1} = 1,40$	$C_{\epsilon 2} = 1,95$	—
	e	$g(y/\delta)$	—	—	См. работу [14]
Морел и Торда [14] Петерс и Фарес [31]	e	—	—	Выражение (8.28)	Табл. 8.2 ⁴
					Выражение (8.27)

¹ $I_k = 0,625 Y_g$ (осесимметричные течения), $I_k = 0,875 Y_g$ (плоские течения), значения Y_g приведены в табл. 8.5.

² Для плоских течений; выражение (8.42) для осесимметричных течений.

³ Для плоских течений; выражение (8.46) для осесимметричных течений.

⁴ Только для полностью развитых турбулентных течений.

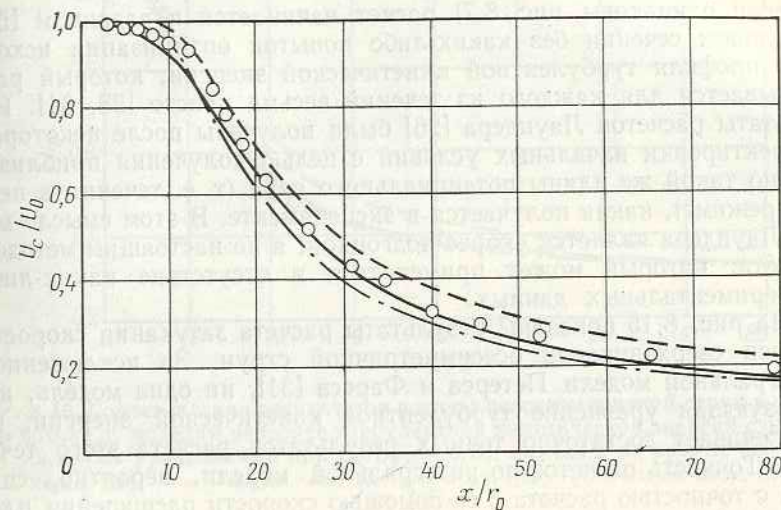


Рис. 8.14. Сопоставление результатов расчета осесимметричной струи по моделям переноса турбулентной кинетической энергии с одним и двумя уравнениями при $M_0 = 0,64$, случай 6 из работы [53].
— Харша [28]; --- модель «k», Лаундер и др. [26]; —·— модель «kε2», Лаундер и др. [26].

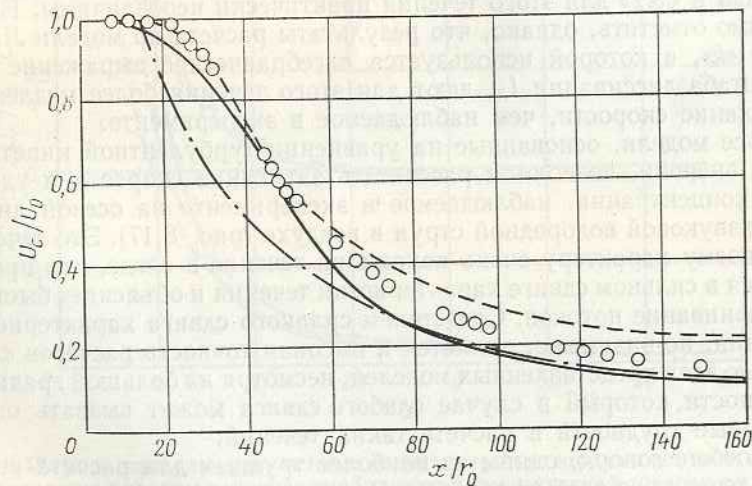


Рис. 8.15. Сопоставление результатов расчета осесимметричной струи по моделям переноса турбулентной кинетической энергии с одним и двумя уравнениями при $M_0 = 2,2$, случай 7 из работы [53].
— Харша [28]; --- модель «k», Лаундер и др. [26]; —·— модель «kε2», Лаундер и др. [26].

тически одинаковы, рис. 8.7) расчет начинается в заданном [57] начальном сечении без каких-либо попыток оптимизации исходного профиля турбулентной кинетической энергии, который рассчитывается для каждого из течений весьма просто [28, 31]. Результаты расчетов Лаундера [26] были получены после некоторой корректировки начальных условий с целью получения приблизительно такой же длины потенциального ядра (т. е. течения в первом режиме), какая получается в эксперименте. В этом смысле метод Лаундера является скорее подгонкой, а не настоящим методом расчета, который может применяться в отсутствие каких-либо экспериментальных данных.

На рис. 8.15 показаны результаты расчета затухания скорости на оси сверхзвуковой осесимметричной струи. За исключением интегральной модели Петерса и Фареса [31], ни одна модель, использующая уравнение турбулентной кинетической энергии, не обеспечивает достаточно точных результатов расчета этого течения. Точность расчетов по интегральной модели, вероятно, связана с точностью расчета с ее помощью скорости расширения плоского сверхзвукового слоя смещения, поскольку в обоих случаях можно ожидать одинакового влияния сжимаемости.

Обе описанные Харша простые модели [28], а также модель двух уравнений « $k\epsilon 2$ » Лаундера [26] обеспечивают достаточно точность расчета несжимаемой осесимметричной струи в спутном потоке (рис. 8.16). Действительно, результаты расчета с помощью моделей Харша и « $k\epsilon 2$ » для этого течения практически неразличимы. Необходимо отметить, однако, что результаты расчета по модели Лаундера « k », в которой используется алгебраическое выражение для масштаба диссипации l_k , дают для этого течения более медленное затухание скорости, чем наблюдаемое в эксперименте.

Все модели, основанные на уравнении турбулентной кинетической энергии, позволили рассчитать затухание скорости и удельной концентрации, наблюдаемое в эксперименте на осевой линии сверхзвуковой водородной струи в воздухе (рис. 8.17). Это течение по своему характеру очень похоже на течение в следе, что проявляется в сильном сдвиге характеристик течения и объясняет быстрое выравнивание потоков. Следствием сильного сдвига характеристик течения, по-видимому, является и высокая точность расчетов с помощью всех представленных моделей, несмотря на большой градиент плотности, который в случае слабого сдвига может вызвать определенные трудности в расчете таких течений.

Вообще говоря, одним из наиболее трудных для расчета является течение со слабым сдвигом. Представленное на рис. 8.18 сравнение результатов расчета осесимметричного следа в несжимаемой жидкости по моделям с одним или с двумя уравнениями показывает, что в этом течении со слабым сдвигом только модель Лаундера « $k\epsilon 2$ », которая была специально разработана для расчета таких те-

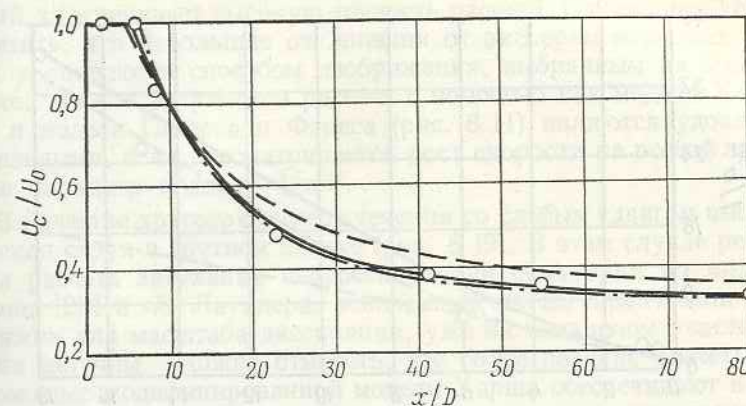


Рис. 8.16. Сопоставление результатов расчета осесимметричной струи в спутном потоке по моделям переноса турбулентной кинетической энергии с одним и двумя уравнениями при $U_c/U_0 = 0,25$, случай 9 из работы [53]. — Харша [28]; --- модель « k », Лаундер и др. [26]; —·— модель « $k\epsilon 2$ », Лаундер и др. [26].

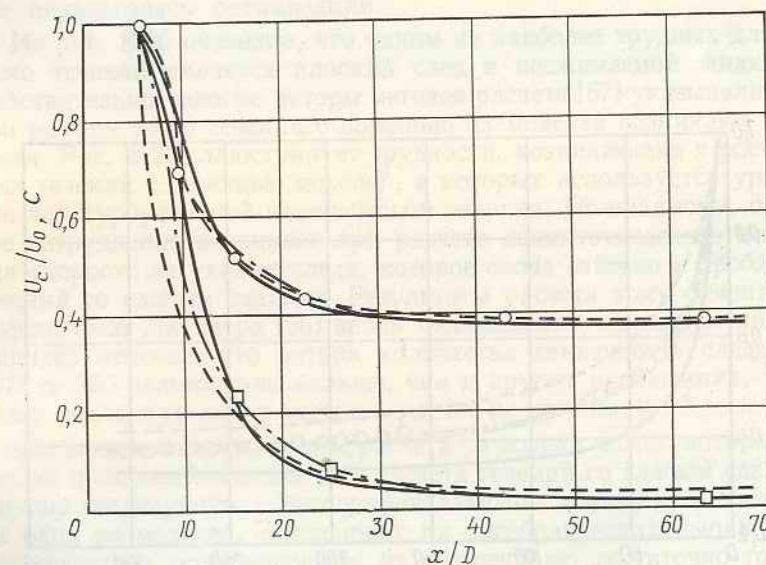


Рис. 8.17. Сопоставление результатов расчета струи водорода в спутном потоке воздуха по моделям переноса турбулентной кинетической энергии с одним и двумя уравнениями при $M_e = 1,33$, случай 12 из работы [53]. Эксперимент: $\circ U_c/U_0$; $\square C$. Теория: — Харша [28], $Pr_T = Sc_T = 0,85$; --- модель « k », Лаундер и др. [26], $Pr_T = Sc_T = 0,7$; —·— модель « $k\epsilon 2$ », Лаундер и др. [26], $Pr_T = Sc_T = 0,7$.

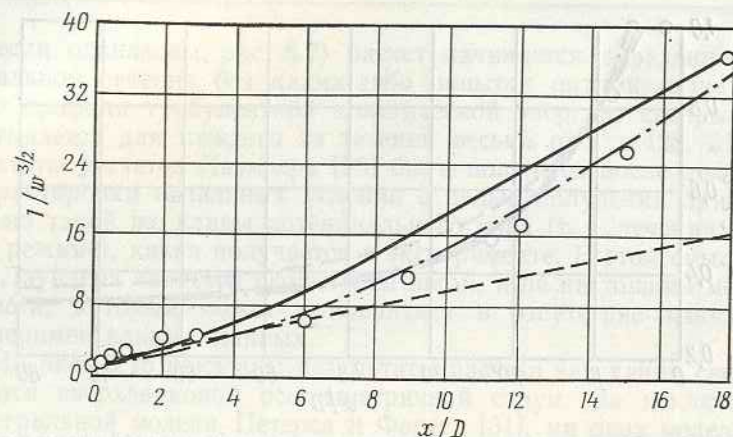


Рис. 8.18. Сопоставление результатов расчета несжимаемого осесимметричного следа по моделям переноса турбулентной кинетической энергии с одним и двумя уравнениями, случай 15 из работы [53].
— Харша [28]; --- модель « $k\varepsilon$ », Лаундер и др. [26]; —·— модель « $k\varepsilon_2$ », Лаундер и др. [26].

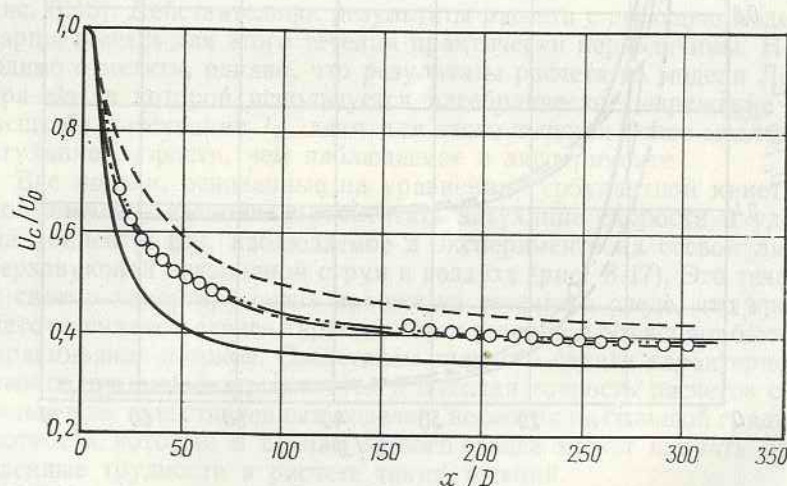


Рис. 8.19. Сопоставление результатов расчета плоской струи в спутном потоке по моделям переноса турбулентной кинетической энергии при $U_0/U_e = 3,29$, случай 13 из работы [53].
— Харш^а [28]; --- модель « $k\varepsilon$ », Лаундер и др. [26]; —·— модель « $k\varepsilon_2$ », Лаундер и др. [26]; —·— Морел и др. [14].

чений, обеспечивает высокую точность расчета. Однако необходимо отметить, что небольшие отклонения от экспериментальных данных усиливаются способом изображения, выбранным на этом рисунке, так что результаты расчета с помощью как модели Харша, так и модели Петерса и Фареса (рис. 8.11) являются удовлетворительными, если рассматривается рост скорости на осевой линии, а не параметр подобия $1/w^{3/2}$.

В качестве другого примера течения со слабым сдвигом выбрана плоская струя в спутном потоке (рис. 8.19). В этом случае результаты расчета затухания скорости на оси симметрии по моделям Харша [28] и « $k\varepsilon$ » Лаундера, основанным на алгебраическом соотношении для масштаба диссипации, уже на начальном участке течения неточны. (Можно отметить, что более поздние расчеты [29] с помощью модифицированной модели Харша обеспечивают в этом случае более хорошее согласие с экспериментальными данными, что достигается изменением модели диссипативных членов. В работе [29] эта усовершенствованная модель подробно описана.) Как видно на рис. 8.19, модель « $k\varepsilon_2$ » обеспечивает превосходное согласие с экспериментальными данными, как и модель взаимодействия двух слоев Морела и др. [14]. Модель Морела, однако, в этом случае подвергалась оптимизации.

Из рис. 8.20 очевидно, что одним из наиболее трудных для расчета течений является плоский след в несжимаемой жидкости. Действительно, многие авторы методов расчета [57] указывали, что при расчете этого течения с помощью их моделей возникают трудности. Рис. 8.20 иллюстрирует трудности, возникающие в расчетах этих течений с помощью моделей, в которых используется уравнение для турбулентной кинетической энергии. По-видимому, основное затруднение возникает при расчете асимптотического поведения скорости затухания следа, которое снова связано с проблемой течений со слабым сдвигом. Результаты расчета этого течения по модели « $k\varepsilon_2$ » Лаундера [26] вновь оказываются самыми лучшими. Лаундер отмечал, что потеря количества движения в следе при $X/D \approx 260$ значительно больше, чем в других положениях, и поэтому указанную точку можно в расчет не принимать. Кроме того, можно видеть, что результаты расчета по модели « $uvk\varepsilon$ », которая никак не приспособлялась для расчета течений со слабым сдвигом, хорошо согласуются с экспериментальными данными. И наконец, ни одна из моделей, основанных на алгебраических выражениях для масштаба турбулентности, не обеспечивает достаточно точных расчетов этого течения.

Интересно отметить, что в случае плоского следа в сжимаемом газе дело не обстоит так плохо (рис. 8.21). Модели Морела [14] и Харша [28] с алгебраическими выражениями для масштаба длины позволяют достаточно хорошо рассчитать это течение. Единствен-

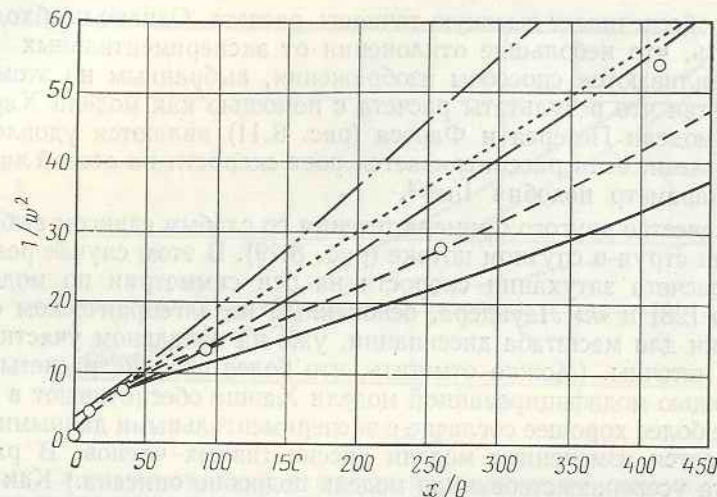


Рис. 8.20. Сопоставление результатов расчета плоского следа в несжимаемой жидкости по моделям переноса турбулентной кинетической энергии, случай 14 из работы [53].

— Харша [28], $a_2 = 1,4$; — — — модель « k », Лаундер и др. [26]; — — — модель « $k\varepsilon_2$ », Лаундер и др. [26]; — — — Морел и др. [14]; ... модель « $uvk\varepsilon$ », Лаундер и др. [26]; θ — толщина потери импульса в начальном сечении следа.

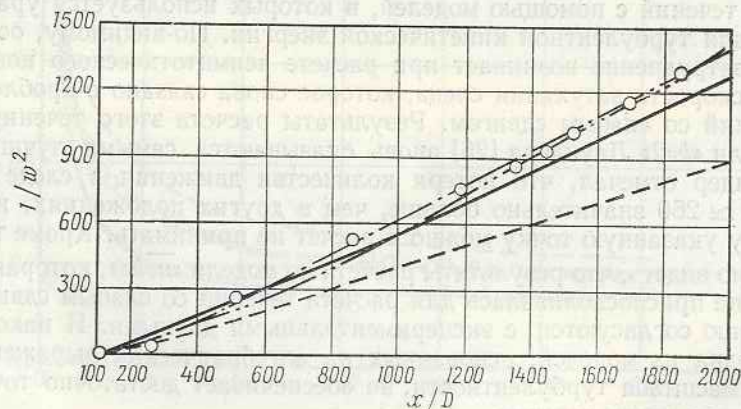


Рис. 8.21. Сопоставление результатов расчета плоского следа в сжимаемом газе по моделям переноса турбулентной кинетической энергии при $M = 2,99$, случай 16 из работы [53].

— Харша [28]; — — — модель « k », Лаундер и др. [26]; — — — модель « $k\varepsilon_2$ », Лаундер и др. [26]; — — — Морел и др. [14]. $D = C_{DL} = 0,0909$ мм.

ные неудовлетворительные результаты здесь получены по модели « k », для которой не предпринималось попыток обобщить значения постоянных.

8.4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ВЫВОДЫ

Число рассмотренных в данной главе теоретических моделей турбулентных течений ясно говорит о том, что для расчета явлений, происходящих в этих течениях, в настоящее время имеется довольно большое количество различных методов, основанных на уравнении турбулентной кинетической энергии. Совместное рассмотрение результатов Стенфордской конференции 1968 года [41] по турбулентным пограничным слоям и конференции Исследовательского центра NASA им. Лэнгли 1972 года по турбулентным слоям смешения со свободными границами показывает, что модели, основанные на уравнении турбулентной кинетической энергии, являются значительно более общими, чем классический подход с использованием локальных зависимостей для турбулентной вязкости. В настоящее время существует достаточное количество проверенных моделей, в которых используется уравнение для турбулентной кинетической энергии, так что вопрос, на который необходимо ответить перед началом исследования какой-либо проблемы, заключается в том, какую именно модель турбулентной энергии выбрать, а не в том, выбрать ли модель турбулентной энергии.

Обсуждавшиеся выше результаты ясно показывают, что выбор той или иной модели турбулентной энергии зависит от характера рассматриваемой задачи. Используя модели с одним уравнением Харша [28, 29], а также Петерса и Фареса [31], можно достаточно точно рассчитать любые течения типа пограничного слоя с сильным сдвигом, причем ко всем течениям применяется один и тот же формализм. С другой стороны, вариант модели Прандтля—Колмогорова с одним уравнением (модель « k » Лаундера) не является столь же универсальным, как простые модели Харша [28, 29] и Петерса и Фареса [31]. Этот факт, по-видимому, связан с использованием моделью для касательных напряжений. В модели Прандтля—Колмогорова масштаб турбулентности входит в выражение для касательных напряжений (и вследствие этого во все три члена в правой части уравнения турбулентной кинетической энергии), тогда как в модели Невзглядова—Драйдена масштаб длины явно входит только в член, характеризующий диссипацию турбулентной кинетической энергии. Поэтому можно ожидать, что методы, в которых для касательных напряжений используется модель Прандтля—Колмогорова, т. е. соотношение (8.13), окажутся более чувствительными к определению масштаба турбулентности, чем

методы, основанные на модели Невзглядова—Драйдена [выражение (8.11)].

Из моделей с двумя уравнениями можно считать наиболее хорошо разработанной модель « ke_2 » Лаундера с поправками, заключающимися в использовании отношения $\bar{G}/\epsilon$ [соотношение (8.44)] для расчета течений со слабым сдвигом. Эта модель особенно полезна при анализе течений, не относящихся к течениям типа пограничного слоя, для которых можно установить *заранее* распределение масштаба турбулентности. Однако с помощью данной модели пока нельзя правильно учесть влияние сжимаемости или больших отношений плотностей, и поэтому необходимо ее дальнейшее развитие.

Наконец, вследствие того что одно из основных достоинств интегральных методов, связанное со скоростью вычислений, сейчас не имеет большого значения, интегральными вариантами моделей переноса турбулентной кинетической энергии часто пренебрегают. Действительно, для быстрых конечно-разностных методов часто достаточно таких же затрат машинного времени, как и для интегральных методов. Однако интегральные методы обладают и другими преимуществами. Путем введения известных эмпирических данных в решение рассматриваемой задачи они позволяют сосредоточить внимание на неизвестной части решения. Например, введение эмпирических профилей турбулентной кинетической энергии в модель Петерса и Фареса [31] устраняет проблему аппроксимации диффузионных членов в уравнении турбулентной кинетической энергии и позволяет сосредоточить внимание на моделировании членов, характеризующих скорость диссипации этой энергии. Это в свою очередь позволяет распространить модель на случай течений с большими числами Маха и с большими значениями отношения плотностей. На конференции в центре им. Лэнгли [57] модель Петерса и Фареса оказалась единственной моделью, позволяющей определить влияние числа Маха на скорость роста толщины слоя смешения. В задачах, где часть данных известна с достаточной точностью (например, профиль скорости в окрестности стенки для пограничного слоя либо тригонометрическая или экспоненциальная форма профиля скорости в течениях со свободными границами), включение их в модель упрощает задачу и подготавливает основание для построения моделей неизвестных явлений.

От автора

Настоящая работа выполнена при поддержке д-ра Б. Т. Вольфона, представителя заказчика — Управления научных исследований ВВС США.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A, B, C	— постоянные (могут быть с индексами);
D	— член, характеризующий диссипацию;
$e = \langle u_k u_k \rangle / 2$	— кинетическая энергия турбулентности;
f	— функция, определенная в уравнении (8.43);
F	— скалярная функция, удовлетворяющая уравнению переноса;
g	— функция, определенная на рис. 8.13;
G	— член, характеризующий генерацию энергии;
L	— масштаб длины;
l_k	— масштаб турбулентности;
$n = v + v_T$	— пульсационная составляющая давления;
p'	— давление;
P	— радиальная координата;
r	— функция, определенная в табл. 8.3;
R_T	— время;
t	— член, характеризующий вязкие напряжения;
T_{ij}	— составляющие средней скорости;
U_i	— флуктуации составляющих скорости;
u_i	— скорость набегающего потока;
U_∞	— среднеквадратическая величина завихренности;
ω^*	— прямоугольные координаты;
x_i	— толщина вязкой области;
Y_g	— операция осреднения;
$\langle \rangle$	— постоянные (могут быть с индексами);
$\alpha, \beta, \gamma, \sigma$	— символ Кронекера;
δ_{ij}	— скорость диссипации кинетической энергии;
ϵ	— кинематический коэффициент вязкости;
ν	— коэффициент турбулентной вязкости;
ν_T	— кинетическая энергия движения, вызванного наличием ω^*
ϵ^*	— поток F вследствие диффузии;
Φ_{Fj}	— плотность;
ρ	— касательное напряжение;
τ	— толщина потери импульса в пограничном слое;
θ	— среднеквадратическая величина турбулентных пульсаций $u' = \sqrt{\langle u^2 \rangle}$;
$(\cdot)$	— среднее по времени или средняя величина напряжений Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown G., Roshko A., The effect of density difference on the turbulent mixing layer, в книге: *Turbulent Shear Flows*, North Atlantic Treaty Organization, Advisory Group for Aerospace Research and Development, report № CO-93, 1972.
2. Kovasznay L. S. G., Turbulent shear flow, presented at Convegno sulla Teoria della Turbolenza, Roma, Italia, April 26—29, 1970.
3. Liu J. T. C., Developing large scale wavelike eddies and the near jet noise field, *J. Fluid Mech.*, **62**, 437—464 (1974).
4. Mellor G. L., Herring H. J., A survey of the mean turbulent field closure models, *AIAA J.*, **11**, 590—599 (1973). [Имеется перевод: Меллор, Херринг, Обзор моделей для замыкания уравнений осредненного турбулентного течения. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1973, т. 11, № 5, с. 17—29.]
5. Prandtl L., Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *Z. Angew. Math. Mech.*, **5**, 136—139 (1925).
6. Prandtl L., Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz, *Z. Angew. Math. Mech.*, **22**, 241—243 (1942).
7. Schetz J., Turbulent mixing of a jet in a coflowing stream, *AIAA J.*, **6**, 2008—2010 (1968). [Имеется перевод: Шец, Турбулентное смешение струи со спутным потоком. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1968, т. 6, № 10, с. 237—239.]
8. Tufts L. W., Smoot L. D., A turbulent mixing coefficient correlation for coaxial jets with and without secondary flows, *J. Spacecraft Rockets*, **8**, 1183—1190 (1971).
9. Zelazny S. W., Morgenthaler J. H., Herendeen D. L., Shear stress and turbulence intensity models for coflowing axisymmetric streams, *AIAA J.*, **11**, 1165—1173 (1973). [Имеется перевод: Желязны, Моргенталер, Херендин, Модели для расчета напряжений трения и интенсивности турбулентных пульсаций для осесимметричных спутных струй. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1973, т. 11, № 8, 137—146.]
10. Nee V. W., Kovasznay L. S. G., Simple phenomenological theory of turbulent, shear flows, *Phys. Fluids*, **12**, 473—484 (1969).
11. Saffman P. G. A model for inhomogeneous turbulent flows, *Proc. R. Soc., London, Series A* **317**, 417—433 (1970).
12. Bradshaw P., Ferriss D. H., Atwell N. P., Calculation of boundary-layer development using the turbulent energy equation, *J. Fluid Mech.*, **28**, 593—616 (1967).
13. Saffman P. G., Wilcox D. C., Turbulence-model predictions for turbulent boundary layers, *AIAA J.*, **12**, 541—546 (1974). [Имеется перевод: Сэффмен, Уилкоккс, Модели турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1974, т. 12, № 4, с. 160—167.]
14. Morel T., Torda T. P., Bradshaw P., Turbulent kinetic energy equation and free mixing, в книге: *Free Turbulent Shear Flows*, Vol. 1, Conference Proceedings, NASA report № SP-321, 1973, p. 549—573.
15. Morel T., Torda T. P., Calculation of free turbulent mixing by the interaction approach, *AIAA J.*, **12**, 533—540 (1974). [Имеется перевод: Моурел, Торда, Расчет свободного турбулентного смешения методом взаимодействия. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1974, т. 12, № 4, с. 150—160.]
16. Глушко Г. С., Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости. — *Известия АН СССР, Механика и машиностроение*, 1965, № 4, с. 13—23.
17. Beckwith I. E., Bushnell D. M., Calculation of mean and fluctuating properties of the incompressible turbulent boundary layer, в книге: *Proceeding of the AFOSR-IFP-Stanford Conference*, Vol. 1 (S. J. Kline, M. V. Morkovin, G. Sovran, D. J. Cockrell, eds.), Stanford University, Stanford, California, 1969, p. 275—299.
18. Mellor G. L., Herring H. J., Two methods of calculating turbulent boundary layer behavior based on numerical solutions of the equations of motion, в книге: *Proceedings of the AFOSR-IFP-Stanford Conference*, Vol. 1 (S. J. Kline, M. V. Morkovin, G. Sovran, D. J. Cockrell, eds.), Stanford University, Stanford, California, 1969, p. 331—345.
19. Ng K. H., Spalding D. B., Turbulence model for boundary layers near walls, *Phys. Fluids*, **15**, 20—30 (1972).
20. Колмогоров А. Н., Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. — *Изв. АН СССР, сер. физ.*, (1942), **6**, № 1—2, 56—58.
21. Prandtl L., Wieghardt K., Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulence, *Nach. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, Kl. 6—19 (1945).
22. Rotta J. C., Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, *Z. Phys.*, **129**, 547—572 (1951) см. также: *ibid.* **131**, 51—77 (1951).
23. Jones W. P., Launder B. E., The calculation of low Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **16**, 1119—1130 (1973).
24. Rodi W., The prediction of free turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence, Ph. D. dissertation, University of London, 1972.
25. Rodi W., Spalding D. B., A two-parameter model of turbulence and its application to free jets, *Wärme-Stoffübertrag.*, **3**, 85—95 (1970).
26. Launder B. E., Morse A., Rodi W., Spalding D. B., Prediction of free shear flows — A comparison of the performance of six turbulence models, в книге: *Free Turbulent Shear Flows*, Vol. 1, Conference Proceedings, NASA Report № SP-321, 1973, p. 361—422.
27. Lee S. C., Harsha P. T., Use of turbulent kinetic energy in free mixing studies, *AIAA J.*, **8**, 1026—1032 (1970). [Имеется перевод: Ли, Гарша, Использование турбулентной кинетической энергии в исследованиях свободного смешения. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1970, т. 8, № 6, с. 45—53.]
28. Harsha P. T., Prediction of free turbulent mixing using a turbulent kinetic energy method, в книге: *Free Turbulent Shear Flows*, Vol. 1, Conference Proceedings, NASA report № SP-321, p. 463—519.
29. Harsha P. T., A general analysis of free turbulent mixing, AEDC report № TR-73-177, 1974.
30. Patel V. C., Head M. R., A simplified version of Bradshaw's method for calculating two-dimensional turbulent boundary layers, *Aeronaut. Quart.*, **21**, 243—262 (1970).
31. Peters C. E., Phares W. J., An integral turbulent kinetic energy analysis of free shear flows, в книге: *Free Turbulent Shear Flows*, Vol. 1, Conference Proceedings, NASA report No. SP-321, 1973, p. 577—624.
32. Chou P. Y., On velocity correlations and the solution of the equations of turbulent fluctuation, *Quart. J. Appl. Math.*, **3**, 38—54 (1945).

33. Rotta J. C., Recent attempts to develop a generally applicable calculation method for turbulent shear flow layers, North Atlantic Treaty Organization, Advisory Group for Aerospace Research and Development, report № CP-93 1972.
34. Daly B. J., Harlow F. H., Transport equations in turbulence, *Phys. Fluids*, **13**, 2634—2649 (1970).
35. Donaldson C. du P., A progress report on an attempt to construct an invariant model of turbulent shear flows, North Atlantic Treaty Organization, Advisory Group for Aerospace Research and Development, report № CP-93, 1972.
36. Lewellen W. S., Teske M., Donaldson C. du P., Application of turbulence model equations to axisymmetric wakes, *AIAA J.*, **12**, 620—625 (1974). [Имеется перевод: Левеллен, Теске, Дональдсон, Применение полуэмпирических уравнений пульсационного движения к расчету осесимметричных следов. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1974, т. 12, № 5, с. 56—63.]
37. Hanjalic K., Launder B. E., Fully developed asymmetric flow in a plane channel, *J. Fluid Mech.*, **51**, 301—335 (1972).
38. Reynolds W. C., Computation of turbulent flow, AIAA Paper № 74-556, AIAA 7th Fluid and Plasmadynamics Conference, June 17—19, 1974.
39. Yen J. T., Kinetic theory of turbulent flow, *Phys. Fluids*, **15**, 1728—1734 (1972).
40. Nee V. W., Kovaszny L. S. G., The calculation of the incompressible turbulent boundary layers by a simple theory, в книге: *Proceeding of the AFOSR-IFP-Stanford Conference*, Vol. I. (S. J. Kline, M. V. Morkovin, G. Sovran, D. J. Cockrell, eds.), Stanford University, Stanford, California, 1969, p. 300—320.
41. Kline S. J., Morkovin M. V., Sovran G., Cockrell D. J., eds., *Proceedings of the AFOSR-IFP-Stanford Conference on Computation of Turbulent Boundary Layers*, Thermosciences Div., Mechanical Engineering Department, Stanford University, Stanford, California, 1969.
42. Невзглядов В. Г., К феноменологической теории турбулентности, Докл. АН СССР (1945), **47**, № 3, 169—173.
43. Dryden H. L., Recent advances in the mechanics of boundary layer flow, в книге: *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1 (R. Von Mises, T. Von Kármán, eds.), Academic Press, New York, 1948, p. 1—40.
44. Lee S. C., Harsha P. T., Auiler J. E., Lin C. L., Heat, mass and momentum transfer in free turbulent mixing, в книге: *Proceedings of the 1972 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute* (R. B. Landis, G. J. Harde-man, eds.), Stanford University Press, Stanford, California, 1972, p. 215—230.
45. Mikatarian R. R., Benefield J. W., Turbulence in chemical lasers, AIAA Paper № 74-148, AIAA 12th Aerospace Sciences Meeting, January 30 — February 1, 1974.
46. Rhodes R. P., Harsha P. T., Peters C. E., Turbulent kinetic energy analyses of hydrogen-air diffusion flames, *Acta Astronaut.*, **1**, 443—470 (1974).
47. Runchal A. K., Spalding D. B., Steady turbulent flow and heat transfer downstream of a sudden enlargement in a pipe of circular cross section, *Wärme Stoffübertrag.*, **5**, 31—38 (1972).
48. Bradshaw P., Ferriss D. H., Applications of a general method of calculating turbulent shear layers, *J. Basic Eng., Trans. ASME*, **94**, 345—352 (1972). [Имеется перевод: Брэдшоу, Феррис, Использование общего метода расчета турбулентных течений со сдвигом. — *Теоретические основы инженерных расчетов*, 1972, № 4, с. 97—107.]
49. Townsend A. A., the Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1956. [Имеется перевод: Таунсенд А. А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М.: ИИЛ, 1959.]
50. Bradshaw P., Ferriss D. H., Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation: Compressible flow on adiabatic walls, *J. Fluid Mech.*, **46**, 83—110 (1971).
51. Bradshaw P., Ferriss D. H., Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation: IV. Heat transfer with small temperature differences, report № Aero 1271, National Physical Laboratory, Teddington, 1968.
52. Bradshaw P., Calculation of three-dimensional turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **46**, 417—445 (1971).
53. Bradshaw P., Dean R. B., McEligot D. M., Calculation of interacting turbulent shear layers-duct flow, *J. Fluids Eng., Trans. ASME*, **95**, 214—220 (1973). [Имеется перевод: Брэдшоу, Дин, Макэлигот, Расчет взаимодействующих турбулентных слоев со сдвигом. Течение в канале. — *Теоретические основы инженерных расчетов*, 1973, № 2, с. 115—123.]
54. Thompson B. G. J., A new two-parameters family of mean velocity profiles for incompressible turbulent boundary layers on smooth walls, R & M report № 3463, Aeronautical Research Council, 1965.
55. Bradshaw P., The turbulence structure of equilibrium boundary layers, *J. Fluid Mech.*, **29**, 625—645 (1967).
56. Harsha P. T., Lee S. C., Correlation between turbulent shear stress and turbulent kinetic energy, *AIAA J.*, **8**, 1508—1510 (1970). [Имеется перевод: Ли, Харша, Связь между турбулентными напряжениями трения и кинетической энергией турбулентности. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1970, т. 8, № 8, с. 179—181.]
57. Free Turbulent Shear Flows, Vol. I, Conference Proceedings, Vol. II, Summary of Data, NASA, Langley Research Center, Hampton, Virginia, NASA report № SP 321, 1973.
58. Wygnanski I., Fiedler H., Some measurements in the self-preserving jet, *J. Fluid Mech.*, **38**, 577—612 (1969).
59. Albertson M. L., Dai Y. B., Jensen R. A., Rouse H., Diffusion of submerged jets, paper № 2409, *Trans. ASCE*, **115**, 639—697 (1950).
60. Launder B. E., Spalding D. B., *Lectures in Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, New York, 1972.
61. Jones W. P., Launder B. E., The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **15**, 301—314 (1972).
62. Lin C. C., ed., *Turbulent Flows and Heat Transfer*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1959, p. 132. [Имеется перевод: Турбулентные течения и теплопередача, ред. Линь Цзя-цзяо, — М.: ИИЛ, 1963.]
63. Launder B. E., Spalding D. B., The numerical computations of turbulent flows, report № HTS/73/2, Imperial College, Department of Mechanical Engineering (1973).

Метод инвариантного моделирования

В. ЛЕВЕЛЛЕН¹⁾

9.1. ВВЕДЕНИЕ

В двух предыдущих главах было описано несколько различных по степени сложности и точности методов расчета турбулентных течений. Здесь же будут обсуждаться метод и некоторые его приложения, разрабатывавшиеся в последние годы Дональдсоном с сотр. в Принстонском университете. Название метода — инвариантное моделирование — может иметь два различных толкования. Одно из них связано с ограничениями, необходимыми для замыкания моделей, аппроксимирующих поведение неизвестных членов уравнений переноса. Согласно этим ограничениям, модели должны характеризоваться теми же свойствами тензорной симметрии, что и у моделируемых членов, и иметь ту же самую размерность. Однако данный подход можно назвать инвариантным моделированием и в том смысле, что искомая модель, оставаясь полуэмпирической, не должна иметь изменяемых постоянных, значения которых необходимо подбирать для каждого нового течения.

Исходными для настоящего метода являются точные уравнения для напряжений Рейнольдса. Предполагается, что замыкание уравнений переноса на уровне уравнений для корреляционных моментов второго порядка должно приводить к более общим моделям, чем простые схемы замыкания первого порядка. Ясно, что уравнения для моментов второго порядка содержат большое количество информации относительно динамики пульсационных характеристик турбулентных течений. При условии, что эта информация не теряется вследствие неудачного моделирования членов при замыкании системы уравнений, рассматриваемый подход представляется более общим, чем схемы замыкания первого порядка. Действительно, как будет показано в последующих разделах, наиболее рациональные схемы замыкания первого порядка являются частным случаем рассматриваемой инвариантной модели.

¹⁾ W. S. Lewellen, Aeronautical Research Associates of Princeton, Inc., Princeton, New Jersey.

В намерения автора не входило дать полный обзор литературы по вопросу о моделировании турбулентного переноса. Такие обзоры были опубликованы Брэдшоу [1], Меллором и Херрингом [2], а также Рейнольдсом [3]. Представительная подборка наиболее важной литературы по моделированию турбулентного переноса проведена Харлоу [4]. Далее будут предприняты попытки связать модель, описываемую здесь, с моделями, разработанными другими авторами. Кроме того, будут сопоставлены результаты расчета с помощью различных моделей.

9.2. ВЫВОД МОДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.2.1. О необходимости замыкания

При рассмотрении течения в виде суммы средней и пульсационной составляющих уравнения, описывающие осредненное течение, имеют вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{g_i (\theta - \theta_0)}{\theta} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j U_k, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad (9.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + U_j \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = - \frac{\partial \overline{u_j \theta}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \right). \quad (9.3)$$

Течение предполагается несжимаемым, однако в нем допускаются небольшие изменения плотности, обусловленные изменением температуры. В соответствии с приближением Буссинеска [5] изменение плотности проявляется только в виде объемной гравитационной силы, входящей в уравнение количества движения (9.1). Последнее слагаемое в уравнении (9.1) характеризует силу Кориолиса, которая появляется в системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω . Уравнение (9.3) описывает диффузию возмущений температуры.

Вследствие наличия членов, характеризующих напряжения Рейнольдса, система уравнений (9.1) — (9.3) является незамкнутой. Точные уравнения для корреляционных моментов пульсационных составляющих

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\overline{g_i u_j \theta}}{\theta} +$$

$$+ \frac{g_j \overline{u_i \theta}}{\theta} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_k \overline{u_i u_j} - 2\varepsilon_{jlk} \Omega_l \overline{u_k u_i} - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i u_j}) -$$

$$- \frac{\overline{u_i}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{\overline{u_j}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}, \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_j} = - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{g_i \overline{\theta^2}}{\theta} -$$

$$- 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u_k \theta} - \frac{\partial \overline{u_i u_j \theta}}{\partial x_j} - \frac{\overline{\theta}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \theta \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} + k u_i \frac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} = - 2\overline{u_j \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_j \theta^2} +$$

$$+ k \frac{\partial^2 \overline{\theta^2}}{\partial x_j \partial x_j} - 2k \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} \quad (9.6)$$

можно вывести аналогично тому, как это было сделано в вводных главах настоящей книги или в работе Дональдсона [6].

Однако расширенная система уравнений остается незамкнутой, так как в каждом дополнительном уравнении содержится несколько новых неизвестных переменных. Очевидно, что продолжение процедуры вывода точных уравнений для неизвестных корреляционных моментов будет приводить к новым неизвестным переменным во все возрастающем количестве. В этом и заключается проблема замыкания.

Замыкание системы уравнений, описывающей турбулентные течения, на уровне уравнений (9.4) — (9.6) называется замыканием второго порядка. В уравнении (9.4) имеются три члена

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i u_j}), \quad \left(\frac{\overline{u_i}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\overline{u_j}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \quad 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}, \quad (9.7)$$

которые необходимо выразить через другие переменные (или пренебречь ими). Рассмотрим эти три члена более подробно. Модели аналогичных членов в уравнениях (9.5) и (9.6) можно построить точно таким же образом.

9.2.2. Диссипативные члены

Последнее из выражений (9.7) характеризует влияние вязкой диссипации на структуру напряжений Рейнольдса. Предполагается, что даже при больших числах Рейнольдса вязкая диссипация является основным механизмом рассеяния турбулентной кинетической энергии. Вследствие наличия нелинейных членов в урав-

нениях Навье—Стокса уменьшение вязкости компенсируется уменьшением масштаба наименьших вихрей в турбулентном течении. При больших числах Рейнольдса вихри, в которых происходит диссипация кинетической энергии, существенно меньше вихрей, непосредственно получающих энергию от основного течения, и, как указывалось в гл. 4, можно предположить, что статистические характеристики мелкомасштабных вихрей не зависят от геометрии основного течения.

Поскольку масштаб самых крупных вихрей не влияет на процесс диссипации, скорость их разрушения не должна зависеть от ν . Следовательно, при больших числах Рейнольдса можно предложить следующую оценку диссипативных членов, основанную на соображениях теории размерностей:

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \sim \frac{q^3}{\Lambda}, \quad (9.8)$$

где q — среднеквадратическая величина флуктуаций полной скорости, а Λ — макромасштаб, или характерный размер крупных вихрей. Так как процесс вязкой диссипации является изотропным, большинство авторов моделируют диссипативные члены с помощью изотропного тензора, т. е.

$$\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} = C_1 \delta_{ij} \frac{q^3}{\Lambda}. \quad (9.9)$$

В работах [7—9] исследовались анизотропные модели. Модель, в которой поведение этих членов при $Re \rightarrow \infty$ определяется выражением (9.9), а при малых числах Рейнольдса учитывается возможность анизотропии процессов диссипации, имеет вид

$$\nu_i \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} = C_1 \delta_{ij} \frac{q^3}{\Lambda} + \nu_i \frac{C_2}{\Lambda^2} \overline{u_i u_j}. \quad (9.10)$$

Первое слагаемое в выражении (9.10) соответствует предположению о том, что микромасштаб Колмогорова—Тейлора λ пропорционален $\Lambda/(a + bq\Lambda/\nu)^{1/2}$, где a и b — постоянные (см. например, работы Ротта [10, 11]).

Некоторые авторы предпочитают рассчитывать величину ε из динамического уравнения, которое получается при моделировании уравнения переноса этой величины. Поскольку из выражения (9.10) следует, что уравнение для ε эквивалентно уравнению для Λ , этот подход будет обсуждаться в разд. 9.2.6.

9.2.3. Корреляции пульсаций давления

По сравнению с моделированием диссипативных членов построение моделей корреляционных функций, содержащих пульсации давления, связано с большими трудностями. Эти члены характеризуют перераспределение энергии турбулентности, поступление которой от основного потока описывается первым слагаемым в правой части уравнения (9.4). Данное утверждение можно сделать более очевидным, если переписать корреляции пульсаций давления в виде

$$\pi_{ij} = \frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{u_j}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i p}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u_j p}}{\partial x_i} - \frac{\rho}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (9.11)$$

Поскольку рассматривается течение несжимаемой жидкости, последний член в выражении (9.11) не оказывает влияния на величину турбулентной кинетической энергии $q^2/2 = \overline{u_i u_i}/2$, а лишь перераспределяет энергию между различными составляющими тензора напряжений Рейнольдса. Объемный интеграл от первых двух слагаемых в правой части выражения (9.11) по любой конечной области с турбулентным движением, ограниченной ламинарным потоком, равняется нулю. Следовательно, эти два члена могут приводить лишь к перераспределению энергии в пространстве, т. е. являются членами диффузионного типа.

Почти все авторы, следуя Ротта [10], моделируют по крайней мере один из вкладов в механизм течения членом, действующим в направлении изотропии процесса и пропорциональным степени анизотропии течения, т. е.

$$\pi_{ij} = \frac{C_3 q}{\Lambda} \left(\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} \frac{q^2}{3} \right). \quad (9.12)$$

Разность в скобках характеризует отклонение от изотропной турбулентности и обладает необходимым свойством тензорной симметрии, а множитель q/Λ обеспечивает выполнение требований размерности. Дональдсон [6, 7] для моделирования первых двух членов в правой части выражения (9.11) добавляет еще слагаемое, характеризующее диффузию турбулентности в пространстве и удовлетворяющее соответствующим критериям симметрии и размерности, в результате чего получается следующее соотношение:

$$\pi_{ij} = \frac{C_3 q}{\Lambda} \left(\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} \frac{q^2}{3} \right) + C_4 \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(q \Lambda \frac{\partial \overline{u_k u_j}}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q \Lambda \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_k} \right) \right]. \quad (9.13)$$

Можно показать, что корреляции давления должны зависеть от деформации среднего течения. Если применить операцию дивергенции к уравнениям Навье—Стокса для флуктуаций скорости, то можно получить следующее уравнение Пуассона для пульсаций давления p :

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = -2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j - \overline{u_i u_j}) + \frac{g_i}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - 2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (9.14)$$

Уравнение (9.14) можно формально проинтегрировать и получить выражение для p . Затем путем дифференцирования этого выражения и составления корреляций с компонентами скорости u_i можно получить выражение для π_{ij} . Полученное таким образом интегральное выражение не позволяет решить задачу, однако на основании его можно сделать предположение о виде модельных зависимостей. Простейшим видоизменением выражения (9.13) является добавление члена

$$C_5 q^2 \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (9.15)$$

моделирующего влияние деформаций основного течения. В предельном случае изотропной турбулентности течения со слабыми однородными деформациями Ротта [11] и Кроу [12] нашли, что $C_5 = 0,2$. Однако такое значение C_5 делает этот член в любых практических расчетах слишком большим. Выражения, аналогичные (9.15), применялись в ряде моделей [13—15], причем значение постоянной C_5 определялось эмпирически.

Лаундером [16] была предложена модель влияния деформации основного течения, которая хорошо согласуется с экспериментальными данными и имеет следующий вид:

$$C_5 (P_{ij} - \delta_{ij} P_{ii}/3), \quad (9.16)$$

где P_{ij} обозначает член, характеризующий генерацию напряжений Рейнольдса в уравнении (9.4). Аналогичный член используется в более сложной модели Нэйота и др. [17]. Включение выражения (9.16) в соотношение (9.13) эквивалентно предположению о том, что корреляции пульсаций давления не только стремятся сделать турбулентность изотропной со скоростью, линейно связанной со степенью отклонения от изотропного состояния, но и перераспределяют генерацию турбулентности со скоростью, пропорциональной анизотропии этой генерации.

Выражения (9.15) и (9.16) не отражают тот экспериментальный факт, что влияние на u_2 и u_3 деформации основного течения часто

бывает неодинаковым, когда течение является одномерным в направлении координаты x_1 . Более сложные модели корреляций давления можно найти в работах [9, 18—21].

9.2.4. Корреляционные моменты третьего порядка флуктуаций скорости

Члены с моментами третьего порядка флуктуаций скорости описывают перенос напряжений Рейнольдса из одной области течения в другую без генерации или затухания их. Как и при рассмотрении корреляций давления, покажем это путем интегрирования по объему. Когда объем интегрирования ограничен либо ламинарным течением, либо однородным изотропным потоком, этот интеграл будет равняться нулю. Наиболее часто такие члены в уравнениях переноса моделируются с помощью градиентов диффузии, хотя в работе Брэдшоу [1] была предложена и алгебраическая модель поведения моментов третьего порядка.

Для моделирования рассматриваемых членов применялись различные зависимости от градиентов диффузионных членов. Дональдсоном [7] была предложена формула, которая удовлетворяет условиям симметрии тензора $\overline{u_k u_i u_j}$ и в которой используется скалярный коэффициент диффузии,

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i u_j}) = C_6 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[q \Lambda \left(\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_k u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_k u_j}}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (9.17)$$

Ханжалик и Лаундер [19] предложили выражение, в которое входит тензор коэффициентов диффузии,

$$D_{ij} = C_6 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\Lambda}{q} \left(\overline{u_k u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l} \right). \quad (9.18)$$

Это выражение было получено в результате исследования уравнения, которое получается при «усечении» точного уравнения для $\overline{u_k u_i u_j}$. Простейшей моделью третьих моментов флуктуаций скорости может служить формула

$$D_{ij} = C_6 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q \Lambda \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right). \quad (9.19)$$

Хотя обе части этого выражения являются тензорами второго ранга, оно не согласуется по свойствам симметрии с тензором $\overline{u_k u_i u_j}$.

Вольфштейн и др. [9], а также Ламли и Хайе-Нури [18] предложили формулы, содержащие значительно большее число членов, коэффициенты которых неизвестны. Однако наличие слишком большого количества неизвестных коэффициентов затрудняет использование таких выражений в практических расчетах.

9.2.5. Модельные уравнения

В данном подходе сначала рассматриваются простейшие из возможных схем замыкания второго порядка. Для моделирования диссипативных членов используется выражение (9.10), для корреляций давления со скоростью — выражение (9.12), а для корреляций, характеризующих вклад пульсаций давления в диффузию (вместе с диффузионными членами, зависящими от пульсаций скорости), — выражение, аналогичное формуле (9.19):

$$\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} = \frac{b \delta_{ij} q^3}{3\Lambda} + \frac{a \overline{u_i u_j}}{\Lambda^2}, \quad (9.20)$$

$$\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) = -\frac{q}{\Lambda} \left(\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} \frac{q^2}{3} \right), \quad (9.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_k u_i u_j}) + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{u_i p}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j p}}{\partial x_i} \right) = \nu_c \frac{\partial q \Lambda}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}. \quad (9.22)$$

При записи моделей этих членов коэффициент C_3 был положен равным единице, т. е. включен с помощью выражения (9.12) в определение макромасштаба Λ . Все другие коэффициенты обозначены теми же символами, которые используются в последних работах Дональдсона и его сотрудников.

Выражения (9.20) — (9.22) обеспечивают выполнение минимальных требований, которым должны удовлетворять любые схемы замыкания второго порядка. Комбинация членов в выражениях (9.20) и (9.21) обеспечивает затухание каждой составляющей напряжений Рейнольдса за время, намного превышающее Λ/q . Член, определяемый выражением (9.22), препятствует образованию больших градиентов в распределении напряжений Рейнольдса.

Если в уравнениях (9.5) и (9.6) использовать аналогичные выражения для аппроксимации членов, зависящих от тепловых потоков и изменения температуры, то систему модельных уравнений для корреляционных моментов второго порядка можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{g_i \overline{u_j \theta}}{\theta} + \frac{g_j \overline{u_i \theta}}{\theta} - \\ & - 2\varepsilon_{ikl} \Omega_k \overline{u_l u_j} - 2\varepsilon_{jkl} \Omega_l \overline{u_k u_i} + \nu_c \frac{\partial}{\partial x_k} \left(q \Lambda \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) - \\ & - \frac{q}{\Lambda} \left(\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} \frac{q^2}{3} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - \delta_{ij} \frac{2bq^3}{3\Lambda} - \frac{2a \overline{u_i u_j}}{\Lambda^2}, \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_j} = & - \overline{u_i u_j} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \\ & + \frac{g_i \overline{\theta^2}}{\theta} - 2 \varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u_k \theta} + v_c \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q \Lambda \frac{\partial \overline{u_i \theta}}{\partial x_j} \right) - \frac{A q}{\Lambda} \overline{u_i \theta} + \\ & + k \frac{\partial^2 \overline{u_i \theta}}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{a k u_i \overline{\theta}}{\Lambda^2}, \end{aligned} \quad (9.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} = & - 2 \overline{u_j \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + v_c \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q \Lambda \frac{\partial \overline{\theta^2}}{\partial x_j} \right) + \\ & + k \frac{\partial^2 \overline{\theta^2}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{2 b s q \overline{\theta^2}}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Эта система уравнений и выбрана для проведения расчетов. В отличие от моделей с большим количеством неизвестных коэффициентов, значения которых подбираются для расчетов определенных течений, в настоящей модели используется минимальное количество произвольных постоянных. Если же при применении этой модели окажется необходимым использование большего количества членов, то будут добавляться другие члены и коэффициенты. В уравнения (9.24) и (9.25) включены два дополнительных коэффициента A и s . На начальном этапе расчетов оба эти коэффициента принимались равными единице, но, как будет показано в следующем разделе, для более широкого применения модели желательно оставить эти постоянные произвольными.

9.2.6. Определение масштаба турбулентности

Для замыкания полученных уравнений необходимо разработать способы определения масштаба турбулентности Λ , входящего в модельные выражения. Разные авторы использовали различные подходы к решению этой проблемы. Масштаб Λ можно задавать в виде эмпирической функции, основываясь на особенностях геометрии рассматриваемого течения, или находить из решения полуэмпирического модельного дифференциального уравнения. Каждый из этих подходов имеет свои достоинства и недостатки.

Макромасштаб Λ определяется выражениями (9.20) — (9.22). Можно ожидать, что эта величина взаимосвязана с интегральным масштабом турбулентности, обсуждавшимся в предыдущих главах, однако вследствие выбранной здесь схемы нормирования не совпадает с ним. Эта величина также должна быть связана с длиной смещения, обсуждавшейся в гл. 7. Так же как и в вышеупомянутых подходах, для определения этого параметра в рассматриваемой модели необходима эмпирическая информация. Прежде

всего ясно, что масштаб Λ не может превышать по величине некоторой части линейного размера области турбулентного течения; кроме того, в окрестности стенки его величина должна быть пропорциональной расстоянию до стенки. Этих двух простых идей вместе с эмпирической информацией, необходимой для определения двух коэффициентов пропорциональности, оказалось достаточно для замыкания системы и получения удовлетворительных результатов численного решения многих задач [6, 22, 23]. Другие авторы [24, 25], аналогично тому, как это делалось в схемах замыкания первого порядка с длиной смещения, использовали полностью эмпирическое распределение Λ в интересующей их области.

Чтобы устранить произвол в определении Λ для различных течений, многие исследователи пытались моделировать динамическое уравнение для Λ или эквивалентных ему параметров. При этом использовались самые разные исходные положения. Работы Ротта [11], Нэйота и др. [17], Дональдсона [6] основывались на уравнениях для двухточечных корреляций скорости. Путем интегрирования уравнения для таких корреляций $\overline{u_i(x) u_i(x+r)}$ с целью получения интегрального масштаба можно показать, что наиболее подходящим определением Λ является

$$q^2 \Lambda = c \iiint_V \overline{u_i(x) u_i(x+r)} \frac{dv}{r^2}. \quad (9.26)$$

Для течений в отсутствие поля массовых сил, следуя Вольфштейну и др. [9], можно получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{D(q^2 \Lambda)}{Dt} = & \iiint_V \left\{ [U_k(x) - U_k(x+r)] \frac{\partial \overline{u_i(x) u_i(x+r)}}{\partial r_k} - \right. \\ & - \overline{u_i(x) u_k(x+r)} \frac{\partial U_i(x+r)}{\partial x_k} + \overline{u_k(x) u_i(x+r)} \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_k} - \\ & - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_k(x) u_i(x) u_i(x+r)} - \\ & - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial r_k} [\overline{u_i(x) u_k(x+r) u_i(x+r)} - \overline{u_i(x) u_k(x) u_i(x+r)}] - \\ & - \frac{1}{c p} \frac{\partial \overline{p(x) u_i(x+r)}}{\partial x_i} - \frac{1}{c p} \frac{\partial}{\partial r_i} [\overline{u_i(x) p(x+r)} - \overline{p(x) u_i(x+r)}] - \\ & \left. - \sqrt{\frac{\partial^2 \overline{u_i(x) u_i(x+r)}}{\partial x_k \partial x_k}} - 2 \sqrt{\frac{\partial^2 \overline{u_i(x) u_i(x+r)}}{\partial x_k \partial r_k}} + 2 \sqrt{\frac{\partial^2 \overline{u_i(x) u_i(x+r)}}{\partial r_k \partial r_k}} \right\} \frac{dv}{r^2}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Трудности такого подхода очевидны. Они связаны с тем, что ни один из членов в правой части уравнения (9.27) нельзя проинтегрировать

точно и поэтому их все необходимо моделировать. Те же самые трудности остаются, если процедура получения уравнения для Λ основывается на уравнении для скорости диссипации ε (такой подход рассматривался в работах Ламли и Хайе-Нури [18], Харлоу и Накаямы [26], а также Ханжалика и Лаундера [19]) или на уравнении для пульсаций завихренности подобно тому, как это делали Дейли и Харлоу [8] или Уилкоккс и Ольбер [27]. В модели, рассмотренной в разд. 9.2.5, $\varepsilon = bq^3/\Lambda$. Аналогично пульсации завихренности можно считать пропорциональными q/Λ . Следовательно, с помощью уравнения переноса кинетической энергии во всех этих подходах можно получить уравнение для Λ . Как было указано Брэдшоу [1], а также Меллором и Херрингом [2], все уравнения для Λ в своей окончательной форме можно записать в следующем виде:

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = -s_1 \frac{\Lambda}{q^2} \overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - s_2 bq + \text{диффузионные члены.} \quad (9.28)$$

Различные формы этого уравнения различаются видом членов, характеризующих турбулентную диффузию. Затрудняющим обстоятельством является то, что эти члены более важны в уравнении для масштаба Λ , чем в уравнении для напряжений Рейнольдса. Дональдсон и др. [28, 29] начали разработку уравнения для масштаба Λ с диффузионных членов в следующем довольно общем виде:

$$\begin{aligned} \text{диффузионные члены} = & s_0 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_c q \Lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \right) + s_3 \frac{\Lambda}{q^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(q \Lambda \frac{\partial q^2}{\partial x_i} \right) + \\ & + s_4 q \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \right) + s_6 \frac{\Lambda}{q^2} \left(\frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) + s_7 \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Как было указано Меллором и Херрингом [2], такой подход включает все возможные уравнения для $q^n \Lambda^n$, которые в комбинации с уравнением кинетической энергии сводятся к уравнению (9.28).

Аналогично тому как это было сделано в работах [6] и [8], в уравнение будет добавлен член, пропорциональный $(\Lambda q^2) \overline{g_i u_i \theta} / \theta$, для того чтобы непосредственно учесть влияние стратификации. При этом потребуется введение еще одной постоянной s_8 .

Сразу же становится очевидным, что уравнение для масштаба турбулентности является намного более произвольным, чем уравнения для напряжений Рейнольдса, в которых многие члены определялись точно, без введения моделей и коэффициентов пропорциональности. При таком большом числе коэффициентов в уравнении для масштаба турбулентности необходимо добиваться совпадения с соответствующим большим количеством экспериментов, если, конечно, эти коэффициенты в своем окончательном виде должны оставаться неизменными для многих различных течений.

Вопрос заключается также в том, в какой степени отвечает действительности интегральный масштаб Λ , определяемый локаль-

ными значениями зависимых переменных. Возможно также, что пространственные граничные условия играют значительно более важную роль в определении Λ по сравнению с их ролью при определении напряжений Рейнольдса.

9.3. ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИН КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ

Простейшая модель, описанная в разд. 9.2.5, содержит пять неизвестных коэффициентов: a , b , v_c , Λ и s , не считая масштаба турбулентности Λ . В идеальном случае эти коэффициенты должны быть постоянными, но возможен и другой подход к определению их значений, при котором они являются однозначными функциями безразмерных параметров. Течения, описываемые уравнениями (9.1) — (9.3), должны зависеть от чисел Рейнольдса, Ричардсона и Росби. Кроме того, эти коэффициенты могут быть также функциями некоторых безразмерных величин, характеризующих турбулентность, например, таких, которые были предложены Ламли и Хайе-Нури [18]:

$$(\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} q^2/3) (\overline{u_j u_i} - \delta_{ji} q^2/3) / q^4.$$

Авторы данного метода придерживаются оптимистической точки зрения и предполагают, что коэффициенты остаются постоянными. Если же коэффициенты необходимо рассматривать как функции безразмерных параметров, то методы замыкания второго порядка теряют некоторые из своих преимуществ относительно схем замыкания первого порядка. Для тех коэффициентов, для которых это возможно, значения их необходимо определять из экспериментов, в которых данное течение зависит только от рассматриваемого коэффициента.

9.3.1. Коэффициент b в модели диссипативных членов

На характеристики турбулентных течений при больших числах Рейнольдса наиболее сильно влияет коэффициент b в уравнении (9.23). Значение этого коэффициента можно определить из анализа стационарной однородной турбулентности в отсутствие массовых сил. Если рассматривается одномерное основное течение вдоль оси x_1 с градиентом скорости в направлении координаты x_3 , то уравнение (9.23) принимает следующий вид:

$$0 = -\overline{u_i u_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \delta_{1j} - \overline{u_j u_3} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \delta_{1i} - \frac{q}{\Lambda} (\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} \frac{q^2}{3}) - \delta_{ij} \frac{2bq^3}{3\Lambda}. \quad (9.30)$$

Из таких уравнений, записанных для каждой из составляющих, можно получить несколько различных, не зависящих от Λ , выражений для b :

$$b = \frac{(\overline{u_1 u_3})^2}{\overline{u_3 u_3} q^2} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\overline{u_3 u_3}}{q^2} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{\overline{u_2 u_2}}{q^2} \right). \quad (9.31)$$

Из экспериментальных данных Шампаня и др. [30], полученных при исследовании такого однородного сдвигового течения в аэродинамической трубе, соответственно для трех выражений (9.31) следуют значения 0,12, 0,14 и 0,08. Все такие величины, за исключением последней, близки к значению 1/8, выбранному Дональдсоном при сопоставлении с результатами других экспериментов. Для более точной аппроксимации всех экспериментальных данных необходимо включить в модель добавочные члены, подобные обсуждавшимся в разд. 9.2.3.

Все результаты расчетов, рассматриваемые в настоящей главе, были получены при $b = 0,125$.

9.3.2. Коэффициент диффузии ν_c

Коэффициент диффузии ν_c гораздо труднее определить отдельно от масштаба турбулентности Λ . На основании расчетных исследований следов и струй [22] его значение здесь выбирается равным 0,3. Однако вследствие относительно слабой зависимости полученных результатов расчета от величины этого коэффициента вышеуказанное значение можно считать определенным лишь с точностью $\pm 0,05$. Это является основной причиной использования простейшей модели диффузионного члена, определенной выражением (9.22). Экспериментальная проверка может показать, что необходимы более сложные модели диффузионных членов. Трудности измерения вклада корреляций давления делают экспериментальное определение величины этих членов особенно сложным. Лучший подход к моделированию поведения указанных членов основывается, вероятно, на возможности детального сопоставления данных со средними по ансамблям, полученными при помощи описанного в гл. 10 численного моделирования турбулентных течений.

9.3.3. Определение масштаба турбулентности

В разд. 9.2.6 обсуждались два подхода к расчету величины Λ . Определим сначала две постоянные, необходимые для нахождения пределов изменения Λ . Предположим, что в окрестности стенки $\Lambda = \alpha z$, где z — расстояние по нормали от стенки. Коэффициент α непосредственно связан с постоянной Кармана κ . Для пристеночного подслоя с «постоянным потоком импульса» в пограничном

слое на плоской пластине выполняется уравнение (9.30), в котором индекс 1 обозначает направление набегающего потока, а $x_3 = z$. Если для исключения градиента основного течения использовать выражение для κ

$$\kappa = \frac{u^*}{z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^{-1}, \quad (9.32)$$

то уравнение (9.30) можно преобразовать к виду

$$\alpha = \kappa b \left[\frac{b(1-2b)}{3} \right]^{3/4}. \quad (9.33)$$

Если теперь подставить в это соотношение ранее полученное значение $b = 0,125$, то уравнение (9.33) примет вид

$$\alpha = 1,68\kappa. \quad (9.34)$$

Общепринятое по результатам лабораторных экспериментов значение κ равняется 0,40, однако подробные измерения в приземном слое атмосферы при значительно больших числах Рейнольдса [31] дают значение $\kappa = 0,36$. Соответствующие значения α равняются 0,67 и 0,60. В большинстве описываемых далее расчетов использовалось значение $\alpha = 0,65$, хотя некоторые из них были выполнены при $\alpha = 0,60$.

Другое предельное значение Λ связано с протяженностью области течения и выбиралось путем численной оптимизации на ЭВМ. В случае осесимметричной струи или следа это значение принималось равным 0,2 радиуса, на котором величина турбулентной энергии уменьшается в 4 раза по сравнению с ее максимальным значением. Для плоского пограничного слоя или следа оно принималось равным 0,3 характеристического размера области турбулентного течения. В случае плоского слоя смешения можно ожидать, что это значение будет равняться 0,6. Очевидно, что для течений с более сложной геометрией определить значение Λ труднее.

Другой подход заключается в попытке преодолеть эту трудность путем использования динамического уравнения для Λ с коэффициентами, не зависящими от геометрии течения. Попытаемся определить коэффициенты в уравнениях (9.28) и (9.29).

Величину коэффициента s_2 можно оценить в задаче затухания однородной турбулентности за сеткой. Если предположить, что однородная турбулентность затухает как

$$q^2 \sim x^{-n}, \quad (9.35)$$

то из уравнения (9.30) получим

$$\Lambda = bq^3 / \left(-\frac{1}{2} U \frac{\partial q^2}{\partial x} \right). \quad (9.36)$$

Тогда из уравнения (9.28) можно получить следующее соотношение:

$$s_2 = -\frac{U}{bq} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} = -\frac{(2-n)}{n}. \quad (9.37)$$

В недавно выполненном обзоре экспериментов с затуханием турбулентности за сетками Гед-эль-Хака и Коррзина [32] показано, что значение n в основном лежит в диапазоне от 1 до 1,3, причем наибольшее количество значений попадает в окрестность 1,25. Это значение n приводит к величине $s_2 = -0,6$.

Чтобы уменьшить число коэффициентов в модели процесса диффузии, желательно сохранить значение коэффициента s_0 в диффузионных членах уравнения переноса масштаба турбулентности таким же, как в уравнении для напряжений Рейнольдса. Это условие приводит к $s_0 = 1$. Данное равенство аналогично предположению о том, что $s_3 = 0$, поскольку при $s_0 = 1$ и при любом выборе m и n выражение вида

$$\frac{Dq^m \Lambda^n}{Dt} - v_c \frac{\partial}{\partial x_i} \left(q \Lambda \frac{\partial q^m \Lambda^n}{\partial x_i} \right) \quad (9.38)$$

приводит к выражению для $D\Lambda/Dt$ с $s_3 = 0$.

Простую связь между коэффициентами s_0 , s_1 , s_2 и s_4 можно получить из упрощенного уравнения для масштаба турбулентности в случае стационарного слоя с постоянным напряжением трения в окрестности твердой границы, где $\Lambda = \alpha z$. В этой области уравнение для масштаба турбулентности принимает вид

$$0 = s_1 \frac{\alpha z u^{*2}}{q^2} \frac{\partial U}{\partial z} - s_2 b q + v_c q \alpha^2 + s_4 q \alpha^2. \quad (9.39)$$

Используя уравнение энергии, это уравнение можно свести к следующему соотношению между коэффициентами:

$$-s_4 = v_c + (b/\alpha^2) (s_1 - s_2). \quad (9.40)$$

Отсюда можно определить коэффициенты s_1 , s_6 и s_7 путем численной оптимизации. Однако прежде чем приступить к этому, необходимо определить граничные условия для масштаба турбулентности.

Граничные условия для уравнения переноса масштаба турбулентности не столь очевидны, как для уравнений переноса напряжений Рейнольдса, так как масштаб турбулентности не стремится к нулю на свободной границе области турбулентного течения. Действительно, можно ожидать, что вихри, влияние которых распространяется наиболее далеко, окажутся самыми большими из существующих в этой области. Поэтому на свободной границе можно выбрать значение Λ , равное удвоенному предельному значению, полученному ранее.

Вопрос о граничных условиях упрощается, если использовать уравнение для скорости диссипации, поскольку $\epsilon = bq^3/\Lambda$ стремится к нулю на внешней границе. Однако при этом Λ может стремиться к любому значению в диапазоне от нуля до бесконечности, если $q \rightarrow 0$, и никакой информации о поведении Λ из этого поведения получить нельзя.

Член, характеризующий генерацию масштаба турбулентности, в случае с нулевым суммарным импульсом мал [21]; отсюда следует, что значения постоянных s_6 и s_7 лежат в диапазоне между 0,3 и 1. Чтобы уменьшить неопределенность в выборе коэффициентов, наложим довольно произвольное условие $s_4 = s_6 = s_7/2$. Значение последнего неизвестного коэффициента s_1 , определенное при расчете течения в струе со свободными границами, приблизительно равняется $-0,35$. Это значение лежит посередине диапазона изменения параметра, используемого Роды [14], который показал, что указанный параметр должен изменяться от 1,2 до 2 (что соответствует в данном случае изменению s_1 от -1 до 0,6).

При таком выборе коэффициентов уравнение для масштаба турбулентности принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{D\Lambda}{Dt} = & 0,35 \frac{\Lambda}{q^2} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + 0,6 \frac{v}{\lambda^2} \Lambda + 0,3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(q \Lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{0,375}{q} \frac{\partial q \Lambda}{\partial x_i} \frac{\partial q \Lambda}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Как уже отмечалось, это уравнение не является столь же достоверным, как полученные ранее модельные уравнения для напряжений Рейнольдса. Действительно, расчеты показывают, что до тех пор, пока турбулентность мало отличается от равновесной, ранее описанный подход, заключающийся в приравнивании Λ меньшему из двух предельных значений, достаточно точен.

9.3.4. Модификация модели при небольших числах Рейнольдса

Коэффициент a в уравнении (9.23) важен только при небольших числах Рейнольдса, т. е. когда $bq\Lambda/\alpha v \ll 0(1)$. Наиболее хорошо исследованным экспериментально турбулентным течением с небольшими числами Рейнольдса является течение в переходной области пограничного слоя снаружи так называемого ламинарного подслоя. В этой области уравнение (9.1) сводится к

$$-\overline{u_1 u_3} + v \frac{\partial U_1}{\partial x_3} = \text{const} = u^{*2}. \quad (9.42)$$

В рассматриваемой области можно решить уравнение (9.42) вместе с четырьмя уравнениями (9.23) для ненулевых составляющих тен-

зора напряжений Рейнольдса и результаты сопоставить с эмпирическим законом стенки Коулса [33]. Результаты этой процедуры для трех значений a и ранее выбранных значений α , b и ν_c приведены на рис. 9.1. Очевидно, что наилучшим является значение $a = 3$.

9.3.5. Дополнительные коэффициенты A , s и s_3 , необходимые для вычисления корреляций флуктуаций температуры

Коэффициент A в уравнении (9.24) можно определить, снова рассматривая область с постоянным потоком импульса в пограничном слое при больших числах Рейнольдса и в отсутствие массовых сил, т. е. в предельном случае малых флуктуаций температуры. Корреляционное уравнение для флуктуаций нормальной составляющей скорости и температуры (9.24) тогда принимает вид

$$-\overline{u_3 u_3} \frac{\partial \theta}{\partial x_3} - \frac{Aq}{\Lambda} \overline{u_3 \theta} = 0, \quad (9.43)$$

а уравнение для касательного напряжения (9.30) в тех же самых условиях сводится к

$$-\overline{u_3 u_3} \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{q}{\Lambda} \overline{u_1 u_3} = 0. \quad (9.44)$$

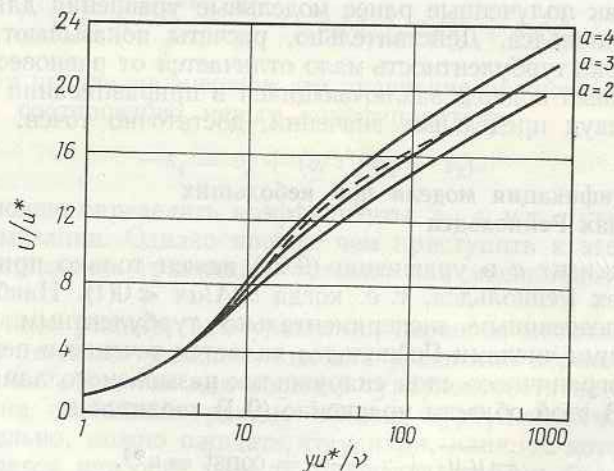


Рис. 9.1. Влияние значения постоянной a на результаты расчета течения в области действия закона стенки.
----- закон Коулса [33].

Уравнения (9.43) и (9.44) можно использовать для получения отношения коэффициента турбулентного переноса импульса к коэффициенту турбулентного переноса тепла. Эту величину иногда называют турбулентным числом Прандтля

$$\text{Pr}_t = \frac{\overline{u_1 u_3} \partial \theta / \partial x_3}{\overline{u_3 \theta} \partial U_1 / \partial x_3}, \quad (9.45)$$

На основании измерений в приземном слое атмосферы, выполненных Бузингером и др. [31], для этого числа было выбрано значение 0,75.

Коэффициент s в диссипативном члене корреляционного уравнения для пульсаций температуры можно оценить путем сопоставления частотных спектров турбулентной кинетической энергии и дисперсии температуры. Было установлено экспериментально, что в инерционной подобласти трехмерный энергетический спектр в пространстве волновых чисел (гл. 4) имеет вид

$$E(k) = \alpha \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (9.46)$$

где α — постоянная величина.

Аналогичное выражение можно написать для спектра дисперсии температуры:

$$E_\theta(k) = \beta N \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad (9.47)$$

Здесь β — постоянная, а N — коэффициент диссипации температурных флуктуаций. Интегрируя выражение (9.46) для получения $q^2/2$ и выражение (9.47) для получения $\overline{\theta^2}/2$, можно показать, что коэффициент s в уравнении (9.25) должен быть равен α/β . В случае полученных Теннекесом и Ламли [34] значений $\alpha = 1,5$ и $\beta = 0,5$ получается $s = 3,0$. Однако в некоторых работах [35] отношение α/β принимается равным всего лишь 0,6. Здесь эта величина выбрана равной 1,8 [36]; в работе Меллора [15] для нее бралось значение 15/8, а в работах Уингарда и др. [37, 38] эта величина считается равной 2,8.

Оценку коэффициента члена, характеризующего влияние стратификации в уравнении для масштаба турбулентности, можно получить из решения для устойчивого слоя с постоянным потоком импульса при числе Ричардсона, равном критическому значению 0,21 [31]. Если предположить, что Λ и q являются постоянными, и выбрать из условия $\text{Ri}_c = 0,21$ величину Λ [36], то значение коэффициента члена, характеризующего действие архимедовых сил, оказывается равным 0,8. Таким образом, уравнение переноса масштаба турбулентности принимает вид

$$\frac{D\Lambda}{Dt} = 0,35 \frac{\Lambda}{q^2} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + 0,6 \frac{\nu \Lambda}{\lambda^2} + 0,3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(q \Lambda \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \right) -$$

$$-\frac{0,375}{q} \left(\frac{\partial q \Lambda}{\partial x_i} \frac{\partial q \Lambda}{\partial x_i} \right) + \frac{0,8 \Lambda}{q^2} \frac{\partial_i u_i \theta}{\theta}. \quad (9.48)$$

9.4. ПРОВЕРКА МОДЕЛИ

Перед тем как перейти к сопоставлению расчетных и экспериментальных данных, необходимо напомнить, что нашей целью является получение удовлетворительных результатов для широкого класса течений, а не достижение большой точности при расчете одного какого-либо течения. Будут особо отмечены течения, при расчете которых для некоторых из переменных возникают значительные расхождения между расчетными и экспериментальными данными. При исследовании относительно узкого класса течений можно уменьшить расхождения путем изменения коэффициентов

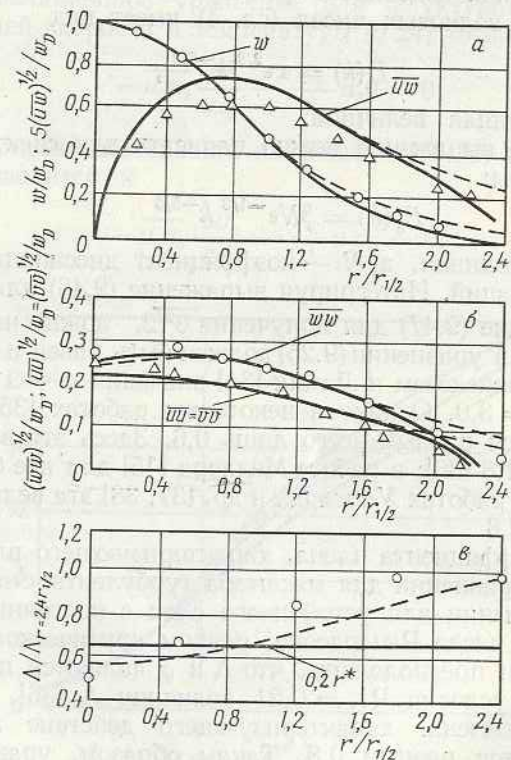


Рис. 9.2. Автомоделные профили характеристик течения в осесимметричной струе со свободными границами.

— $\Lambda = \text{const}$; — — — Λ определяется из уравнения переноса; $\circ \Delta$ экспериментальные данные [39].

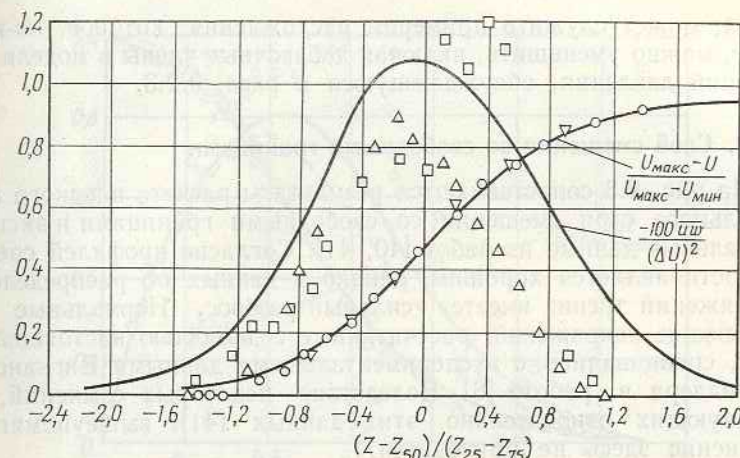


Рис. 9.3. Автомоделные профили в плоском слое смешения со свободными границами.

— предлагаемая расчетная модель; $\circ \Delta$ Вигнанский и Фидлер [40]; $\nabla \square$ Чайлдс [41].

в модели. Для построения же более общей модели необходимо применить более сложное моделирование отдельных членов уравнений, подобное обсуждавшемуся в разд. 9.2.

9.4.1. Осесимметричная струя со свободными границами

На рис. 9.2 для осесимметричной струи в области автомодельности результаты расчета по разработанной модели сопоставляются с экспериментальными данными Вигнанского и Фидлера [39]. Расчеты выполнялись [22, 29], начиная с некоторых произвольных профилей скорости и характеристик турбулентности, и продолжались до тех пор, пока не достигался автомодельный профиль. Расчеты проводились с использованием обоих обсуждавшихся в разд. 9.2.6 и 9.3.3 подходов к определению масштаба турбулентности. Зависимости для масштаба турбулентности, полученные этими двумя методами, сопоставляются на рис. 9.2, в с полученным в эксперименте поведением продольного интегрального масштаба. Как и ожидалось, зависимость, рассчитанная с помощью уравнения (9.41), лучше согласуется с экспериментальными данными, однако уточнение расчетных характеристик течения, если оно и существует, является незначительным. То, что рассчитанная величина энергии меньше, а рассчитанная величина касательных напряжений больше соответствующих экспериментальных зна-

чений, может служить примером расхождения, которое, по-видимому, можно уменьшить, включая добавочные члены в модель корреляций давления, обсуждающуюся в разд. 9.2.3.

9.4.2. Слой смешения со свободными границами

На рис. 9.3 сопоставляются результаты расчета плоского автомодельного слоя смешения со свободными границами и экспериментальные данные из работ [40, 41]. Согласие профилей средней скорости является хорошим, однако в данных по распределению напряжений трения имеется сильный разброс. Нормальные составляющие напряжений, рассчитанные с помощью настоящей модели, сравнивались с экспериментальными данными Вигнанского и Фидлера в работе [6]. Вследствие некоторых сомнений, существующих относительно этих данных [41], вышеупомянутое сравнение здесь не приводится.

9.4.3. Плоский след

На рис. 9.4 результаты расчетов сопоставляются с измерениями Таунсенда [42] в автомодельном следе. Приведены также результаты расчетов по модели Ламли и Хайе-Нури [18]. Последняя модель, которая содержит гораздо большее количество членов и коэффициентов, значительно лучше предсказывает поведение нормальных составляющих напряжений Рейнольдса в этом течении. Флуктуации нормальной и поперечной составляющих скорости в настоящей модели принимаются равными между собой, тогда как в эксперименте они сильно отличаются друг от друга. Однако и эти экспериментальные данные сомнительны, поскольку в работе Томаса [43] сообщается об экспериментальных среднеквадратических величинах продольных пульсаций, которые примерно на 33% превышают данные Таунсенда.

9.4.4. Осесимметричный след

Возможность прогнозирования поведения следа на основании данной модели проверялась путем использования в расчете, в качестве исходных данных, профилей скорости и напряжений Рейнольдса в некотором поперечном сечении, полученных экспериментально Чеври [44], и сопоставления дальнейшего их расчетного и экспериментального поведения [22]. На рис. 9.5 показано затухание максимальных величин дефекта скорости ω_D , касательного напряжения $i\omega_{\max}$ и флуктуаций продольной скорости $\overline{w\omega}_{\max}$. Погрешность в затухании флуктуации продольной скорости является наибольшей. Результаты расчета свидетельствуют о росте этой величины на 35% (по отношению к исходным значениям при $z/D = 3$), который не наблюдается в эксперименте.

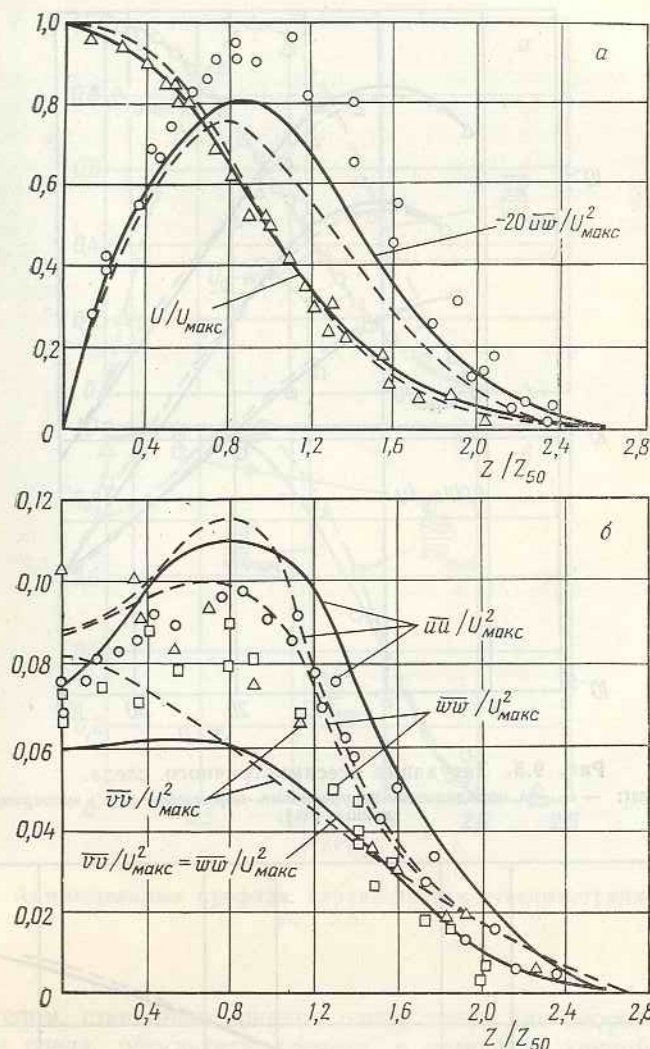


Рис. 9.4. Автомодельные профили в плоском следе.

— предлагаемая модель; — — — модель Ламли и Хайе-Нури [18]; $\circ \Delta$ экспериментальные данные [42].

На рис. 9.6 показан эффект утолщения следа, измеряемый радиусом, на котором средняя скорость уменьшается на половину своего максимального значения. Согласие с экспериментальными данными является хорошим. Хотя Чеври аппроксимировал свои экспериментальные данные, полученные на расстоянии 18 диамет-

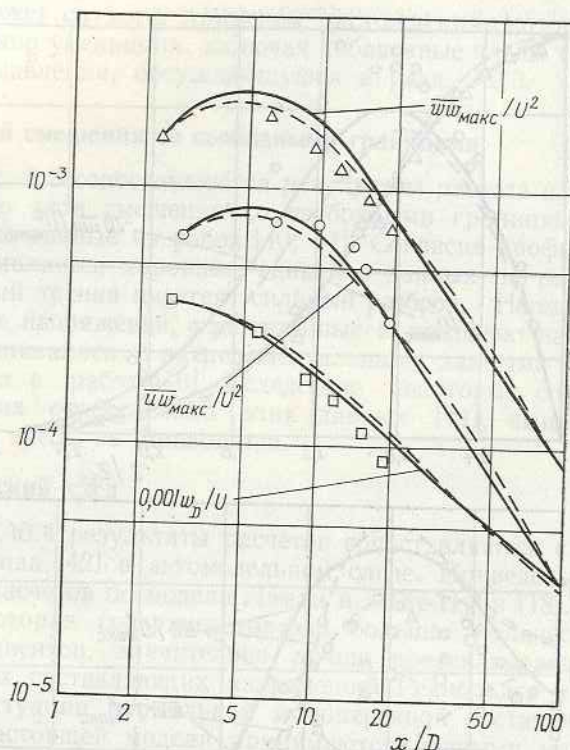


Рис. 9.5. Затухание осесимметричного следа.

— $\lambda = \text{const}$; --- λ определяется из уравнения переноса; $\triangle \square$ экспериментальные данные [44].

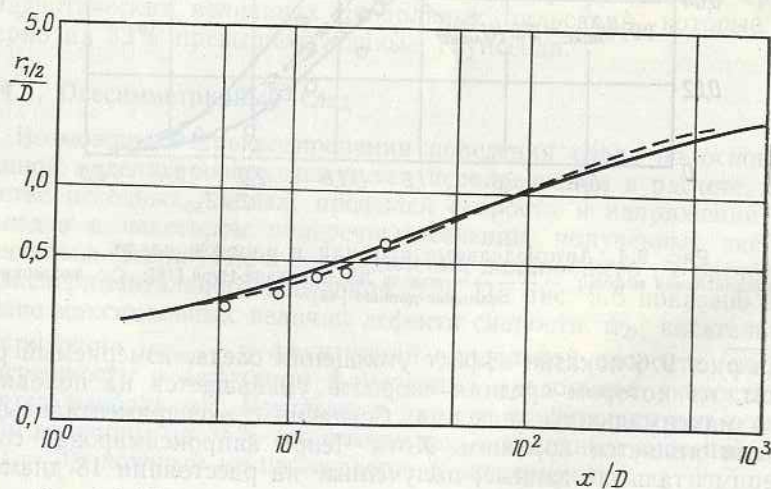


Рис. 9.6. Увеличение радиуса осесимметричного следа рис. 9.5.

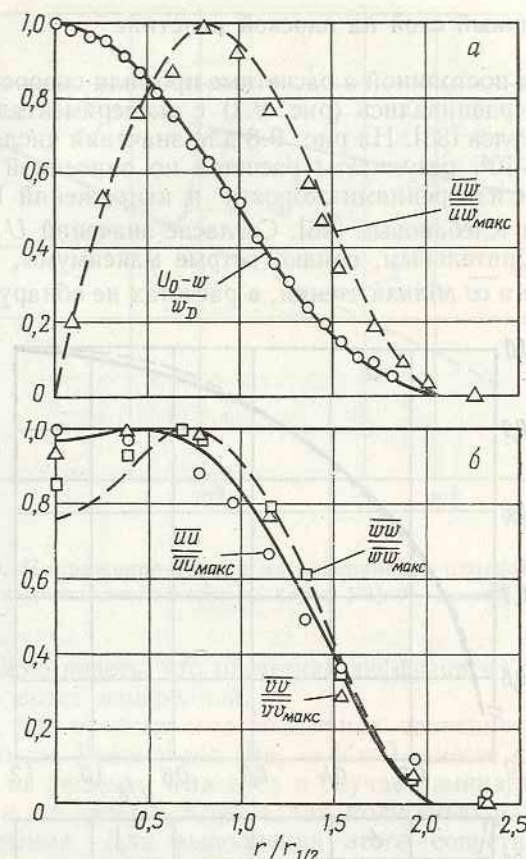


Рис. 9.7. Автомоделные профили характеристик осесимметричного следа рис. 9.5.

ров за телом, степенным законом одной трети для скорости роста толщины следа, результаты расчета с помощью данной модели показывают, что для достижения автомоделного решения необходимо расстояние, примерно равное 100 диаметрам. На рис. 9.7, а и б результаты расчетов по рассматриваемой модели в области автомоделности сопоставляются с экспериментальными данными.

Кроме того, было проведено сравнение результатов расчета [22] с экспериментальными данными Нодашера [45] для следа с нулевым суммарным импульсом; результаты этого сравнения аналогичны полученным выше при рассмотрении данных Чеври. Автомоделного решения в этом случае не существует.

9.4.5. Пограничный слой на плоской пластине

Для выбора постоянной α расчетные профили скорости в окрестности стенки сравнивались (рис. 9.1) с экспериментальным законом стенки Коулса [33]. На рис. 9.8 для значения числа Рейнольдса, равного $5 \cdot 10^6$, результаты расчетов по описанной модели сопоставляются с измерениями скорости и напряжений Рейнольдса, выполненными Клебановым [46]. Согласие значений U и $\overline{uw}$ является удовлетворительным, однако острые максимумы, измеренные в профилях $\overline{ui}$ и $\overline{v^2}$ вблизи стенки, в расчетах не обнаружены. Кро-

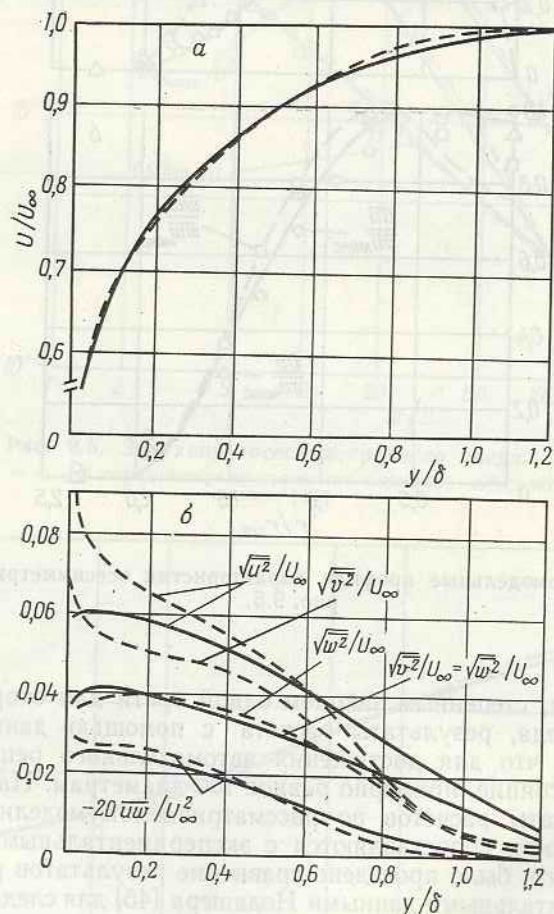


Рис. 9.8. Автомоделные профили характеристик течения в пограничном слое на плоской пластине.

— предлагаемая модель; — — — — экспериментальные данные [46].

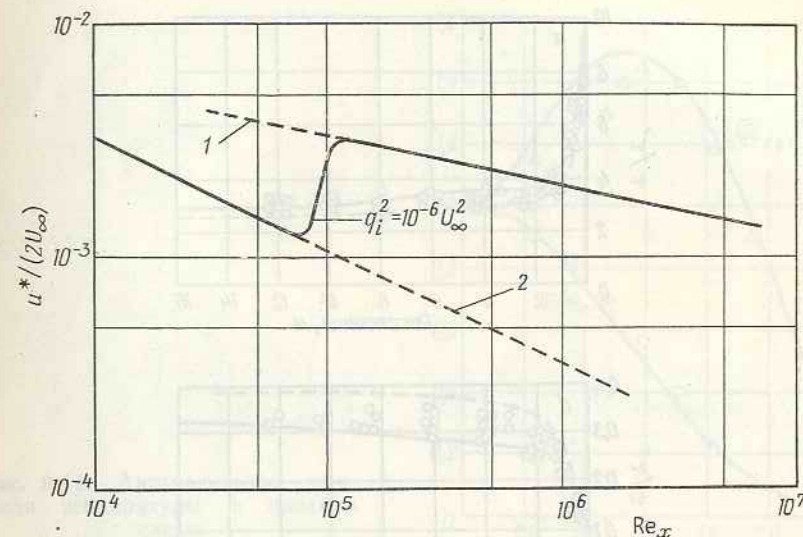


Рис. 9.9. Напряжение трения на поверхности плоской пластины. 1 — корреляционная зависимость Коулса [33]; 2 — решение Блазиуса.

ме того, можно видеть, что расчетная диффузия во внешней области заметно выше измеренной.

На рис. 9.9 представлена модельная зависимость трения на стенке от числа Рейнольдса ($Re_x = Ux/\nu$) вместе с кривыми, полученными из решения Блазиуса в случае ламинарного пограничного слоя и из данных Коулса для полностью развитого турбулентного течения. Для выполнения этого сопоставления расчет начинался с ламинарного профиля скорости при относительно низких значениях Re_x . Предполагалось, что все турбулентные корреляционные функции в начальном сечении равняются нулю, за исключением малого возмущения турбулентной кинетической энергии. Оказалось, что с помощью данной модели можно получить заслуживающие доверия результаты расчета перехода.

9.4.6. Течение на участке с резким изменением шероховатости поверхности

Были выполнены расчеты с целью моделирования в приземном слое атмосферы результатов измерений Брэдли [47], который регистрировал скорости и напряжения трения в малоисследованных воздушных течениях в Австралии. На рис. 9.10 показаны характеристики течения в области перехода от грубой поверхности к гладкой, и наоборот, причем шероховатость определяется, как в

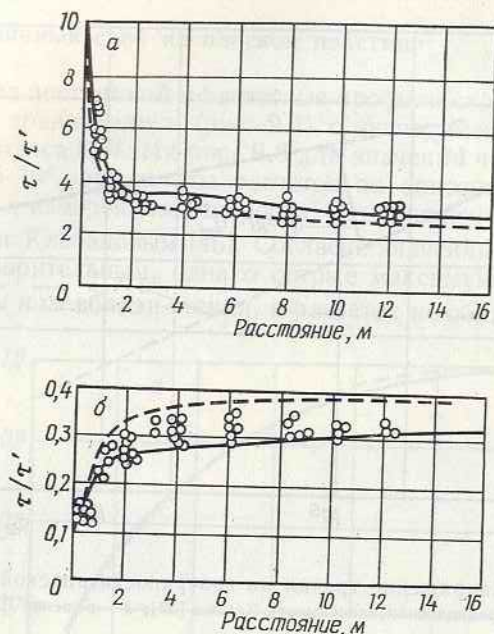


Рис. 9.10. Напряжения Рейнольдса в области ступенчатого изменения шероховатости поверхности.

— предлагаемая модель; — — — модель Рао и др. [48]; ○ экспериментальные данные [47].
а — переход от гладкой поверхности к шероховатой, $z_0' = 0,002$ см, $z_0 = 0,25$ см; б — переход от шероховатой поверхности к гладкой, $z_0' = 0,25$ см, $z_0 = 0,002$ см.

аэродинамических расчетах z_0 . Расчеты [28] начинались с профилей скорости и характеристик турбулентности в равновесных условиях при определенном значении z_0 . В точке $x = 0$ граничные условия изменялись в соответствии с новым значением z_0 . Когда оба расчета продолжались далеко вниз по потоку, турбулентное течение снова становилось равновесным при соответствующем значении z_0 . На рис. 9.10 также представлены результаты расчетов Рао и др. [48], в которых использовалась схема замыкания второго порядка, описанная в работе [38].

9.4.7. Флуктуации температуры в плоском турбулентном следе

Измерения в следе за нагретым цилиндром проводили Фреймут и Уберой [49], а также Лару и Либби [50]. На рис. 9.11 сопоставляются экспериментальные нормированные распределения средней температуры и среднеквадратических флуктуаций температуры с автомодельными профилями аналогичных величин, рассчитан-

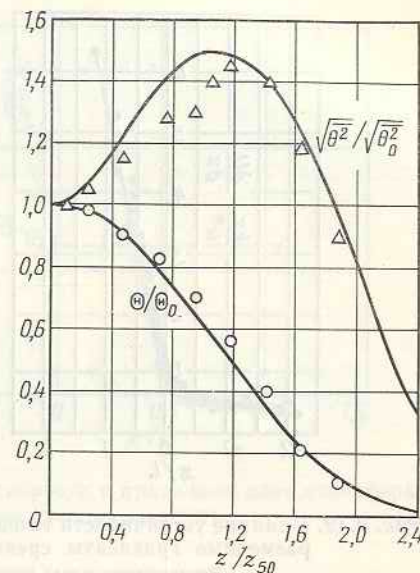


Рис. 9.11. Автомодельные профили температуры в плоском следе.

— предлагаемая модель; ○△ экспериментальные данные [50].

ными при помощи данной модели. Длина z_{50} , используемая при нормировании, определяется по профилю средней скорости, представленному на рис. 9.4. Согласие с экспериментом весьма хорошее, особенно в значениях величины и положения максимума флуктуаций температуры.

9.4.8. Влияние устойчивости на течение в приземном слое атмосферы

Приземный слой атмосферы, простирающийся на несколько десятков метров от земной поверхности, может служить примером турбулентного сдвигового течения, характеристики которого, включая влияние стратификации атмосферы на динамику турбулентности, изучались наиболее интенсивно. Следуя Монину и Обухову [51], удалось достичь значительных успехов в экспериментальном определении автомодельных законов, которые описывают зависимость осредненных характеристик турбулентности от высоты, напряжения трения и теплового потока. В этом слое напряжение трения и тепловой поток можно считать постоянными. Из определяющих это течение констант переноса можно построить характеристическую постоянную, имеющую размерность длины:

$$L = - \frac{\theta u_*^3}{kgw_0}$$

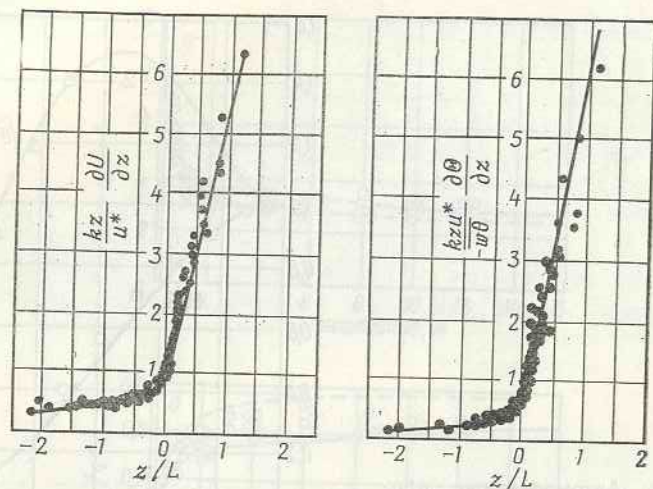


Рис. 9.12. Влияние устойчивости течения в приземном слое атмосферы на безразмерные градиенты средней скорости и температуры. Экспериментальные данные Бузингера и др. [31].

Это так называемый масштаб Монина—Обухова. На высотах, выше которых вызванные вращением земли силы Кориолиса приводят к возникновению некоторых поперечных течений и ниже которых становится важным вклад вязкости в процесс переноса импульса, безразмерные характеристики турбулентности для стационарного однородного слоя зависят только от единственной переменной z/L . Левеллен и Теске [36] для этого случая проинтегрировали уравнения (9.23) — (9.25). На рис. 9.12 результаты расчетов градиентов безразмерных ветрового и температурного профилей сопоставляются с измерениями в атмосфере.

В этих расчетах масштаб длины брался равным $0,6z$, а верхняя граница в устойчивом течении располагалась на расстоянии $0,20L$. Такой выбор приводит к экспериментально полученному критическому значению числа Ричардсона, равному $0,21$. Это означает, что каким бы путем течение ни достигало устойчивости при больших z/L , Ri никогда не превышает $0,21$. Это предельное значение также использовалось для определения коэффициента члена, характеризующего действие архимедовой силы, в уравнении переноса масштаба турбулентности из разд. 9.3.3.

Результаты расчета среднеквадратической величины флуктуаций вертикальной скорости и температуры сопоставляются на рис. 9.13 и 9.14 с экспериментальными данными Уингарда и др. [52]. Флуктуации вертикальной скорости согласуются вполне удовлетворительно, что же касается флуктуаций температуры, то их

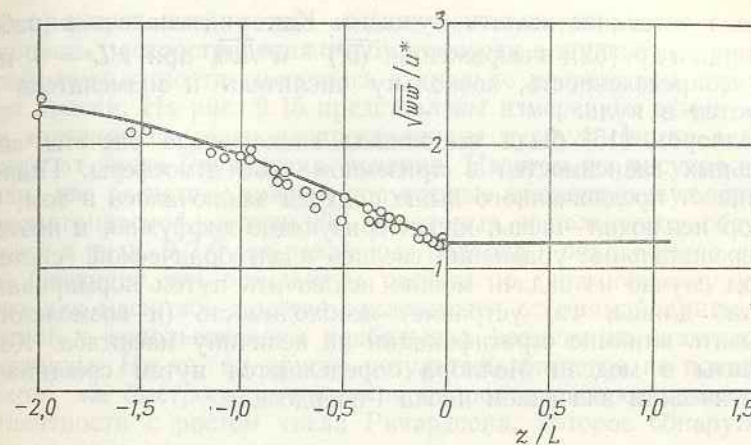


Рис. 9.13. Флуктуации вертикальной скорости в приземном слое атмосферы. Экспериментальные данные Уингарда и др. [52].

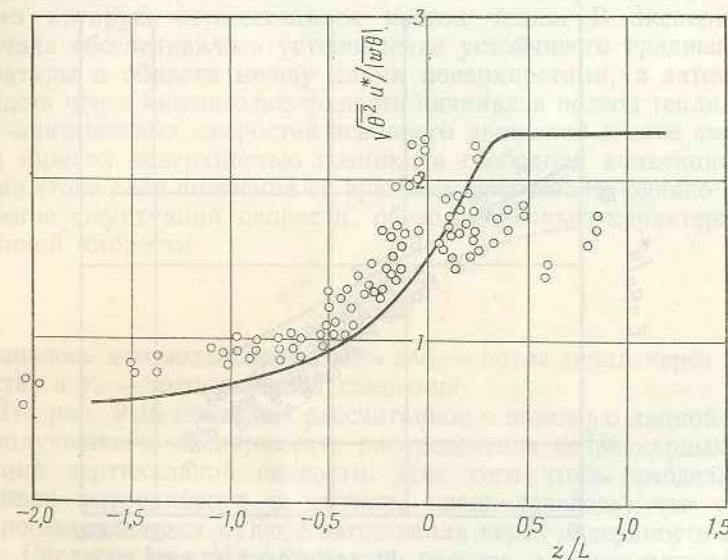


Рис. 9.14. Флуктуации температуры в приземном слое атмосферы. Экспериментальные данные Уингарда и др. [52].

согласие оставляет желать лучшего. Как указывалось в работе Уингарда и др. [52], в выражении $(\bar{\theta}^2)^{1/2} u^*/\omega\theta$ при $z/L = 0$ имеется неопределенность, поскольку числитель и знаменатель обращаются в нуль.

Меллором [15] были выполнены аналогичные расчеты авто-модельных зависимостей в приземном слое атмосферы. Главное отличие от предложенного выше подхода заключалось в том, что Меллор исключил члены, характеризующие диффузию, и поэтому дифференциальные уравнения свелись к алгебраической системе. В этом случае из задачи можно исключить путем нормирования масштаб длины, что устраняет необходимость (и возможность) учитывать влияние стратификации на величину масштаба. Коэффициенты в модели Меллора определяются путем сращения с критическим значением числа Ричардсона.

9.4.9. Слой смешения в пространстве, заполненном стратифицированной жидкостью

Като и Филлипс [53] исследовали распространение турбулентности в кольцевой емкости, заполненной стратифицированной жидкостью, на внутренней поверхности которой с помощью экрана

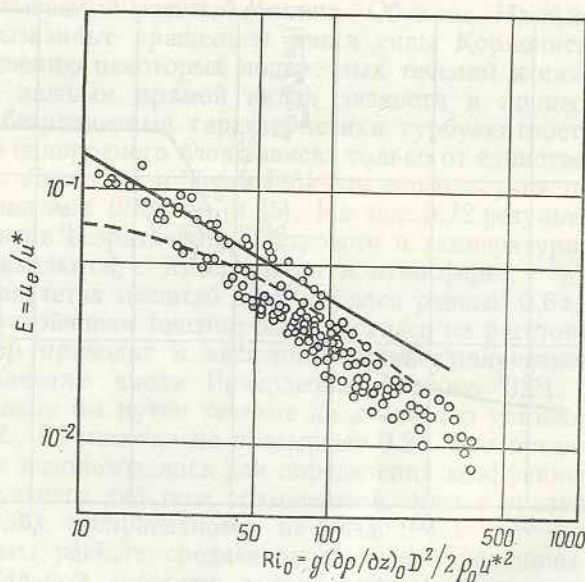


Рис. 9.15. Слой смешения в стратифицированной жидкости.

— $A = cr^*$ (r^* — поперечный размер области турбулентного течения); - - - A определяется из уравнения переноса; $\circ$ экспериментальные данные [53].

из прямоугольной сетки создавалось касательное напряжение. Скорость распространения турбулентности в жидкости с линейным профилем плотности измерялась визуальным способом впрыскивания краски. На рис. 9.15 представлены измеренные этими авторами значения скорости распространения турбулентности в зависимости от числа Ричардсона течения. На этом же рисунке изображены две расчетные кривые, полученные с помощью двух вариантов рассматриваемой модели [29], в которых используются обсуждавшиеся в разд. 9.2.6 два различных подхода к определению масштаба. Очевидно, что результаты расчета по динамическому уравнению для масштаба заметно отклоняются от прямой линии, полученной с использованием наибольших возможных значений этой величины. Ни те, ни другие результаты расчетов не показывают такого же быстрого уменьшения скорости распространения турбулентности с ростом числа Ричардсона, которое обнаруживают экспериментальные данные.

9.4.10. Свободная конвекция

Уиллис и Дирдорф [54] измеряли флуктуации скорости и температуры в неустойчивом слое, ограниченном сверху жидкостью с устойчивым градиентом плотности, а снизу — поверхностью, через которую осуществлялся подвод тепла. В экспериментах сначала обеспечивалось установление устойчивого градиента температуры в области между двумя поверхностями, а затем в эту область через нижнюю поверхность начинался подвод тепла. В случае минимальных скоростей основного движения в слое смешения над нижней поверхностью возникала свободная конвекция. Толщина этого слоя смешения со временем возрастала, однако распределение флуктуаций скорости, обезразмеренных характерной величиной скорости

$$w^* = \left(\frac{g \bar{\omega}_0 z_i}{\theta} \right)^{1/3},$$

оставалось автомодельным. Здесь $\bar{\omega}_0$ — поток тепла через поверхность, а z_i — толщина слоя смешения.

На рис. 9.16 показаны рассчитанные с помощью данной модели и полученное в эксперименте распределения безразмерных флуктуаций вертикальной скорости. Для того чтобы смоделировать условия эксперимента в расчете, предполагалось, что средняя скорость равняется нулю, а поток тепла через поверхность постоянен. Согласие между результатами расчета и экспериментальными данными является обнадеживающим, особенно потому, что никакой подгонки значений постоянных не использовалось.

На рис. 9.17 представлены распределения флуктуаций горизонтальной скорости. Здесь результаты расчета не так хорошо со-

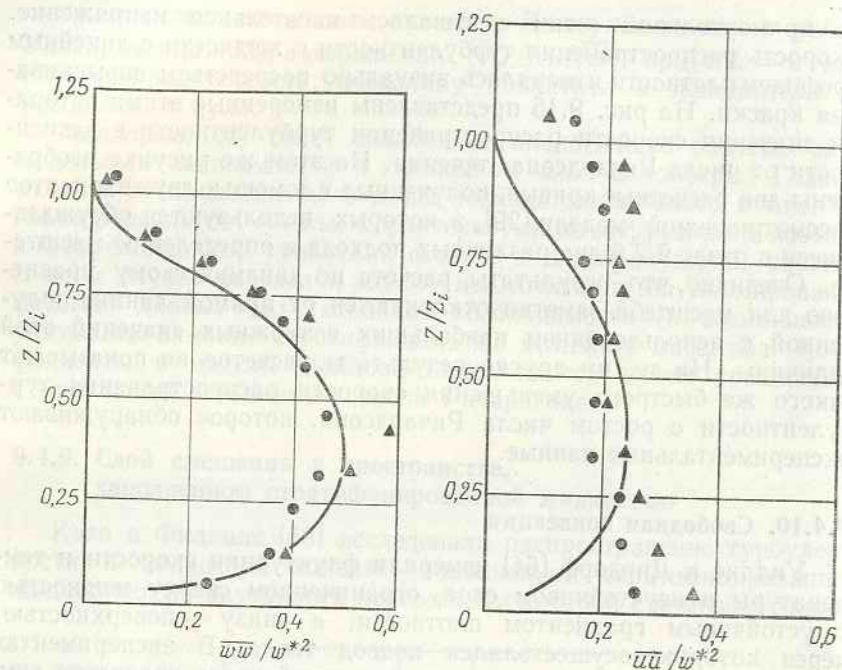


Рис. 9.16. Автомоделный профиль флуктуаций вертикальной скорости в неустойчивом слое смешения.

Экспериментальные данные Уиллиса и Дирдорфа [54].

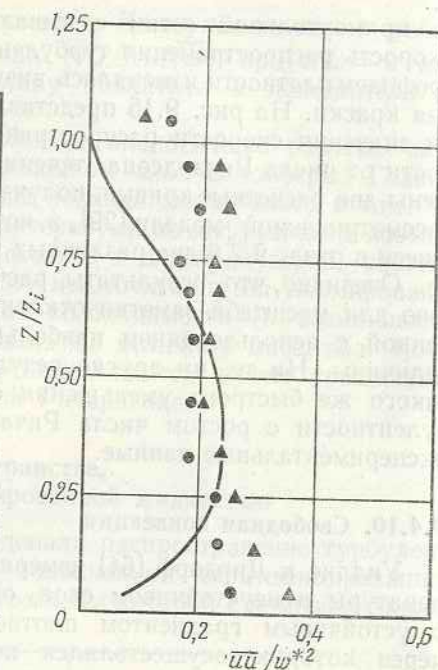


Рис. 9.17. Автомоделный профиль флуктуаций горизонтальной скорости для условий рис. 9.16.

гласуются с экспериментальными данными, поскольку измерения свидетельствуют о существовании максимума в окрестности нижней поверхности, а результаты расчета этого не показывают. Распределения флуктуаций температуры представлены на рис. 9.18. Согласие между результатами расчета и экспериментальными данными является очень хорошим, за исключением верхней части слоя смешения, где экспериментальные данные указывают на существование гораздо более острого максимума, чем получаемый в расчете. Причиной этого могут быть инерционные колебания, имеющие место в данной области. В целом же согласие результатов расчета по разработанной выше модели и экспериментальных данных можно признать вполне удовлетворительным.

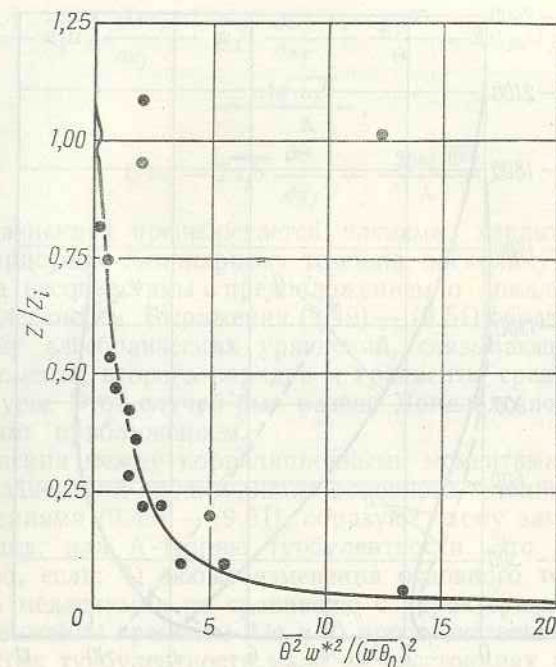


Рис. 9.18. Автомоделный профиль флуктуаций температуры для условий рис. 9.16.

9.4.11. Планетарный пограничный слой в нейтрально устойчивом состоянии

На рис. 9.19 приведены зависимости средней скорости и составляющих тензора напряжений Рейнольдса от высоты, полученные для атмосферного слоя Экмана. Эти распределения сопоставляются с осредненными по ансамблю величинами, полученными Дирдорфом [55] путем интегрирования на сетке с заданным шагом нестационарных уравнений переноса для пульсационных характеристик турбулентности. Распределения средней скорости хорошо согласуются между собой. Значение трения на поверхности ($u^*/U_g = 0,036$) лежит в пределах разброса экспериментальных данных при тех же самых числах Росби. Величина q на поверхности на 14% меньше значения, полученного Дирдорфом для той же самой величины u^* . Большая часть этого расхождения приходится на флуктуации поперечной составляющей скорости. Этот факт указывает на необходимость более точного моделирования членов с корреляциями давления. Кроме того, оказалось, что на точность ре-

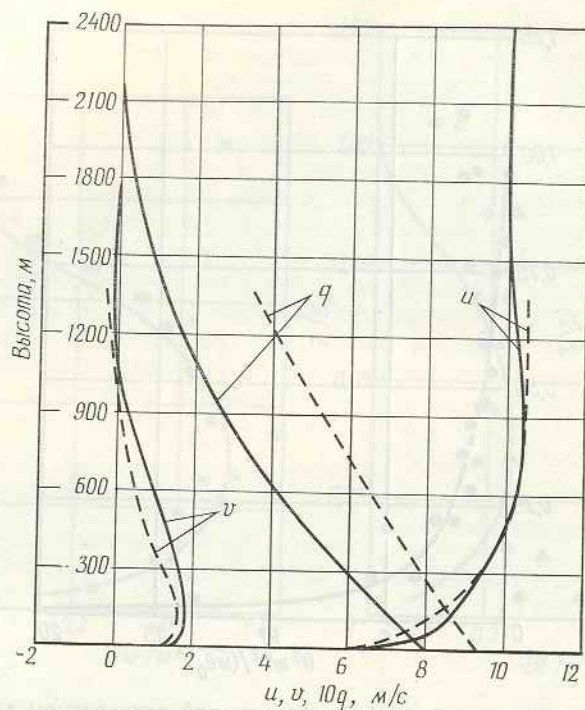


Рис. 9.19. Профили характеристик течения в стационарном приземном слое атмосферы.

— предлагаемая модель; — — — модель Дирдорфа [55].

зультатов Дирдорфа вблизи верхней границы пограничного слоя влияет выбор им малого фиксированного значения толщины пограничного слоя.

9.5. ЛОКАЛЬНО РАВНОВЕСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Если предполагается, что корреляционные моменты второго порядка находятся в локальном равновесии, т. е. не меняются во времени или в пространстве, то уравнения (9.23) — (9.25) принимают следующий вид:

$$0 = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{g_i \overline{u_j \theta}}{\Theta} + \frac{g_j \overline{u_i \theta}}{\Theta} - 2\varepsilon_{ikh} \Omega_k \overline{u_i u_j} - 2\varepsilon_{jkh} \Omega_k \overline{u_k u_i} - \frac{q}{\Lambda} \left(\overline{u_i u_j} - \delta_{ij} \frac{q^2}{3} \right) - \delta_{ij} \frac{2bq^3}{3\Lambda}, \quad (9.49)$$

$$0 = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \overline{u_j \theta} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{g_i \overline{\theta^2}}{\Theta} - 2\varepsilon_{ijk} \Omega_j \overline{u_k \theta} - \frac{\Lambda q \overline{u_i \theta}}{\Lambda}, \quad (9.50)$$

$$0 = -2\overline{u_j \theta} \frac{\partial \Theta}{\partial x_j} - \frac{2bsq \overline{\theta^2}}{\Lambda}. \quad (9.51)$$

В этих уравнениях пренебрегается членами, характеризующими эффекты, присущие ламинарному течению, поскольку малые числа Рейнольдса несовместимы с предположением о локально равновесной турбулентности. Выражения (9.49) — (9.51) образуют замкнутую систему алгебраических уравнений, связывающих корреляционные моменты второго порядка и градиенты средней скорости и температуры. Этот случай был назван Дональдсоном [6] «сверхравновесным» приближением.

Соотношения между корреляционными моментами второго порядка и градиентами характеристик основного течения, определяемые уравнениями (9.49) — (9.51), образуют схему замыкания первого порядка, или K -теорию турбулентности. Это приближение справедливо, если: 1) любые изменения основного течения являются очень медленными по сравнению с характерным для турбулентного движения временем Λ/q и 2) пространственное изменение характеристик турбулентности мало на расстояниях порядка масштаба Λ . Необходимо отметить, что оба условия удовлетворяются вместе очень редко, так как величина Λ обычно определяется пространственными изменениями течения. Специфической областью, в которой оба условия удовлетворяются, является область пограничного слоя с постоянным потоком импульса, где отношение Λ/q близко к нулю.

Функциональная зависимость корреляционных моментов от градиентов основного течения, получаемая из уравнений (9.49) — (9.51) при $U_i = [U(z), 0, 0]$, $g_i = (0, 0, -g)$ и $\Theta = \Theta(z)$, показана на рис. 9.20. Единственной независимой переменной в этом случае является число Ричардсона основного течения

$$Ri = \frac{g}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \left/ \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right.$$

Здесь достигается критическое значение числа Ричардсона, выше которого турбулентность существовать не может. Это критическое значение, показанное на рис. 9.20 и равное 0,56, превышает значение 0,21, измеренное в приземном слое атмосферы Бузингером и др. [31] и упоминавшееся в разд. 9.4. Однако при изменении устойчивости с высотой в этом приземном слое менялись и корреляции турбулентных характеристик, в связи с чем можно ожидать, что диффузионные члены оказывают некоторое влияние на критическое значение числа Ричардсона.

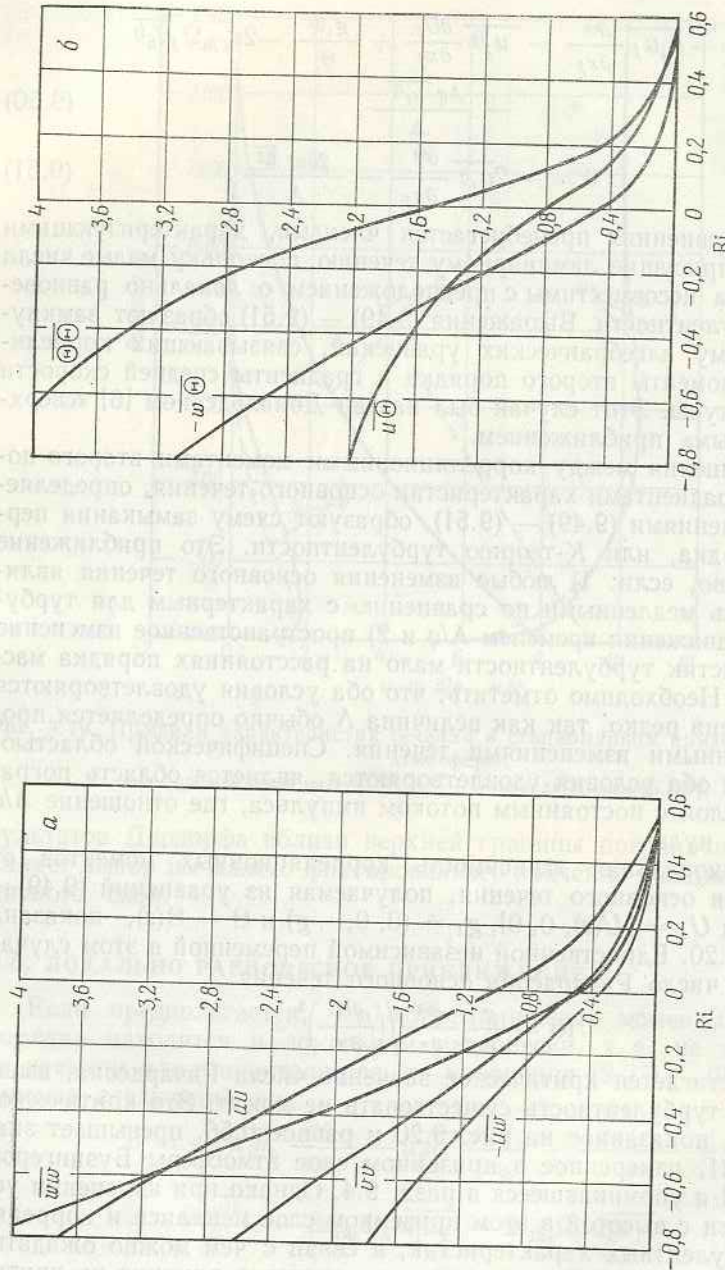


Рис. 9.20. Профили характеристик локально равновесного течения, полученные с помощью сверхравновесного подхода. а — профили составляющих тензора напряжений Рейнольдса, обезразмеренные на $\Delta^2 (\partial U / \partial z)^2$; б — профили корреляций температуры, обезразмеренные на $\Delta^2 (\partial \theta / \partial z) (\partial U / \partial z)$.

Сверхравновесное приближение рассчитывалось также для вихревых течений с постоянной плотностью, рассматривавшихся в работах [55—58]. В этом случае существует как нижняя, так и верхняя границы изменения характеристик вращения, между которыми может существовать турбулентность.

Другие подходы к уравнениям (9.23) — (9.25) заключаются в попытках упростить эти уравнения с использованием соотношений (9.49) — (9.51). Меллор и Ямада [25] разработали четыре приближения разной степени точности. Нами также достигнуты некоторые успехи с приближением, в котором используется уравнение энергии и которое было названо квазиравновесным [23, 29]. Это приближение заключалось в использовании полного уравнения энергии (9.23) и применении соотношений (9.49) — (9.51) для того, чтобы связать корреляции отдельных турбулентных характеристик с q^2 . Этот подход, по-видимому, значительно более точен, поскольку он учитывает в уравнении переноса турбулентной энергии полное изменение во времени и диффузию в пространстве. Однако в этом приближении нельзя точно рассчитать течения, в которых осуществляется перенос какой-либо величины в направлении, противоположном ее градиенту.

9.6. РЕЗУЛЬТАТЫ ПРИМЕНЕНИЯ

Можно считать, что выполненная в разд. 9.4 проверка данной модели имеющимися экспериментальными данными является достаточно надежной для того, чтобы оправдать подробные расчеты течений в условиях, для которых детальные экспериментальные данные отсутствуют. Здесь представлены некоторые интересные результаты такого применения. Кроме того, обнадеживающие результаты были получены и при применении данной модели к другим задачам, включая задачи о пограничных слоях [59] и слоях смещения [60, 61] в сжимаемом газе, об изолированном пространственном вихре [62], о следах [63] и струях [64] с химическими реакциями, о вращающихся течениях в кольцевых областях [65], а также о распределении влажности в приземном слое атмосферы.

9.6.1. Суточные изменения в приземном слое атмосферы

Характеристики атмосферного пограничного слоя над однородными участками земной поверхности можно рассматривать как функции только времени и высоты. Результаты расчетов для постоянного геострофического ветра и фиксированного верхнего предела скорости падения температуры при циклическом изменении теплоотдачи земной поверхности, соответствующем летним условиям на равнинах Среднего Запада США [66], представлены в работе [23]. Эти результаты были получены с помощью квази-

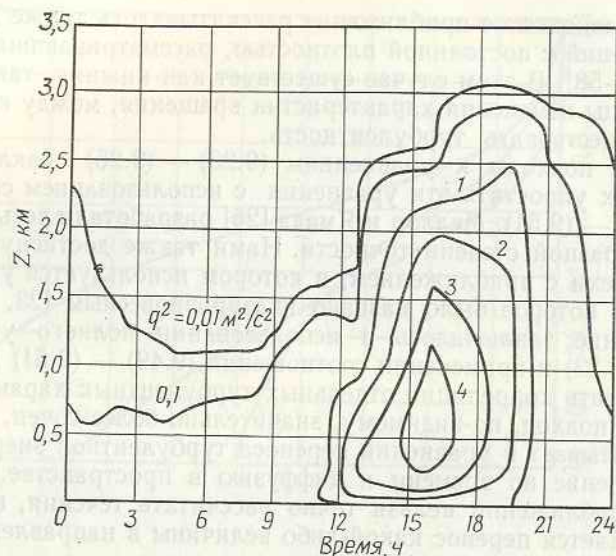


Рис. 9.21. Линии постоянных значений турбулентной кинетической энергии при суточных изменениях в приземном слое атмосферы.

равновесного подхода, описанного в разд. 9.5.2, а также с использованием в качестве масштаба турбулентности максимально возможного его значения. Представленные здесь данные были получены из полных уравнений. Результаты расчетов различаются сравнительно мало.

На рис. 9.21 показаны расчетные кривые постоянных значений пульсационных характеристик турбулентности в зависимости от времени и высоты. Толщина атмосферного пограничного слоя растет в дневное время и уменьшается в течение вечерних и утренних часов. Величина турбулентной кинетической энергии достигает максимума, равного 4,8% от среднего геострофического уровня кинетической энергии, в окрестности 16 ч на высоте приблизительно 500 м. После захода солнца степень турбулентности начинает уменьшаться и в ранние утренние часы максимальный уровень турбулентной кинетической энергии составляет всего лишь примерно 0,25% кинетической энергии основного течения. Самое большое различие между представленными здесь результатами и данными работы [23] приходится на ранние утренние часы. Решение полных уравнений с масштабом, определяемым динамическим уравнением, дает более медленное затухание величины q^2 , и, следовательно, значительно большие значения q^2 в утренние часы в диапазоне высот от 100 м до 1 км. Но даже эти большие значения существенно меньше величин, получаемых для послеполюденных

часов. Обе модели позволяют предсказать такие особенности, как инверсия температуры и локальные ветровые струи, наблюдаемые на малых высотах в ночное время.

На рис. 9.22 изображена кривая динамической скорости в зависимости от параметра xu^*/fL , характеризующего устойчивость. Там же нанесены взятые из обзора Теннеке [67] экспериментальные точки при $Ro \approx 10^7$. Рассчитанная с помощью данной модели кривая имеет вид гистерезисной петли, для которой значения трения на поверхности при уменьшении теплоотдачи земли существенно больше, чем при возрастании. Экспериментальные данные имеют довольно значительный разброс, но расположены все-таки ближе к верхней кривой. Отличие в 2 раза значений u^* в нейтральных условиях демонстрирует влияние нестационарной динамики на характеристики приземного слоя атмосферы.

9.6.2. Стратифицированный след

При прохождении тела через стратифицированную жидкость образуется турбулентный след, в котором имеется как кинетическая энергия, так и потенциальная. Наличие потенциальной энер-

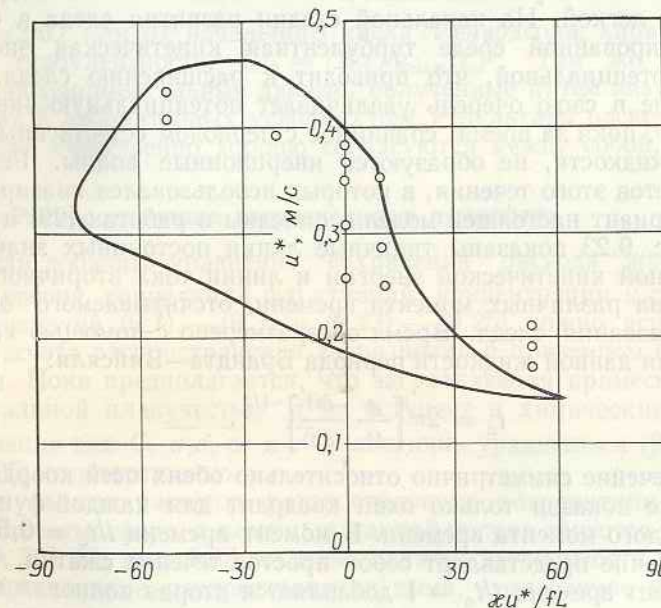


Рис. 9.22. Зависимость динамической скорости от параметра, характеризующего устойчивость, при суточных изменениях в приземном слое атмосферы. Экспериментальные данные Теннеке [67].

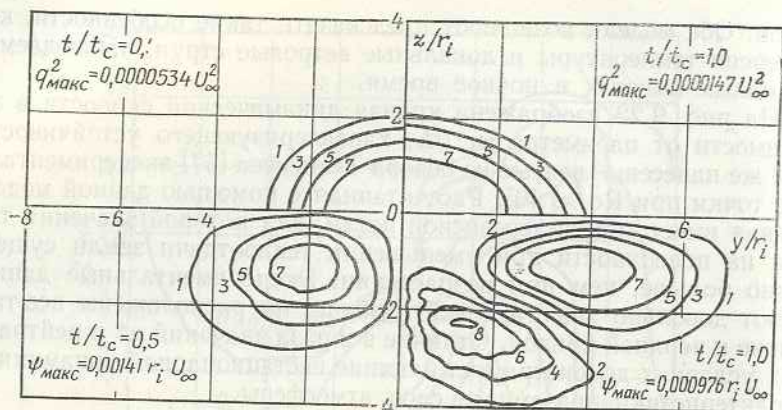


Рис. 9.23. Линии постоянных значений энергии турбулентности и линии тока вторичного течения в два различных момента времени после образования следа при $Ri_0 = 0,00925$.

r_i — начальный размер области турбулентного течения; 1 — +10% от максимального значения для этого квадранта; 2 — —10%; 3 — +30%; 4 — —30% и т. д.

гии обусловлено перемешиванием и появлением тяжелой жидкости над более легкой. На начальной стадии развития следа в слабо стратифицированной среде турбулентная кинетическая энергия больше потенциальной, что приводит к расширению следа. Это расширение в свою очередь увеличивает потенциальную энергию до тех пор, пока за время, сравнимое с периодом естественных колебаний жидкости, не образуются инерционные волны. Результаты расчетов этого течения, в которых использовался квазиравновесный вариант настоящей модели, описаны в работах [29] и [68].

На рис. 9.23 показаны типичные линии постоянных значений турбулентной кинетической энергии и линии тока вторичного течения в два различных момента времени, отсчитываемого от начала образования следа. Время обезразмерено с помощью характерного для данной жидкости периода Брандта—Вяйсяля:

$$t_c = 2\pi \left[\frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]^{-1/2}.$$

Так как течение симметрично относительно обеих осей координат, на рисунке показан только один квадрант для каждой функции и для каждого момента времени. В момент времени $t/t_c = 0,5$ вторичное течение представляет собой простое течение сжатия, тогда как в момент времени $t/t_c = 1$ добавляется вторая волновая мода. В оба момента времени вторичное течение распространяется далеко от области турбулентного течения.

На рис. 9.24 изображено семейство кривых, показывающих зависимость формы следа от числа Фруда исходного течения $F_D =$

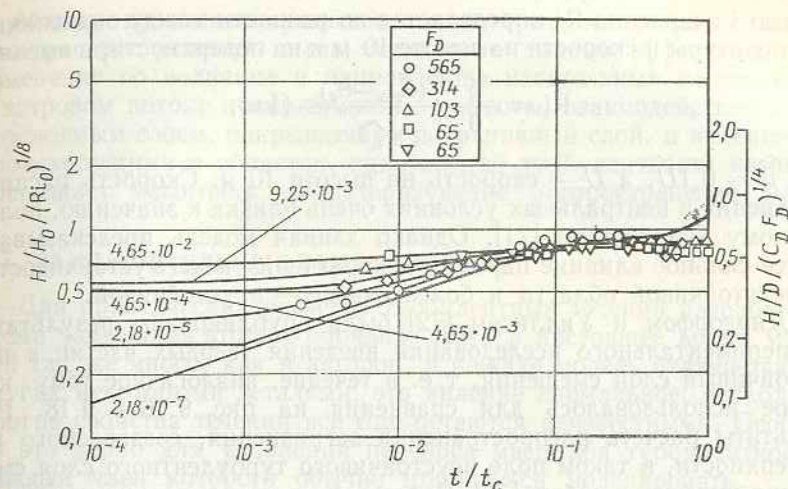


Рис. 9.24. Поперечный размер следа в стратифицированной жидкости. Экспериментальные данные работы [69].

$= Ut_c/2\pi D$ или от начального числа Ричардсона, характеризующего турбулентность, $Ri_0 = (2\pi r_i/q_{\max} t_c)^2$. Там же представлены экспериментальные данные, полученные путем визуализации течений в лабораторных условиях [69]. Результаты расчетов и наблюдений качественно хорошо согласуются между собой.

9.6.3. Распространение загрязнения в атмосфере

Если добавить уравнение сохранения расхода примеси $\overline{C}$ и уравнения корреляций флуктуаций концентрации $\overline{u_i c}$, $\overline{c c}$ и $\overline{c \theta}$, то уравнения (9.1) — (9.3) и (9.23) — (9.25) можно использовать для расчета распространения загрязнения в приземном слое атмосферы. Пока предполагается, что загрязняющая примесь обладает нейтральной плавучестью и не вступает в химические реакции, уравнения для $\overline{C}$, $\overline{u_i c}$, $\overline{c c}$ и $\overline{c \theta}$ аналогичны уравнениям (9.3), (9.24) и (9.25) соответственно.

Результаты расчетов распространения загрязнения в турбулентной атмосфере с помощью данной модели имеются в работах [6, 28, 70]. На рис. 9.25 показано влияние устойчивости атмосферы на вертикальное распространение дыма, создаваемое от поверхности земли,

$$\sigma_z^2 = \int_0^\infty (Cz^2) dz / \int_0^\infty C dz.$$

Число Ричардсона $\hat{Ri}$ определяется по разности между значениями температуры и скорости на высоте 10 м и на поверхности, а именно:

$$\hat{Ri} = \frac{g}{\theta} \frac{(\theta_{10\text{м}} - \theta_0)}{\hat{u}^2} (1\text{ м}),$$

где $\hat{u} = 0,1U$, а U — скорость на высоте 10 м. Скорость распространения в нейтральных условиях очень близка к значению, полученному Пасквиллом [71]. Однако данная модель предсказывает более сильное влияние параметра, характеризующего устойчивость, в неустойчивой области и более слабое — в устойчивой.

Дирдорфом и Уиллисом [72] были опубликованы результаты экспериментального исследования введения твердых частиц в неустойчивый слой смешения, т. е. в течение, аналогичное тому, которое использовалось для сравнения на рис. 9.16 — 9.18. Результаты расчета распространения загрязнения, создаваемого на поверхности, в таком поле неустойчивого турбулентного слоя смешения имеются в работе [70]. Результаты расчетов сравнимы с представленными экспериментальными данными и показывают, что положение максимума концентрации примеси будет подниматься над поверхностью. Как указывалось в работе [72], это свойство нельзя выявить с помощью какой-либо модели турбулентной вязкости или моделей, в которых дым имеет гауссовское распределение.

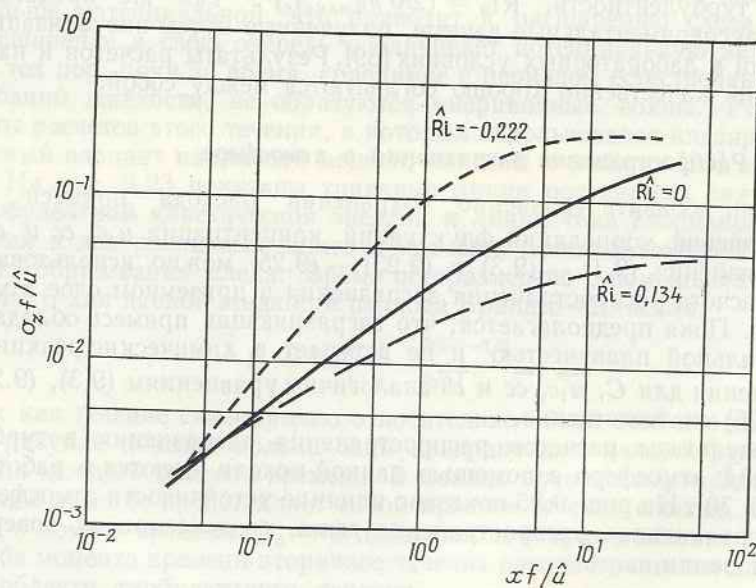


Рис. 9.25. Распространение по вертикали дыма, образующегося на уровне земли, в приземных слоях атмосферы различной устойчивости.

Модель позволяет предсказать некоторые негауссовские свойства распространения дыма, вызванные такими эффектами, как изменение по величине и направлению касательных напряжений в ветровом потоке в зависимости от высоты, взаимодействие с инверсионным слоем, покрывающим пограничный слой, и явлениями, происходящими в областях, где масштаб турбулентности намного превышает масштабы, характеризующие распространение дыма.

9.7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Для практических расчетов турбулентных течений разработана схема замыкания второго порядка. Хотя в настоящее время моделей так же много, как и авторов, и каждая модель отличается от других некоторыми деталями, это явление нормальное, поскольку многие свойства течений все еще остаются неизвестными. Особенно это верно для уравнения переноса масштаба турбулентности, каждый член которого обычно приходится моделировать.

Представленная в настоящей главе относительно простая модель обеспечивает довольно точные результаты расчетов широкого класса течений. Поэтому практические расчеты могут продолжаться одновременно с попытками усовершенствования этой модели.

ОТ АВТОРА

Этот обзор частично финансировался Федеральным фондом Агентства по защите окружающей среды по контракту № ЕРА 68-02-1310. Содержание данной главы не обязательно отражает взгляды и политику Агентства по защите окружающей среды США; в ней не приводятся торговые марки и названия коммерческих продуктов или организаций, связанные с контрактами правительства Соединенных Штатов.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A — коэффициент;
- a, b, c — постоянные (с индексами);
- D_{ij} — функция, характеризующая диффузию [уравнение (9.18)];
- E — энергетический спектр;
- E_θ — спектр дисперсии температуры;
- F_D — число Фруда;
- g_i — вектор ускорения;
- H — толщина следа;
- k — коэффициент теплопроводности;
- L — характерная длина;
- m, n — индексы;

- N — член, характеризующий диссипацию температурных флуктуаций;
 p — пульсации давления;
 P — среднее давление;
 P_{ij} — член, характеризующий генерацию напряжений Рейнольдса;
 Pr_t — турбулентное число Прандтля;
 q — среднеквадратическая величина флуктуаций скорости;
 Re — число Рейнольдса;
 Ri — число Ричардсона;
 Ro — число Росби;
 s — коэффициенты (с индексами);
 t — время;
 u^* — динамическая скорость;
 u_i — флуктуации составляющих скорости;
 U_i — составляющие средней скорости;
 v_c — коэффициент диффузии;
 W_D — максимальное значение дефекта скорости;
 x_i — прямоугольные координаты;
 α — $= 1,68\pi$;
 β — постоянная;
 δ_{ij} — символ Кронекера;
 z — постоянная Кармана;
 λ — микромасштаб Тейлора;
 Λ — макромасштаб турбулентности;
 θ — флуктуация температуры;
 Θ — средняя температура;
 σ_z — вертикальное распространение дыма;
 ν — кинематический коэффициент вязкости;
 ρ — плотность;
 π_{ij} — члены с корреляциями давления в уравнении (9.12);
 Ω — угловая скорость.

ЛИТЕРАТУРА

- Bradshaw P., The understanding and prediction of turbulent flows, *Aeronaut. J.*, 76, 403—418 (1972).
- Mellor G. L., Herring H. J., A survey of the mean turbulent field closure models, *AIAA J.*, 11, 590—599, 1973. [Имеется перевод: Меллор, Херринг. Обзор моделей для замыкания уравнений осредненного турбулентного течения. *Ракетная техника и космонавтика*, 1973, т. 11, № 5, с. 17—29.]
- Reynolds W. C., Computation of turbulent flows — State of the art, 1970, report № MD-27, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California, 1970.
- Harlow F. H. (ed.), Turbulence transport modeling, AIAA Selected Reprints Series, Vol. XIV, American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York, 1973.

- Phillips O. M., The Dynamics of the Upper Ocean, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1969. [Имеется перевод: Филлипс О. М., Динамика верхнего слоя океана. — М.: Мир, 1969.]
- Donaldson C. du P., Atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants, AMS Workshop on Micrometeorology (D. A. Haugen, ed.), Science Press, Boston, 1973, p. 313—390.
- Donaldson C. du P., Calculation of turbulent shear flows for atmospheric and vortex motions, *AIAA J.*, 10, 4—12, 1972. [Имеется перевод: Дональдсон. Расчет турбулентных течений в атмосфере и изолированном вихре. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1972, т. 10 № 1, 4—14.]
- Daly B. J., Harlow F. H., Transport equations in turbulence, *Phys. Fluids*, 13, 2634—2649 (1970).
- Wolfshtein M., Naot D., Lin A., Models of turbulence, Ben-Gurion University of the Negev report № ME-746(N), 1974.
- Rotta J. C., Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz, *Z. Phys.*, 129, 547—572 (1951).
- Rotta J. C., Turbulence Strömungen, Teubner Press, Stuttgart, West Germany (1972).
- Crow S. C., Viscoelastic properties of fine-grained incompressible turbulence, *J. Fluid Mech.*, 33, 1—20 (1968).
- Launder B. E., Spalding D. B., Lectures in Mathematical Models of Turbulence, Academic Press, New York, 1972.
- Rodi W., The prediction of free-turbulent boundary layers by use of a two-equation model of turbulence, Ph. D. dissertation, Mechanical Engineering Department, Imperial College, London, December 1972.
- Mellor G. L., Analytic prediction of the properties of stratified planetary surface layers, *J. Atmos. Sci.*, 30, 1061—1069 (1973).
- Launder B. E., On the effects of gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum, *J. Fluid Mech.*, 67, 569—581 (1975).
- Naot D., Shavit A., Wolfshtein M., Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses, *Phys. Fluids*, 16, 738—743 (1973).
- Lumley J. L., Khajeh-Nouri B., Computational modeling of turbulent transport, *Advances in Geophysics*, Vol. 18A, Academic Press, New York, 1974, p. 169—192.
- Hanjalic K., Launder B. E., A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows, *J. Fluid Mech.*, 52, 609—638 (1972).
- Zeman D., Tennekes H., A self-contained model for the pressure terms in the turbulent stress equations of the atmospheric boundary layer, неопубликованная рукопись, 1975.
- Varma A. K., Second-order closure of turbulent reacting shear flows, Aeronautical Research Associates of Princeton report № 235, 1975.
- Lewellen W. S., Teske M., Donaldson C. du P., Application of turbulence model equations to axisymmetric wakes, *AIAA J.*, 12, 620—625 (1974). [Имеется перевод: Левеллен, Теске, Дональдсон. Применение полуэмпирических уравнений пульсационного движения к расчету осесимметричных следов. — *Ракетная техника и космонавтика*, 1974, т. 12, № 5, 56—63.]
- Lewellen W. S., Teske M., Donaldson C. du P., Turbulence model of diurnal variations in the planetary boundary layer, *Proceedings 1974 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute* (L. R. Davies, R. E. Wilson, eds.), Stanford University Press, Stanford, California, 1974, p. 301—319.
- Shir C. C., A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows

- in the idealized planetary boundary layers, *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1327—1339 (1973).
25. Mellor G. L., Yamada T., A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1791—1806 (1974).
 26. Harlow F. H., Nakayama P. I., Turbulence transport equations, *Phys. Fluids*, **10**, 2323—2332 (1967).
 27. Wilcox D. C., Alber I. E., A turbulence model for high speed flows, Proceedings 1972 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University Press, Stanford, 1972, p. 231—252.
 28. Lewellen W. S., Teske M., Contiliano R. M., Hilst G. R., Donaldson C. du P., Invariant modeling of turbulent diffusion in the planetary boundary layer, Environmental Protection Agency report № EPA-650/4-74-035, 1974.
 29. Lewellen W. S., Teske M., Donaldson C. du P., Turbulent wakes in a stratified fluid, A. R. A. P. report № 226, 1974.
 30. Champagne F. H., Harris V. G., Corrsin S., Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.*, **41**, 81—139 (1970).
 31. Businger J. A., Wyngaard J. C., Izumi Y., Bradley E. F., Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 181—189 (1971).
 32. Gad-el-Hak M., Corrsin S., Measurements of the nearly isotropic turbulence behind a uniform jet grid, *J. Fluid Mech.*, **62**, 115—143 (1974).
 33. Coles D., Measurements in the boundary layer on a smooth flat plate in supersonic flow. I: The problem of the turbulent boundary layer, JPL report № 20—69, 1953.
 34. Tennekes H., Lumley J. L., A First Course in Turbulence, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
 35. Gibson C. H., Stegen G. R., Williams R. B., Statistics of the fine structure of turbulence velocity and temperature fields measured at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **41**, 153—167 (1970).
 36. Lewellen W. S., Teske M. E., Prediction of the Monin-Obukhov similarity functions from an invariant model of turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1340—1345 (1973).
 37. Wyngaard J. C., Coté O. R., Rao K. S., Modeling the atmospheric boundary layer, Advances in Geophysics, Vol. 18A, Academic Press, New York, 1974, p. 193—212.
 38. Wyngaard J. C., Coté O. R., The evolution of a convective planetary boundary layer — A higher order-closure model study, *Boundary Layer Meteorol.*, **7**, 289—308 (1974).
 39. Wygnanski I., Fiedler H., Some measurements in the self-preserving jet, *J. Fluid Mech.*, **38**, 577—612 (1969).
 40. Wygnanski I., Fiedler H., The two-dimensional mixing region, *J. Fluid Mech.*, **41**, 327—361 (1970).
 41. Birch S. F., Eggers J. M., A critical review of the experimental data for developed free turbulent shear layers, в книге: Free Turbulent Shear Flows, Vol. I: Conference Proceedings, NASA report № SP-321, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1973.
 42. Townsend A. A., The Structure of Turbulent Shear Flow, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1956. [Имеется перевод: Таунсенд А. А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. — М.: ИИЛ, 1959.]
 43. Thomas R. M., Conditional sampling and other measurements in a plane turbulent wake, *J. Fluid Mech.*, **57**, 549—582 (1973).

44. Chevray R., The turbulent wake of a body of revolution, *J. Basic Eng.*, **90**, 275—284 (1978). [Имеется перевод: Чеврэй Р., Турбулентный след за телом вращения. — Теоретические основы инженерных расчетов, 1968, № 3, с. 164—172.]
45. Naudascher E., Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence, *J. Fluid Mech.*, **22**, 625—656 (1965).
46. Klebanoff P. S., Characteristics of turbulence in a boundary-layer with zero pressure gradient, NASA report № 1247, 1955.
47. Bradley E. F., A micrometeorological study of velocity profiles and surface drag in the region modified by a change in surface roughness, *Quart. J. R. Meteorol. Soc.*, **94**, 361—379 (1968).
48. Rao K. S., Wyngaard J. C., Coté O. R., The structure of the two-dimensional internal boundary layer over a sudden change of surface roughness, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 738—746 (1974).
49. Freymuth P., Uberoi M. S., Structure of temperature fluctuations in the turbulent wake behind a heated cylinder, *Phys. Fluids*, **14**, 2574—2580 (1971).
50. LaRue J. C., Libbey P. A., Temperature fluctuations in the plane turbulent wake, *Phys. Fluids*, **17**, 1956—1967 (1974).
51. Монин А. С., Обухов А. М., Безразмерные характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы, *Докл. АН СССР*, 1953, **93**, № 2, 223—226.
52. Wyngaard J. C., Coté O. R., Izumi Y., Local free convection, similarity and the budgets of shear stress and heat flux, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 1171—1182 (1971).
53. Kato H., Phillips O. M., On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, **37**, 643—656 (1969).
54. Willis G. E., Deardorff J. W., A laboratory model of the unstable planetary boundary layer, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1297—1307 (1974).
55. Deardorff J. W., Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layers, *J. Atmos. Sci.*, **29**, 91—115 (1972).
56. Donaldson C. du P., The relationship between eddy transport and second-order closure models for stratified media and for vortices, Free-Turbulent Shear Flows, Vol. I; Conference Proceedings, NASA report № SP-321, NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1973, p. 233—255.
57. Donaldson C. du P., Bilanin A. J., Vortex wakes of conventional aircraft, AGARDograph, № 204, 1975.
58. Mellor G. L., A comparative study of curved flow and density stratified flow, неопубликованное сообщение, 1974.
59. Donaldson C. du P., Sullivan R. D., An invariant second order closure model of the compressible turbulent boundary layer on a flat plate, Aeronautical Research Associates of Princeton report No. 178, 1972.
60. Varma A. K., Beddini R. A., Sullivan R. D., Donaldson C. du P., Application of an invariant second-order closure model to compressible turbulent shear layers, AIAA paper № 74-592, 1974.
61. Varma A. K., Beddini R. A., Sullivan R. D., Fishburne E. S., Turbulent shear flows in laser nozzles and cavities, Air Force Office of Scientific Research report № AFOSR-TR-74-1786, 1974.
62. Sullivan R. D., A program to compute the behavior of a three-dimensional turbulent vortex, Aerospace Research Laboratories report № ARL-TR-74-0009, 1973.
63. Hilst G. R., The chemistry and diffusion of aircraft exhausts in the lower

- stratosphere during the first few hours after flyby, Aeronautical Research Associates of Princeton report № 216, 1974.
64. Donaldson C. du P., Varma A. K., Remarks on the construction of a second order closure description of turbulent reacting flows, в книге: Combustion Science and Technology, Vol. 13, 1976, p. 55—78.
 65. Bilanin A. J., Snedeker R. S., Sullivan R. D., Donaldson C. du P., Final report on an experimental and theoretical study of aircraft vortices, Aeronautical Research Associates of Princeton, report № 238, 1975.
 66. Wyngaard J. C., Notes on surface layer turbulence, в книге: AMS Workshop on Micrometeorology (D. A. Haugen, ed.), Science Press, Boston, 1973 p. 101—149.
 67. Tennekes H., Similarity laws and scale relations in planetary boundary layers, в книге: AMS Workshop in Micrometeorology (D. A. Haugen, ed.), Science Press, Boston, 1973, p. 177—216.
 68. Lewellen W. S., Teske M., Donaldson C. du P., Second-order turbulence modeling applied to momentumless wakes in stratified fluids, Aeronautical Research Associates of Princeton, report № 206 (1973).
 69. Lin J. T., Pao Y. H., Turbulent wake of a self-propelled slender body in stratified and nonstratified fluids: Analysis and flow visualizations, Flow Research Corp. report № 11, 1973.
 70. Lewellen W. S., Teske M., Second-order closure modeling of diffusion in the atmospheric boundary layer, *Boundary Layer Meteorol.*, 10, 69—90 (1976).
 71. Pasquill F., Atmospheric Diffusion, Second Edition, Holstead Press, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.
 72. Deardorff J. W., Willis G. E., Physical Modeling of Diffusion in the Mixed Layer, в книге: Proceedings of the Symposium on Atmospheric Diffusion and Air Pollution, Santa Barbara, 1974, American Meteorological Society, Boston, p. 387—391.

10

Численное моделирование турбулентных течений

С. ОРСЕГ¹⁾

10.1. ВВЕДЕНИЕ

Электронно-вычислительные машины мощностью $1 \div 10$ млн. операций в секунду (например, CDC 6600, 7600, IBM 360—195) получили в настоящее время широкое распространение и можно надеяться, что разрабатываемые в настоящее время ЭВМ будут способны выполнять $10 \div 100$ млн. операций в секунду (CDC Star, Illiac, TI ASC, Cray Research). Возросшая мощность ЭВМ позволяет получить решение некоторых из наиболее важных задач гидродинамики, например турбулентных течений, путем численного решения уравнений Навье—Стокса.

Первые результаты в этом направлении были получены Орсегом и Паттерсоном [1]. В их работе моделировалась однородная изотропная турбулентность при умеренных значениях числа Рейнольдса, а полученные данные сопоставлялись с результатами теории турбулентности. Позднее с помощью аналогичных методов был проведен ряд исследований других турбулентных течений. В данной главе дается обзор этих численных исследований. Несмотря на то что в настоящее время все еще невозможно моделирование инерционной подобласти спектра трехмерной турбулентности, имеется несомненный прогресс в моделировании аналогичной подобласти спектра двумерной турбулентности и энергосодержащей области спектра трехмерной турбулентности.

10.2. МЕТОДЫ

При исследовании турбулентности обычно рассматриваются течения несжимаемой жидкости, описываемые уравнениями Навье—Стокса

¹⁾ S. A. Orszag, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (10.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (10.2)$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — скорость, $p(\mathbf{x}, t)$ — давление и ν — кинематический коэффициент вязкости. В уравнениях (10.1) и (10.2) учтены главные нелинейные механизмы эволюции турбулентных течений; однако в других задачах могут быть существенными и иные эффекты, как, например, влияние сжимаемости, архимедовых сил, химических реакций, взаимодействия фаз в многофазных течениях и т. д. Из уравнений (10.1) и (10.2) вытекает уравнение Пуассона

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (10.3)$$

Это уравнение, определяющее давление, является следствием условия несжимаемости среды, выражаемого уравнением (10.2). Давление подчиняется диагностическому уравнению (10.3), а не эволюционному уравнению для $\partial p / \partial t$, как, например, в случае сжимаемого течения с конечной скоростью звука. [Фактически давление в уравнении (10.1) играет роль, аналогичную множителю Лагранжа, который соответствует кинематическому условию в форме уравнения (10.2).]

Однородную турбулентность можно моделировать с помощью периодических граничных условий, налагаемых на решения уравнения (10.1), а именно:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x} + 2\pi \mathbf{n}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (10.4)$$

где $\mathbf{n}$ вектор с целочисленными составляющими. При этих граничных условиях целесообразным методом численного решения уравнений Навье—Стокса является аппроксимация решения в виде усеченного ряда Фурье:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{|\mathbf{k}| < K} \mathbf{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad (10.5)$$

где волновые векторы $\mathbf{k}$ имеют целочисленные составляющие, если период этой функции равен 2π в соответствии с условием (10.4). Используя (10.5), уравнения Навье—Стокса можно представить в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) u_\alpha(\mathbf{k}, t) = -ik_\beta \left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{k_\alpha k_\gamma}{k^2} \right) \times \sum_{\substack{|\mathbf{p}| < K \\ |\mathbf{k}-\mathbf{p}| < K}} u_\beta(\mathbf{p}, t) u_\gamma(\mathbf{k}-\mathbf{p}, t), \quad (10.6)$$

где $\delta_{\alpha\gamma}$ — символ Кронекера, а по повторяющимся греческим индексам проводится суммирование от 1 до 3, не указываемое явно. При выводе уравнения (10.6) давление исключено с помощью уравнения (10.3). Эффективные методы решения этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с независимой переменной t обсуждаются в работе Орсега [2]. Этот метод решения уравнений

Навье—Стокса называется спектральным в противоположность обычным конечно-разностным методам, по которым уравнения (10.1) и (10.2) представляются в разностной форме для конечного числа узловых точек сетки.

В более общем случае спектральные методы основываются на представлении скорости в виде отрезков рядов по гладким функциям:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \sum_{|m| < M} \sum_{|n| < N} \sum_{|p| < P} a_{mnp}(t) \psi_m(x_1) \phi_n(x_2) \chi_p(x_3). \quad (10.7)$$

Правильный выбор базисных функций определяет эффективность метода: критериями являются быстрая сходимость к точному решению при $M, N, P \rightarrow \infty$ и наличие эффективных методов решения системы дифференциальных уравнений для функций $a_{mnp}(t)$ (работа Орсега и Израэли [3]). Некоторые виды используемых в расчетах базисных функций приведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Выбор базисных функций

Тип граничного условия	Функция	Примечание
1. Периодичность	$\exp(ikx)$	Те же функции, что и в п. 1, но с определенными свойствами симметрии
2. Скольжение на свободной границе (нулевое касательное напряжение)	$\begin{cases} \sin(kx) \\ \cos(kx) \end{cases}$	
3. Жесткая граница (прилипание)	$T_n(x)$ $P_n(x)$	Полиномы Чебышева — разложение аналогично разложению по косинусам, так как $T_n(\cos x) = \cos nx$. Полиномы Лежандра — менее эффективны, чем $T_n(x)$, но более естественны для удовлетворения законов сохранения, так как весовой множитель в соотношениях ортогональности равен 1, а не $(1-x^2)^{-1/2}$, как для $T_n(x)$
а. Декартовы координаты		
б. Цилиндрические (полярные) координаты	$r^s T_n(r)$	[28]
4. Сферические координаты	$Y_n^m(\theta, \phi)$ $\sin^s \theta \cos n\theta \exp(im\phi)$	Поверхностные гармоники — обобщенные ряды Фурье [28]
5. Полупрямая и бесконечная прямая	$T_n(x)$ $L_n(x)$ $H_n(x)$	При отображении на конечный отрезок или при перенесении границы из бесконечности в конечную точку Полином Лагерра Полином Эрмита [29]

Разрабатываемые на основе спектральных методов алгоритмы решения в принципе обладают рядом преимуществ по сравнению с конечно-разностными методами. Рассмотрим пять общих критериев, позволяющих сопоставить характеристики методов расчета [3].

а) *Скорость сходимости.* Если функция $v(x, t)$ является гладкой (бесконечно дифференцируемой), то ошибка, обусловленная представлением скорости в спектральной форме (10.7), стремится к нулю быстрее, чем любая конечная степень обратной величины числа членов в отрезке ряда. В противоположность этому конечно-разностные методы обеспечивают некоторую конечную скорость сходимости (характеризуемую в большинстве случаев вторым порядком по величине шага сетки). Важным обстоятельством является то, что высокая точность спектральных методов достигается посредством небольшого усложнения или вообще без каких-либо усложнений, если удовлетворительная точность уже достигнута.

б) *Эффективность.* Развитие методов быстрого преобразования Фурье позволило создать численные алгоритмы, основанные на спектральных методах, которые конкурируют в скорости счета с конечно-разностными алгоритмами при одном и том же числе независимых степеней свободы. Тем не менее для определения характеристик течения с погрешностью порядка 5% алгоритмы, основанные на спектральных методах, требуют в 2 ÷ 5 раз меньшего числа степеней свободы в каждом из трех пространственных направлений. Следовательно, требуемая для решения задачи спектральными методами память ЭВМ сокращается на порядок или более.

в) *Граничные условия.* Формулировка граничных условий для спектральных методов имеет три аспекта. Во-первых, если для представления распределения скорости поперек пограничного слоя с безразмерной толщиной ϵ используются полиномы Чебышева или Лежандра, то для достижения высокой точности в разложении достаточно удерживать лишь около $\epsilon^{-1/2}$ полиномов. С другой стороны, если бы использовалась равномерная сетка, то в расчетах потребовалось бы иметь ϵ^{-1} узловых точек. Во-вторых, если для растяжения пограничного слоя или внутреннего слоя толщиной ϵ используется преобразование координат, то при $\epsilon \rightarrow 0$ ошибки, обусловленные спектральным представлением функций, стремятся к нулю быстрее, чем любая конечная степень ϵ . С другой стороны, точность результатов, получаемых с помощью конечно-разностных методов, характеризуется некоторой конечной степенью ϵ . В-третьих, спектральные методы обеспечивают высокую точность численного решения на границах втекания и вытекания жидкости, и нет необходимости в применении специальных приемов для формулировки граничных условий. С другой стороны, точность конечно-разностных методов высокого порядка нарушается около границ, так как необходимо рассматривать узловые точки, лежащие вне области те-

чения, и приходится видоизменять и, возможно, значительно усложнять схему, чтобы сохранить требуемую точность численного решения около границ (работа Крейса и Олигера [4]).

г) *Разрывы.* Примечательно, что спектральные методы в большей степени позволяют локализовать ошибки, чем разностные методы, и, следовательно, требуют существенно меньшей локальной диссипативности для сглаживания разрывов.

д) *«Априорная» оценка точности.* В работе Херринга и др. [5] было показано, что форма спектра обеспечивает собственную меру точности расчетов по спектральному методу. Если амплитуды спектральных гармоник равномерно стремятся к нулю, то можно оценить точность расчета, используя результаты этого же расчета. С другой стороны, никакой такой *собственной* характеристики точности конечно-разностных методов пока не найдено; чтобы оценить точность конечно-разностных вычислений, необходимо сравнить результаты вычислений на различных сетках.

Характеристики турбулентности определяются посредством численного решения уравнений (10.1) и (10.2), дополненных соответствующими начальными и граничными условиями. Для однородной турбулентности используются периодические граничные условия вида (10.4), а начальные условия выбираются случайным образом по следующей схеме. Используется спектральное представление (10.5) с коэффициентами вида

$$u_{\alpha}(k, 0) = \left(\delta_{\alpha 1} - \frac{k_{\alpha} k_1}{k^2} \right) r_1(k), \quad (10.8)$$

где $r_1(k)$ — статистически независимые случайные переменные с гауссовским распределением и дисперсией, пропорциональной заданному (неслучайному) энергетическому спектру $E(k)$. Выражение (10.8) гарантирует выполнение условия несжимаемости $k_{\alpha} u_{\alpha}(k, 0) = 0$. При подстановке (10.8) в (10.5) получается случайное начальное поле скоростей, характеризующееся гауссовским распределением и энергетическим спектром $E(k)$.

Формулировка случайных начальных условий для неоднородных турбулентных течений, таких, как следы и струи, является несколько более сложной задачей. Было найдено [6], что с целью удовлетворения условию несжимаемости удобно выразить скорость через векторный потенциал:

$$v(x, 0) = \nabla \times A(x) \quad (10.9)$$

и функцию $A(x)$ использовать для моделирования случайного неоднородного поля.

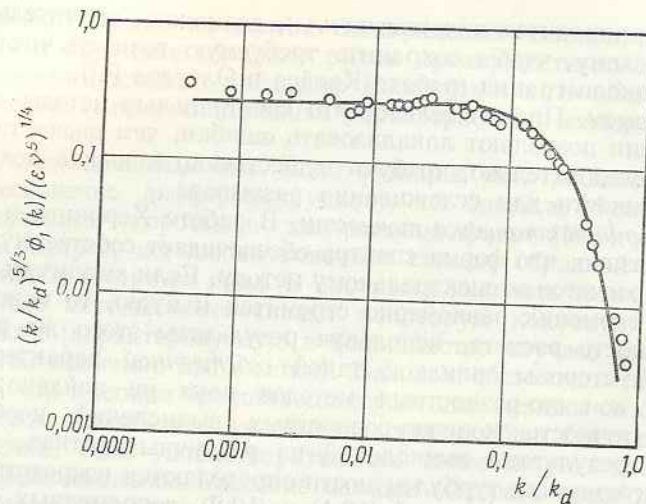


Рис. 10.1. Безразмерный одномерный энергетический спектр $k^{5/3} \phi_1(k)$ в инерционной подобласти и области диссипации.
— приближение прямых взаимодействий в переменных Лагранжа [25]; ○ экспериментальные данные Гранта и др. [7]. Здесь $k_d = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$, а функция $\phi_1(k)$ связана с изотропным энергетическим спектром $E(k)$ соотношением

$$E(k) = k^3 \left[\frac{d}{dk} \frac{1}{k} \frac{d}{dk} \phi_1(k) \right].$$

10.3. ЗАДАЧИ

Основную трудность численного моделирования турбулентности можно проиллюстрировать на примере расчета течения, аналогичного течению, изучавшемуся Грантом и др. [7]. Эти авторы исследовали на гидродинамическом лотке инерционную подобласть спектра течения со следующими характеристиками:

Среднеквадратическое значение флуктуаций скорости $\bar{v} \approx 1,5$ м/с
Масштаб крупных вихрей $L \approx 10$ м
Масштаб мелких вихрей $l \approx 1$ см

Здесь l — масштаб, характерный для процесса диссипации энергии за счет вязкости; для воды кинематический коэффициент вязкости $\nu \approx 0,01$ см²/с, так что число Рейнольдса $R = \bar{v}L/\nu \approx 1,5 \cdot 10^8$. Инерционная подобласть спектра для этого течения показана на рис. 10.1, где $\phi_1(k)$ — одномерный спектр [8], ϵ — скорость диссипации энергии и $k_d = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$ — волновое число, соответствующее колмогоровскому масштабу диссипации. Отметим, что закон $\phi_1(k) \sim k^{-5/3}$ для инерционной подобласти спектра занимает две декады в пространстве волновых чисел.

Для точного моделирования этого течения на всех динамически

существенных масштабах необходимо исследовать диапазон изменения масштабов от 10^4 до 1 (в условных единицах), так что для каждого из трех направлений потребуется по меньшей мере 10^4 степеней свободы. Следовательно, приходится рассматривать около $(10^4)^3 = 10^{12}$ степеней свободы (значений скорости, давления и т. п.). Чтобы полученные результаты представляли практический интерес, решение уравнения (10.1) нужно определить на некотором динамически существенном интервале времени, который, как правило, равен периоду вращения крупного вихря и составляет приблизительно $L/\bar{v} \approx 60$ с. Тем не менее при решении уравнения (10.1) необходимо использовать небольшой шаг по времени, чтобы обеспечить как высокую точность, так и устойчивость счета; характерная величина шага по времени составляет $l/\bar{v} \approx 6 \cdot 10^{-3}$ с. Следовательно, при расчете решения на интервале времени, равном периоду вращения вихря, будет сделано около 10^4 шагов. Для решения уравнения (10.1) типичным численным методом потребуется выполнить около 100 машинных операций (инструкций) на одном шаге по времени в расчете на одну степень свободы. Следовательно, при использовании 10^4 шагов по времени и 10^{12} степеней свободы для численного моделирования этого течения требуется выполнить около 10^{18} операций. Даже на ЭВМ следующего поколения, которые будут характеризоваться быстродействием 10^{-9} с в расчете на одну операцию, при стоимости времени ЭВМ 1 долл./с для выполнения единичного расчета потребовалось бы около 10^9 с ≈ 30 лет и около 10^9 долл.

Только что приведенные оценки можно формализовать следующим образом: наибольший масштаб L турбулентного течения определяется размером энергосодержащих вихрей и обычно связывается с размером тела или масштабом области, в которой действуют силы, порождающие эти вихри. Турбулентные движения с меньшими масштабами приводят к интенсификации процессов переноса по сравнению с соответствующими процессами молекулярного переноса, включая увеличение диссипации энергии, переноса импульса, теплоотдачи и диффузии частиц. Такая интенсификация процессов переноса часто моделируется с помощью коэффициентов турбулентного переноса, которые при больших числах Рейнольдса оказываются на несколько порядков больше, чем коэффициенты молекулярного переноса.

Было сделано предположение [на основе некоторых экспериментальных и теоретических результатов (см. работы Бэтчелора [8] и Орсега [9]), что в турбулентном течении при $R \rightarrow \infty$ скорость диссипации энергии ϵ остается величиной порядка $O(1)$ в противоположность тривиальной оценке $\epsilon = O(1/R)$ для ламинарных течений. Оценка $\epsilon = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$ тесно связана с идеей о саморегулировании мелкомасштабных движений в турбулентном

течении, в результате которого при $R \rightarrow \infty$ обеспечивается соответствующая интенсификация процессов переноса. В случае диссипации энергии отсюда следует, что масштаб диссипации l , который является наименьшим динамически существенным масштабом течения, по порядку величины равен

$$l = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4} \approx L/R^{3/4} \quad \text{при } R \rightarrow \infty. \quad (10.10)$$

Соотношение (10.10) следует из соображений размерности: $[L] = \text{см}$, $[\varepsilon] = \text{см}^2/\text{с}^3$, $[\nu] = \text{см}^2/\text{с}$; кроме того, параметр l может зависеть только от ε и ν , так как: а) в однородном турбулентном потоке масштаб l саморегулируется таким образом, чтобы выполнялась оценка $\varepsilon = O(1)$, ибо только за счет ε обеспечивается динамическое взаимодействие мелкомасштабных движений с большими энергосодержащими вихрями; б) истинный масштаб диссипации определяется молекулярной вязкостью ν , которая должна фактически осуществлять диссипацию энергии. Из аналогичных рассуждений вытекает, что в инерционной подобласти спектра, содержащей небольшие вихри (которые тем не менее достаточно велики, чтобы молекулярная вязкость ν не оказывала непосредственного влияния на их эволюцию), должен выполняться закон Колмогорова

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (10.11)$$

Равенство (10.11) также следует из соображений размерности, так как $[E(k)] = \text{см}^3/\text{с}^2$ и $[k] = \text{см}^{-1}$, а величина $E(k)$ в инерционной подобласти спектра может зависеть только от ε и k , где k — волновое число. Энергетический спектр турбулентности, полученный на основе соображений теории разномасштабности, приведен на рис. 10.2.

Согласно (10.10), диапазон изменения пространственных масштабов, которые необходимо точно разрешить при расчете течения с числом Рейнольдса R , по порядку величины равен

$$L/l \approx R^{3/4},$$

так что по порядку величины полное число пространственных степеней свободы равно $(R^{3/4})^3 = R^{9/4}$. Расчет течения необходимо провести на интервале времени порядка $L/\bar{v}$, а шаг по времени должен быть ограничен величиной порядка $l/\bar{v}$, так что число шагов, требуемых для моделирования течения при единичном расчете, должно составлять около $L/l \approx R^{3/4}$. Следовательно, суммарное число операций должно составлять около $R^{9/4} \cdot R^{3/4} = R^3$.

Обескураживающим следствием этих рассуждений является то, что увеличение мощности ЭВМ в 10 раз позволит увеличить расчетное число Рейнольдса лишь в $10^{1/3} \approx 2,15$ раз.

Подобные оценки, казалось бы, обрекают на неудачу все разумные попытки численного решения проблемы турбулентности. Тем не менее было бы ошибкой удовлетвориться этой пессимистической

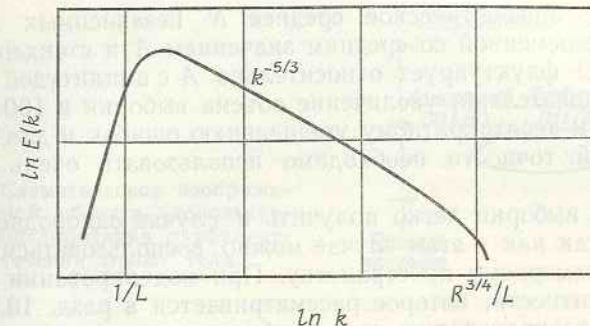


Рис. 10.2. Качественный вид энергетического спектра турбулентности в инерционной подобласти и области диссипации по теории Колмогорова.

точкой зрения. Если при $R = 10^8$ для выполнения расчета потребуется 10^{21} операций (это число является более точной оценкой, чем полученная выше оценка 10^{18}), то, согласно полученной зависимости вида R^3 , для выполнения расчета при $R = 10^4$ потребуется лишь 10^9 операций, или 15 мин счета на ЭВМ мощностью 1 млн. операций в секунду. К диапазону чисел Рейнольдса от 10^4 до 10^5 относится много турбулентных течений, представляющих значительный интерес. В самом деле, большинство исследований турбулентности в аэродинамических лабораториях проводится в этом диапазоне и лишь геофизические исследования дают информацию о турбулентности при более высоких числах Рейнольдса.

Результаты численного моделирования турбулентности, рассматриваемые в разд. 10.4, были получены при числах Рейнольдса в диапазоне от 10^3 до 10^5 . При этих числах Рейнольдса численные эксперименты могут расширять и дополнять экспериментальную информацию, полученную в аэродинамической лаборатории. Вопрос о применимости исследований турбулентности при умеренных числах Рейнольдса к геофизическим течениям с огромными числами Рейнольдса исследуется в разд. 10.5.

Кроме проблемы разрешимости масштабов, отмеченной выше для случая однородной турбулентности, имеются еще две существенные проблемы, затрудняющие практическое применение численного моделирования турбулентности: эти проблемы также связаны с неадекватностью разрешимости масштабов, однако их происхождение несколько отличается от тех трудностей, которые обсуждались выше. Первой из них является проблема получения статистической информации, пригодной для вычисления точных статистических средних значений, а второй — трудности постановки граничных условий.

Проблема получения статистической информации связана с тем

фактом, что арифметическое среднее N независимых значений случайной переменной со средним значением A и стандартным отклонением D флуктуирует относительно A с амплитудой порядка $D/N^{1/2}$. Следовательно, увеличение объема выборки в 100 раз приводит лишь к десятикратному уменьшению ошибок и для достижения высокой точности необходимо использовать очень большие выборки.

Большие выборки легко получить в случае однородной турбулентности, так как в этом случае можно воспользоваться осреднением по трехмерному пространству. При моделировании изотропной турбулентности, которое рассматривается в разд. 10.14, средние значения определялись как арифметические средние по полосообразным в пространстве волновым числам, т. е. как средние по всем волновым векторам, удовлетворяющим условиям $k - \frac{1}{2}\Delta k < |k| <$

$< k + \frac{1}{2}\Delta k$, где ширина полосы выбирается достаточно большой, чтобы большая часть полученных при этом спектров характеризовалась точностью не менее 10%. С другой стороны, для течений со сдвигом вопрос об объеме выборки становится серьезной задачей. В двумерных течениях со сдвигом средние значения зависят от x (продольной координаты) и от z (вертикальной координаты), но не зависят от y (поперечной координаты). В этом случае пространственные средние могут быть получены как средние по координате y ; если течение однородно по продольной координате (статистически однородно по переменной x), то для осреднения можно использовать также направление вдоль x . Аналогично, в статистически осесимметричном сдвиговом течении для определения пространственных средних можно использовать азимутальную координату. Тем не менее реальные течения со сдвигом являются неоднородными, по крайней мере по одной из координат, что приводит к значительному уменьшению точности статистических расчетов, основывающихся на пространственном осреднении, по сравнению со случаем соответствующих статистически однородных течений.

Для произвольного турбулентного течения проблема получения статистической информации становится очень серьезной. Если течение неоднородно по всем направлениям, то средние можно вычислить, используя только два следующих метода. Во-первых, можно воспользоваться осреднением по времени, если течение является статистически стационарным. Однако, чтобы получить N независимых результатов измерений, недостаточно использовать значения параметров течения на N последовательных шагах по времени, так как имеется большая корреляция между параметрами течения, соответствующими двум соседним моментам времени. Чтобы получить N независимых значений параметров течения из энергосодержащего диапазона движения, необходимо провести расчет течения

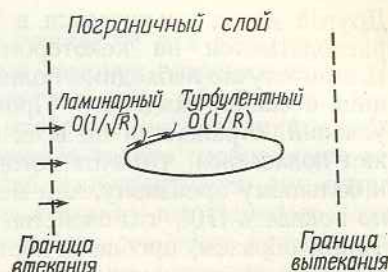


Рис. 10.3. Схематическое изображение расчетной области, используемой при моделировании турбулентного течения около тела.

на интервале, в N раз превышающем период вращения вихрей $L/\bar{v}$. При этом предыдущие оценки числа операций увеличиваются в N раз.

Во-вторых, средние значения параметров произвольного (статистически неоднородного и нестационарного) течения всегда можно вычислить с помощью осреднения по ансамблю, как средние арифметические для N различных течений с одинаковыми статистическими характеристиками. Тем не менее вычисление средних по ансамблю приводит к увеличению объема операций в N раз по сравнению с объемом, требуемым для расчета одного течения.

Последняя трудность численного моделирования турбулентности, которую следует обсудить, связана с граничными условиями. На рис. 10.3 схематически изображена расчетная область для задачи обтекания тела турбулентным потоком. В общем случае имеются три подобласти, в которых необходимо наложить граничные условия: граница втекания жидкости, граница вытекания жидкости и граница с телом.

а) *Границы втекания.* Вследствие конечного объема памяти ЭВМ нельзя рассматривать бесконечную пространственную область. Имеются два возможных способа решения этой проблемы. Один способ заключается в преобразовании бесконечной области в конечную с помощью отображения типа $z = x/(x+1)$, которое переводит область $0 \leq x < \infty$ в область $0 \leq z < 1$. Согласно Грошу и др. [10], использование таких отображений требует большой осторожности; отображение будет давать хорошие результаты только тогда, когда искомое решение характеризуется достаточно простым асимптотическим поведением. В задаче обтекания асимптотическое поведение вытекающего потока за телом не является простым (так как он содержит область, занятую турбулентным следом); следовательно, в этом случае отображение, по-видимому, не будет давать особых преимуществ. Тем не менее течение на границе перед телом может быть простым и можно воспользоваться таким отображением, хотя, насколько это известно автору, в рассматриваемой задаче подобное отображение до сих пор не использовалось.

Другой метод заключается в том, что границы расчетной области располагаются на некотором конечном расстоянии (рис. 10.3). В этом случае необходимо задать поле скоростей на границе втекания жидкости. Произвол, совершаемый при выборе этих условий, отражается на всех остальных результатах расчета. Может показаться, что этот метод усечения области течения приводит к большему произволу, чем метод отображений. Тем не менее можно показать [10], что свойства обоих методов примерно одинаковы. Таким образом, проблема постановки условий в верхней части потока (на границах втекания) связана с недостатком информации о требуемых свойствах набегающего потока. Аналогичный произвол возникает при постановке начальных условий, необходимых для численного моделирования турбулентности. По-видимому, отсутствие этих данных будет незначительно сказываться на конечных результатах в том смысле, что средние характеристики течения весьма устойчивы к возмущениям, хотя индивидуальные реализации поля турбулентности весьма чувствительны к ним.

б) *Границы вытекания жидкости.* По-видимому, проблема постановки условий на границах вытекания жидкости связана с серьезными трудностями. С физической точки зрения, казалось бы, нереально задавать на этих границах полное поле скоростей. Однако, согласно теории вязкой жидкости, на границе вытекания требуется задавать поле течения полностью; согласно теории течений невязкой жидкости для постановки задачи достаточно задать либо нормальную составляющую скорости вытекающей жидкости, либо давление. Тем не менее все эти параметры течения являются *априори* неизвестными; в самом деле, ясно, что большое препятствие, расположенное, например, на некотором расстоянии за границей вытекания жидкости, *будет* влиять на течение в расчетной области. В случае турбулентного течения, по-видимому, остается только предполагать, что специфические элементы условий, устанавливаемых на границе в нижней части потока, будут оказывать незначительное влияние на течение в верхней части потока. При моделировании перехода в пограничном слое были получены некоторые факты, свидетельствующие в пользу этого утверждения, но все же его доказательство отсутствует. Реальные опасения вызывает тот факт, что при задании избыточной информации на границе в нижней части потока характеристики течения могут измениться весьма значительно. Например, если задать нормальную составляющую скорости и давление вытекающего потока, то тем самым однозначно задается коэффициент сопротивления обтекаемого тела. Однако сопротивление должно определяться в процессе расчета, а не задаваться при постановке задачи.

в) *Граничные условия на обтекаемом теле.* В этом случае возникает несколько трудностей. Если на теле имеется ламинарный пограничный слой, то его толщина по порядку величины в $R^{1/2}$ раз

меньше размера тела. При больших числах R для расчета пограничного слоя, возможно, потребуется высокое разрешение в пространстве. Однако этого нетрудно достичь даже при больших числах Рейнольдса, деформируя путем отображения координату, нормальную к поверхности тела. С помощью такого отображения эта проблема будет решена, *если* масштаб турбулентности вне пограничного слоя значительно превышает толщину пограничного слоя. *Если течение в пограничном слое ламинарное, то вдоль направления течения в пограничном слое потребуются лишь незначительное пространственное разрешение.* С другой стороны, если течение в пограничном слое турбулентное, то толщина¹⁾ вязкого подслоя по порядку величины составляет $1/R$. В этом случае для расчетов вдоль нормали к границе можно снова воспользоваться преобразованием координат (если пространственные масштабы турбулентности вне пограничного слоя значительно превышают толщину вязкого подслоя). Однако принципиальной трудностью исследования турбулентного пограничного слоя (или ламинарного пограничного слоя, в котором происходит переход к турбулентному режиму течения) является необходимость разрешения течения в продольном направлении. Так как характерные продольные масштабы по порядку величины равны толщине пограничного слоя (как, например, в случае турбулентного пограничного слоя) или, в лучшем случае, лишь на порядок больше (как, например, в случае волн Толмина — Шлихтинга, вызывающих переход течения в пограничном слое), то разрешение²⁾ в продольном направлении внутри пограничного слоя должно быть порядка $1/R$. Это условие является существенно ограничивающим и будет препятствовать попыткам адекватного моделирования турбулентного течения около реальных тел.

Чтобы обойти последнюю трудность, можно попытаться моделировать турбулентный пограничный слой, налагая условия на касательное напряжение на стенке или на другие аналогичные характеристики течения. Общая теория моделирования таких турбулентных течений отсутствует, однако некоторые недавние попытки подобного рода были довольно успешными (см., например, работу Дирдорфа [11]). Мы не будем обсуждать подробнее эти вопросы, так как они относятся к сфере общих проблем моделирования турбулентности (разд. 10.5) и не имеют непосредственного отношения к решению уравнений Навье — Стокса.

¹⁾ Имеется в виду безразмерная толщина (отнесенная к размеру тела). — Прим. перев.

²⁾ Т. е. шаг сетки, отнесенный к характерному масштабу. — Прим. перев.

10.4. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Для численного моделирования турбулентности на ЭВМ разработаны программы, в которых можно использовать до 65 000 степеней свободы для представления каждой динамической переменной, включая скорость, температуру, давление и т. д. В программах расчета двумерной однородной турбулентности рассматривается до 256×256 мод (волновых чисел) [параметр усечения $K = 128$ в формулах (10.5) и (10.6)], а в программах расчета трехмерной сдвиговой и однородной турбулентности рассматривается $32 \times 32 \times 32$ мод ($K = 16$), $64 \times 8 \times 128$ мод и т. д. Например, для моделирования турбулентности в аэродинамической трубе при числе Рейнольдса порядка 25 000 можно использовать программу расчета трехмерной турбулентности с $32 \times 32 \times 32$ модами. Расчеты проводятся на ЭВМ CDC 7600; затраты времени на один шаг составляют около 3 с, и в расчетах используется несколько сотен шагов по времени.

Элементарным примером применения численных методов к получению интересующей нас информации об однородной турбулентности является задача о вихре Тейлора—Грина [12]. В этом случае задается неслучайное поле скорости

$$\begin{aligned} v_1(x, 0) &= \cos x_1 \sin x_2 \cos x_3, \\ v_2(x, 0) &= -\sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \\ v_3(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (10.12)$$

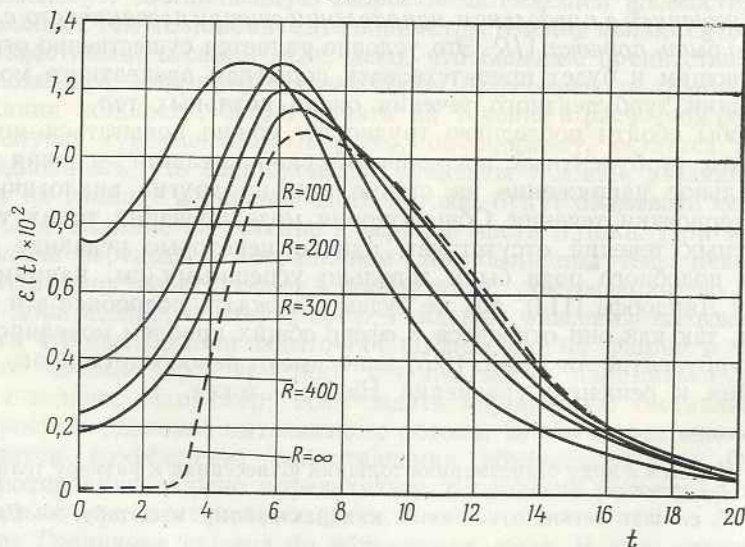


Рис. 10.4. Изменение скорости диссипации энергии ε с течением времени t для вихря Тейлора—Грина при различных числах Рейнольдса. — расчет; - - - - - экстраполяция.

с искривленными вихревыми линиями. При $t > 0$ поле течения становится трехмерным, и вихревые линии растягиваются под действием самоиндуцированных касательных напряжений. Усиление завихренности при растяжении вихревых линий в локальном сдвиговом течении является фундаментальным механизмом, приводящим к увеличению диссипации энергии турбулентности по сравнению с ламинарным течением, что составляет основу колмогоровской теории турбулентности (разд. 10.3). В самом деле,

$$\varepsilon = \nu \overline{\omega^2}, \quad (10.13)$$

где ω — завихренность; из равенства (10.13) следует, что растяжение вихревых линий в процессе их переноса может приводить к увеличению диссипации энергии.

На рис. 10.4 приведены графики скорости диссипации $\varepsilon(t)$, полученные в результате численного решения уравнений Навье—Стокса с начальными условиями (10.12). В данном случае $R = 1/\nu$ и расчеты проводились по программе, использующей спектральный метод с параметром усечения $K = 16$ [13].

Возрастание $\varepsilon(t)$ при $t \leq 5$ связано с механизмом растяжения вихрей. Как отмечалось в разд. 10.3, основной предпосылкой колмогоровской и аналогичных ей теорий турбулентности является то, что $\varepsilon = O(1)$ при $R \rightarrow \infty$. Согласно соотношению (10.13), такое асимптотическое поведение возможно только тогда, когда при $t \leq t_*$ и $\nu \rightarrow 0$ величина $\overline{\omega^2}$ конечна, а при $\nu \rightarrow 0$ и $t > t_*$ величина $\overline{\omega^2} \rightarrow \infty$ таким образом, что $\varepsilon = O(1)$. Такое гипотетическое поведение изображается кривой с $R = \infty$ на рис. 10.4 [13]. По-видимому, приведенные на этом рисунке результаты для вихря Тейлора—Грина не позволяют сделать определенный вывод, что $\varepsilon = O(1)$ при $\nu \rightarrow 0$, однако дополнительная теоретическая информация, позволяющая проверить эту гипотезу, впервые выдвинутую на основе экспериментальных данных, практически отсутствует.

Некоторые результаты численного моделирования двумерной турбулентности приведены на рис. 10.5 — 10.8. На рис. 10.5 представлены четыре спектра диссипации энтропии (т. е. среднеквадратической завихренности) $k^4 E(k)$ в зависимости от k [5]. В двумерном случае вихревые линии не могут растягиваться, поэтому $\overline{\omega^2}(t) \leq \overline{\omega^2}(0)$ и $\varepsilon(t) \leq \varepsilon(0) = O(\nu)$ при $\nu \rightarrow 0$ [9]. Следовательно, необходимо проделать заново рассматривавшийся в разд. 10.3 колмогоровский анализ размерностей. В самом деле, тогда как $\varepsilon(t)$ уменьшается с ростом t , скорость диссипации энтропии $\eta(t)$ может увеличиваться под действием сдвига. По определению

$$\eta(t) = -\frac{d}{dt} \overline{\omega^2} = 2\nu \int_0^\infty k^4 E(k) dk, \quad (10.14)$$

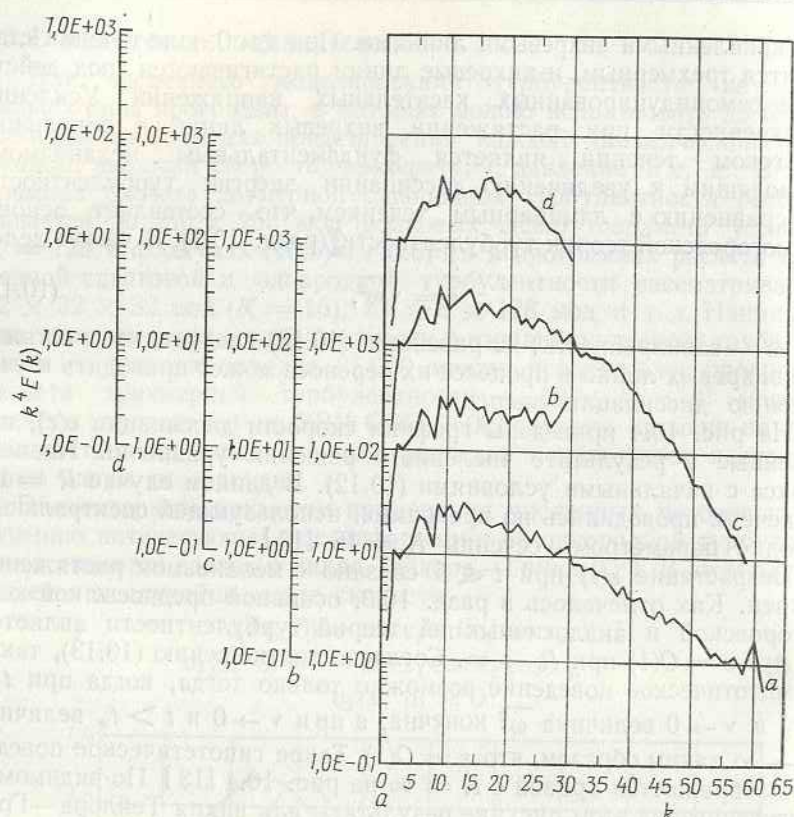


Рис. 10.5. Зависимость $k^4 E(k)$ от k при $t = 2$.

a — спектральный метод, использующий 128^2 независимых волновых чисел (параметр усечения $K = 64$); b — спектральный метод, использующий 64^2 волновых чисел; c — конечно-разностный метод, использующий 128^2 узлов [27]; d — конечно-разностный метод, использующий 64^2 узлов [27]. Начальный энергетический спектр $E(k) = \frac{2}{3} k e^{-3k/2}$, число Рейнольдса $R_L = 349$.

так что величина $2\nu k^4 E(k)$ является спектром скорости диссипации энтропии. Оказывается, что в двумерном случае эта новая величина $\eta(t)$ выступает как динамическая переменная, аналогичная переменной $\varepsilon(t)$ для трехмерного случая. В самом деле, точность определения спектра скорости диссипации энтропии гарантирует точность численного моделирования динамически существенных масштабов двумерной турбулентности.

Приведенные на рис. 10.5 спектры скорости диссипации энтропии были получены посредством численного решения уравнений Навье—Стокса с фиксированными начальными условиями до мо-

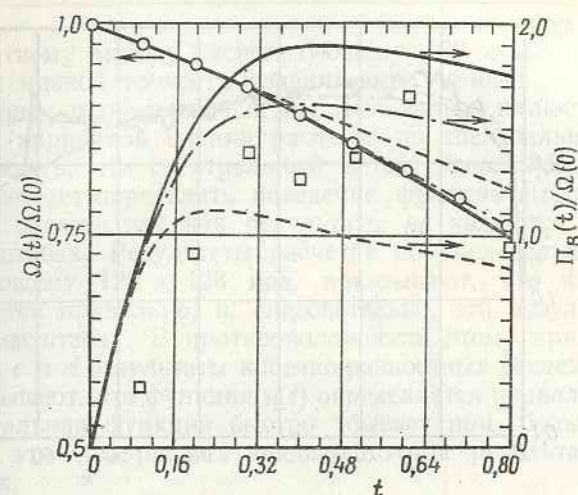


Рис. 10.6. Изменение нормированной энтропии $Q(t)$ и нормированного обратного энергетического переноса $P_B(t)$ во времени t при эволюции турбулентности с начальными данными, приведенными в подписи к рис. 10.5.

— модель пробного поля (МПП) с $\lambda = 0,65$ [16]; — МПП с $\lambda = 1,0$ [16]; — — — приближение прямых взаимодействий (ППВ) [17]. $\circ$ $Q(t)$; $\square$ $P_B(t)$. Значения $Q(t)$ и $P_B(t)$ получены в результате численного эксперимента и осреднения по двум реализациям.

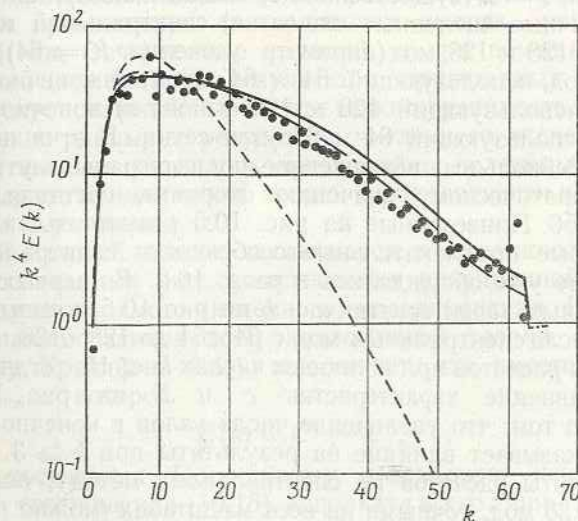


Рис. 10.7. Сравнение спектров диссипации энтропии $k^4 E(k)$.

● численный эксперимент; — МПП, $\lambda = 0,65$; — МПП, $\lambda = 1$; — — — ППВ. Время $t = 0,8$; начальные данные приведены в подписи к рис. 10.5.

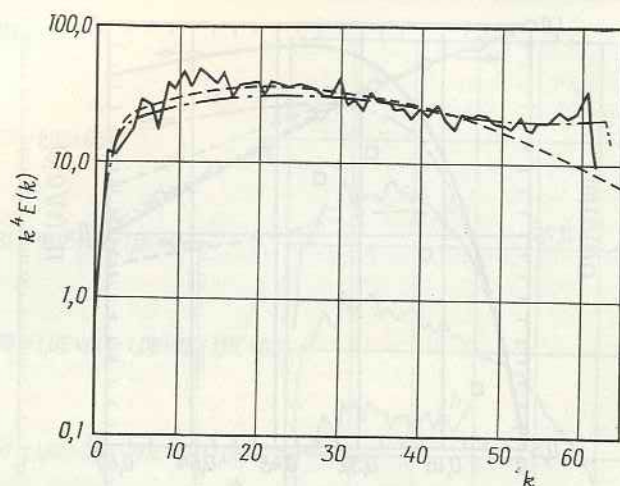


Рис. 10.8. Зависимость $k^4 E(k)$ от k при $R = 1100$ для начальных данных, приведенных в подписи к рис. 10.5.

— результаты численного эксперимента; — — — МПП с параметром усечения $k_{\text{макс}} = 64$ (тождественным параметру усечения в спектральном методе, использующем 128^2 мод); — · — МПП с параметром усечения $k_{\text{макс}} = 128$.

мента времени $t = 2$ (существенное время эволюции); применялись четыре различные численные схемы: а) спектральный метод, использующий 128×128 мод (параметр усечения $K = 64$); б) спектральный метод, использующий 64×64 моды; в) конечно-разностный метод, использующий 128×128 узлов; г) конечно-разностный метод, использующий 64×64 узла сетки. В этих исследованиях число Рейнольдса, вычисленное по интегральному масштабу и среднеквадратическому значению скорости, составляло приблизительно 350. Приведенные на рис. 10.5 результаты иллюстрируют некоторые привлекательные особенности спектральных методов, которые уже обсуждались в разд. 10.2. Во-первых, сравнение спектральных характеристик a и b на рис. 10.5 показывает, что увеличение числа спектральных мод с 64×64 до 128×128 не влияет на результаты расчетов при волновых числах $k \leq 15$, тогда как аналогичное сравнение характеристик c и d на рис. 10.5 свидетельствует о том, что увеличение числа узлов в конечно-разностном методе оказывает влияние на результаты при $k \geq 3$. Предполагая результаты расчетов по спектральному методу, использующему 128×128 мод, точными на всех масштабах (можно показать, что это предположение соответствует действительности), можно видеть, что точность расчетов по спектральному методу, использующему 64×64 моды, сравнима с точностью расчетов по конеч-

но-разностному методу, использующему 128×128 узлов сетки, даже при низкой точности сравниваемых кривых.

Во-вторых, приведенные на рис. 10.5 данные иллюстрируют возможность априорной оценки расчетов по спектральному методу. Можно видеть, что спектральный метод, использующий 64×64 моды, позволяет определить поведение функции $\eta(t)$ лишь в ограниченной области, так как результаты не являются точными на всех масштабах. Результаты расчетов по спектральному методу, использующему 128×128 мод, показывают, что функция $\eta(t)$ определяется правильно, и, следовательно, эти результаты точны на всех масштабах. В противоположность этому приведенные на рис. 10.5, c и d результаты конечно-разностных расчетов, казалось бы, показывают, что функция $\eta(t)$ определяется правильно, так как ее спектральная функция быстро убывает при больших k ; тем не менее эти два расчета не дают точных результатов на всех масштабах.

На рис. 10.6 и 10.7 приводятся некоторые дополнительные результаты расчетов, использовавшиеся при построении рис. 10.5. На рис. 10.6 показаны зависимости среднего квадрата завихренности $\Omega(t) = \overline{\omega^2(t)}$ от t , полученные спектральным методом, использующим 128×128 мод (кружки), и с помощью некоторых аналитических теорий турбулентности (кривые). Зависимости $\Pi_B(t)$ здесь не рассматриваются (см. работу Херринга и др. [51]). На рис. 10.7 проводится аналогичное сравнение функций $k^4 E(k)$, вычисленных при помощи спектрального метода, использующего 128×128 мод (зачерненные кружки), и при помощи аналитических теорий (кривые). Из результатов, приведенных на рис. 10.6 и 10.7, следует важный вывод, что можно сравнивать между собой теоретические данные и результаты численного эксперимента; такие сопоставления оказались чрезвычайно полезными для выяснения пределов применимости теорий турбулентности и определения способов их уточнения.

Другой важный вопрос заключается в возможности проверки теорий, основанных на существовании инерционной подобласти спектра, путем прямого численного моделирования. В двумерном случае анализ размерностей, аналогичный теории Колмогорова (см. работу Крейчнана [14]), показывает, что имеется двумерная подобласть, в которой

$$E(k) = C' \tau^{2/3} k^{-3}, \quad (10.15)$$

где C' — постоянная. По-видимому, невозможно непосредственно проверить соотношение (10.15), используя всего лишь 128×128 мод [5]; можно ожидать, что в этом отношении более полезными окажутся расчеты по спектральному методу, использующему 512×512 мод. На рис. 10.8 приведены некоторые результаты расчетов при большом значении числа Рейнольдса ($R \approx 10^3$), полученные

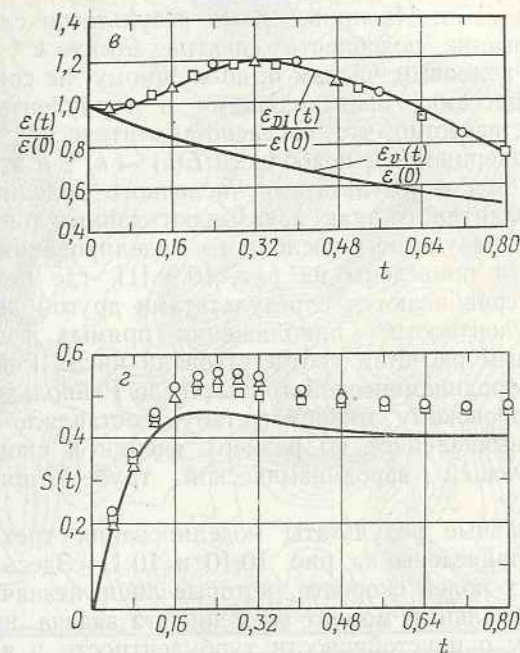
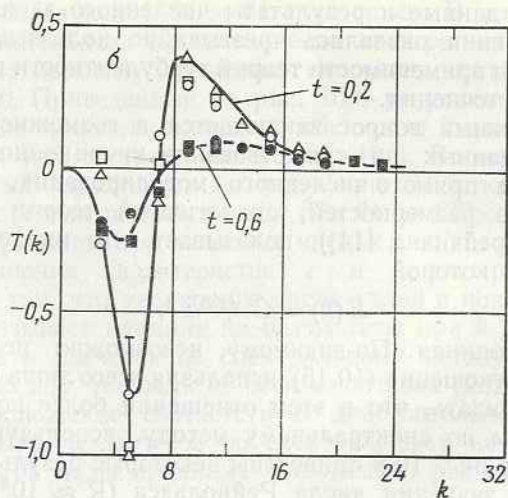
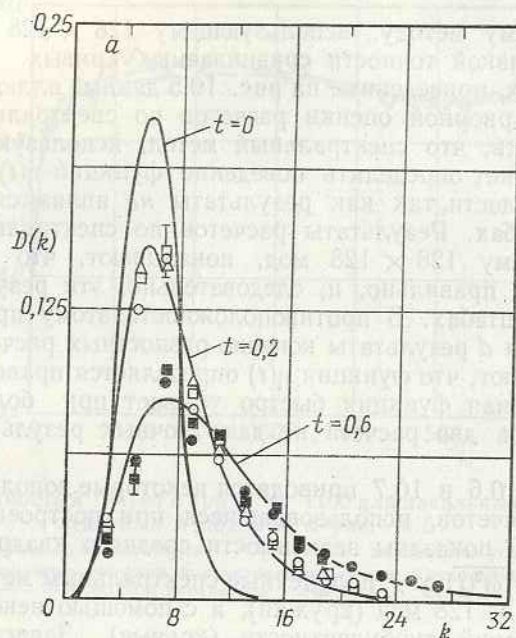


Рис. 10.9. Сравнение результатов численного моделирования (символы) и приближения прямых взаимодействий (сплошные линии).

Вариант 3 — численное моделирование турбулентности с начальным энергетическим спектром $E(k, 0) \sim k^4 \exp[-2(k/k_{\text{макс}})^2]$, $\nu_{\text{ср.кв.}}(0) = 1$, $k_{\text{макс}} = 4.75683$, $\nu = 0.01189$, $R_\lambda(0) = 35.4$. Остальные сведения содержатся в работе Орсега и Паттерсона [1].
 а — спектр диссипации $D(k) = 2k^2 E(k)$; б — спектр переноса $T(k)$; в — скорость диссипации энергии (кривая ε_v — чисто вязкая диссипация); г — коэффициент асимметрии производной продольной скорости.
 ○ $t = 0.2$, вариант 3А; ● $t = 0.6$, вариант 3А; △ $t = 0.2$, вариант 3В; □ $t = 0.2$, вариант 3С; ■ $t = 0.6$, вариант 3С.

с помощью спектрального метода, использующего 128×128 мод. Непрерывной линией с изломами показан результат расчета величины $k^4 E(k)$ по уравнениям Навье — Стокса; может показаться, что в противоположность зависимости (10.15) имеется широкая подобласть спектра, в которой $E(k) \sim k^{-4}$, в соответствии с результатами Сэффмена [15] для инерционной подобласти. Тем не менее, как показывают две другие зависимости, приведенные на рис. 10.8, этот вывод является преждевременным. Штриховой линией показан результат численного решения интегродифференциальных уравнений модели пробного поля — аналитической теории турбулентности [16]. Этот результат соответствует усечению по волновым числам при $K = 128$. Штрих-пунктирной линией показан результат аналогичного расчета с $K = 64$, т. е. с тем же значением параметра усечения, которое использовалось при определении непрерывной

кривой с изломами. Из приведенных результатов следует вывод, что существование подобласти спектра $E(k) \sim k^{-4}$ обусловлено усечением по волновым числам и, по-видимому, не связано с физическими процессами, происходящими в турбулентном течении. В самом деле, известно, что, согласно аналитической модели пробного поля, в инерционной подобласти $E(k) \sim k^{-3}$, а эта модель хорошо согласуется с результатами численного моделирования двумерной турбулентности, как показывают данные рис. 10.6—10.8.

Некоторые результаты численного моделирования трехмерной турбулентности приведены на рис. 10.9 [11], где результаты моделирования сравниваются с результатами другой аналитической теории турбулентности — приближения прямых взаимодействий [17]. Численным расчетам соответствовали числа Рейнольдса, типичные для аэродинамической трубы (число Рейнольдса, вычисленное по тейлоровскому микромасштабу, составляло 35, а число Рейнольдса, вычисленное по размеру ячейки и скорости потока в соответствующей аэродинамической трубе — приблизительно 15 000).

Дополнительные результаты моделирования трехмерной турбулентности приведены на рис. 10.10 и 10.11. Здесь исследуется эволюция двух полей скорости, которые лишь незначительно различаются в начальный момент времени; эта задача имеет отношение к вопросу о неустойчивости турбулентности и важна применительно к проблеме предсказуемости атмосферных движений [18]. На рис. 10.10 приведены контурные диаграммы распределений кинетической энергии, соответствующих двум начальным полям скорости. На рис. 10.11 приведены соответствующие распределения через интервал времени, приблизительно равный периоду вращения крупного вихря; эти результаты были получены при помощи спектрального метода, использующего $32 \times 32 \times 32$ моды. Видно, что относительно малое начальное возмущение с течением времени перерастает в большое.

Численное моделирование турбулентных течений путем прямого решения уравнений Навье—Стокса стало применяться лишь совсем недавно. Орсег и Пао [6] приводят результаты моделирования следа за самодвижущимся телом. Вследствие трудностей общего характера, присущих моделированию неоднородной турбулентности (в частности, проблемы получения статистической информации), расчеты проводились посредством выделения некоторого слоя конечной толщины в следе за телом и прослеживания (с помощью гипотезы Тейлора) его эволюции при перемещении вниз по потоку.

Некоторые результаты моделирования свободного турбулентного слоя смещения приведены на рис. 10.12 и 10.13. В этом течении все осредненные характеристики зависят только от координаты z , а средняя скорость $\bar{U}$ направлена вдоль оси x , однако все

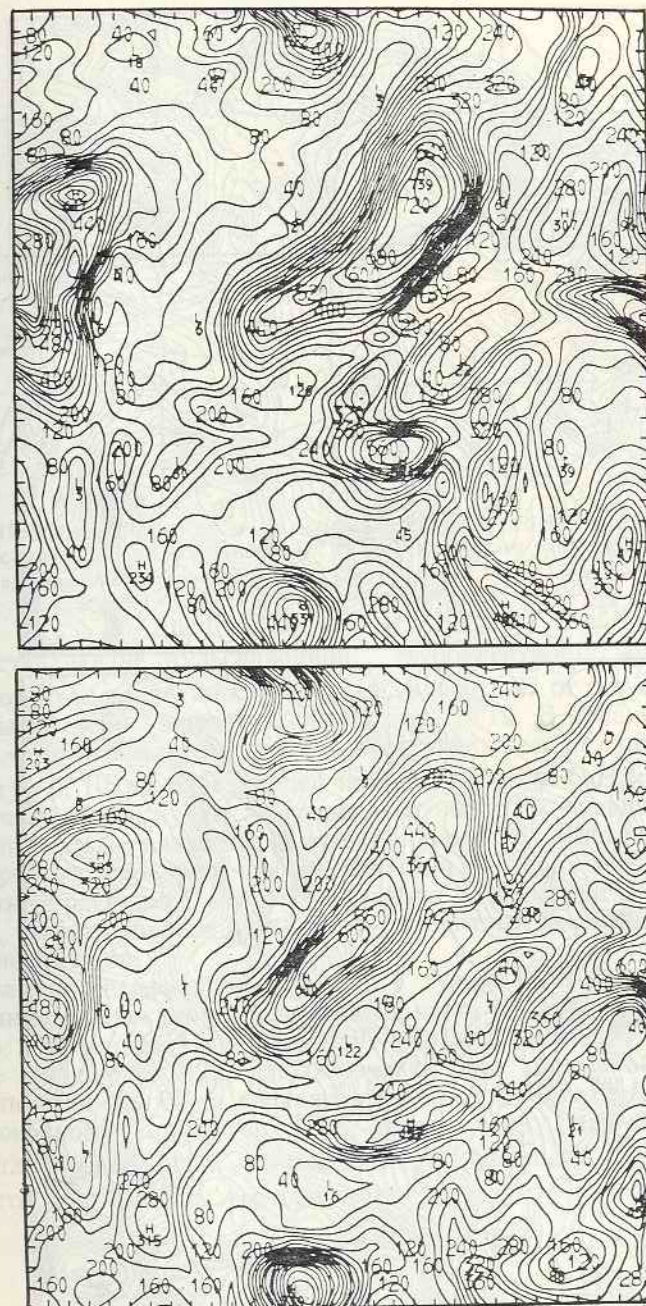


Рис. 10.10. Контурные диаграммы распределений турбулентности в двух течениях, незначительно различающихся в начальный момент времени [26]. Приведены плоские сечения трехмерных контурных диаграмм.

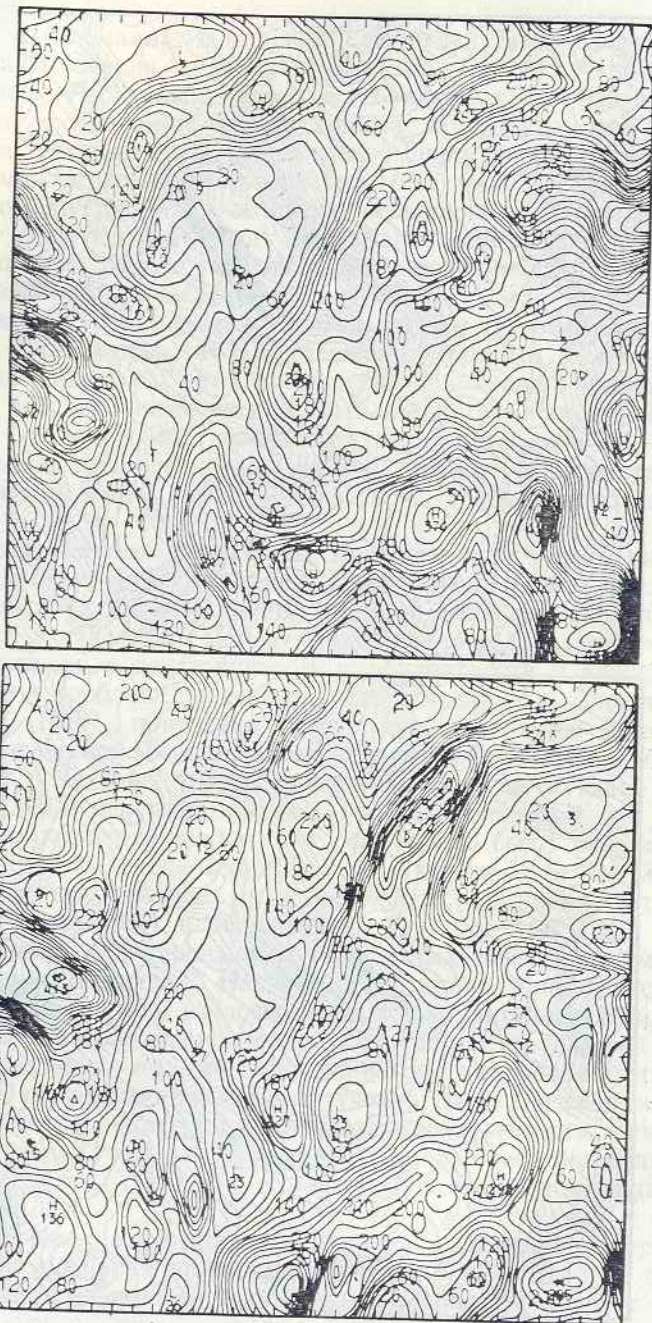


Рис. 10.11. Контурные диаграммы распределений, показанных на рис. 10.10, через $t = 1$ с [26].

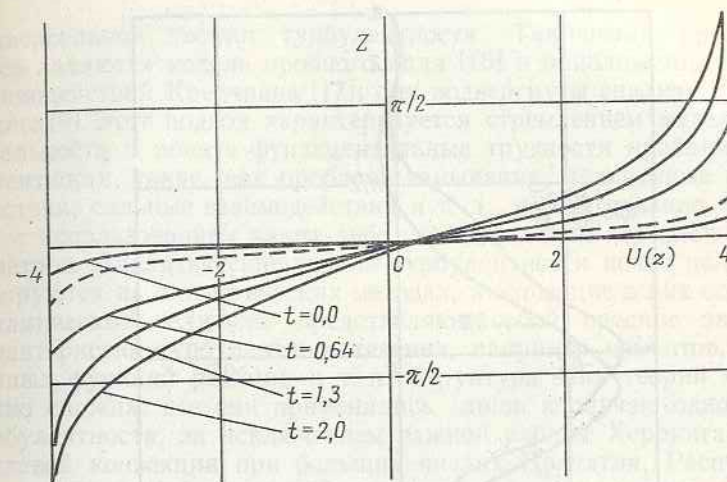


Рис. 10.12. Изменение во времени профилей средней скорости $\bar{U}(z)$ в свободном слое смещения, рассчитанных путем численного моделирования.
— сглаживание разрыва за счет вязкости при $t = 2$; — результаты прямого численного моделирования при $t = 0, 0,64, 1,3$ и $2,0$.

три составляющие пульсационной (турбулентной) скорости отличны от нуля. Зависимость средней скорости $\bar{U}$ от z в некоторые моменты времени t представлена на рис. 10.12. В начальный момент ($t = 0$) профиль средней скорости имеет резкий скачок около точки $z = 0$. Штриховой линией показан профиль $\bar{U}(z)$ при $t = 2$, соответствующий случаю, когда нарастание слоя смещения определяется только вязкостью (молекулярной). В действительности же скорость расширения значительно больше, как показывают результаты расчетов, соответствующие временам $t = 0,64, 1,3$ и 2 , что обусловлено влиянием турбулентных скоростей на сглаживание разрыва.

Такая интенсификация переноса в турбулентных течениях по сравнению с молекулярным переносом часто характеризуется с помощью коэффициента турбулентной вязкости. Результаты, приведенные на рис. 10.13, использовались для проверки пределов применимости одного из вариантов модели турбулентной вязкости, предложенного Прандтлем [19]. Введя длину перемешивания, Прандтль предположил, что напряжение Рейнольдса $u\bar{w}$ и средняя скорость $\bar{U}(z)$ связаны соотношением

$$\overline{u\bar{w}} = -L^2 \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right| \left. \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right|, \quad (10.16)$$

где L — так называемая длина перемешивания, обычно связывае-

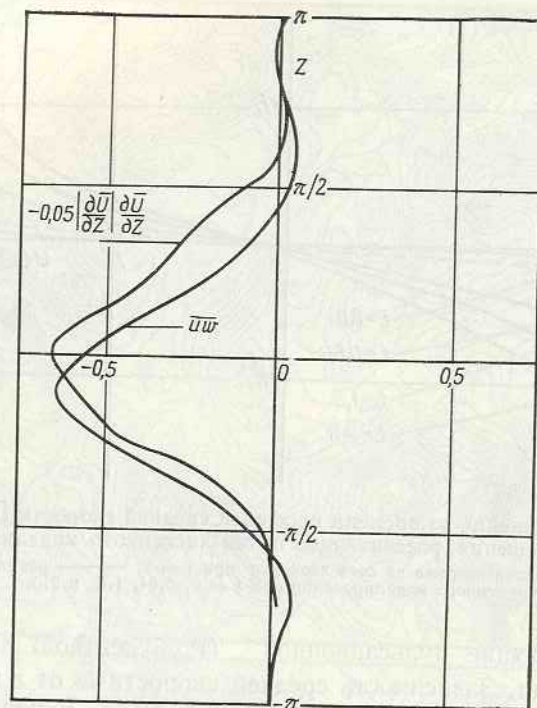


Рис. 10.13. Сравнение напряжений Рейнольдса $\overline{u'w'}$ при $t = 2$ в свободном слое смещения (рис. 10.12) с моделью турбулентной вязкости (10.16).

мая с масштабом крупных вихрей в рассматриваемом течении. Приведенные на рис. 10.13 результаты удовлетворительно согласуются с простым законом переноса (10.16) при $L \approx 0,22$.

С помощью численного эксперимента можно аналогичным образом проверить точность более усложненных моделей переноса турбулентности. Результаты таких сравнительных исследований будут приведены в другом месте.

10.5. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

Существуют по крайней мере четыре подхода к исследованию проблемы турбулентности, а именно: 1) аналитические теории турбулентности; 2) модели переноса турбулентности; 3) модели замыкания мелкомасштабных движений; 4) прямое численное моделирование.

Выше мы рассматривали методы четвертой группы.

К первой группе методов относятся все попытки построения

универсальной теории турбулентности. Типичными примерами здесь являются модель пробного поля [16] и приближение прямых взаимодействий Крейчнана [17]; они подвергнуты анализу в работе Орсега [9]. Этот подход характеризуется стремлением выделить по отдельности и понять фундаментальные трудности проблемы турбулентности, такие, как проблема замыкания, нелинейные взаимодействия, сильные взаимодействия и т. д., и, как правило, не связан с использованием каких-либо свободных или подгоночных параметров. Аналитические теории турбулентности почти полностью базируются на статистических методах, и входящие в них основные динамические величины представляют собой средние значения характеристик турбулентного течения, например моментов, осредненных функций реакции и т. п. Структура этих теорий чрезвычайно сложна; все они применялись лишь к случаю однородной турбулентности, за исключением важной работы Херринга [20] по тепловой конвекции при больших числах Прандтля. Распространение этих теорий на случай произвольных турбулентных течений со сдвигом связано с некоторыми трудностями, однако недавно были разработаны алгоритмы, используя которые можно эффективно применить аналитические теории турбулентности к изучению разнообразных течений со сдвигом.

Обзор моделей переноса турбулентности приведен в работах Лаундера и Сполдинга [21] и Харлоу [22]. Этот подход состоит в разработке упрощенных моделей турбулентных течений, основанных на физических соображениях. Такие модели могут применяться к сложным течениям, встречающимся в инженерной практике. Как правило, в модели переноса турбулентности входят некоторые подгоночные параметры, которые должны подбираться посредством сопоставления расчетов с экспериментальными данными. Как и в аналитических теориях, в моделях переноса динамическими переменными являются лишь осредненные поля турбулентных пульсаций. Для этих сглаженных полей характерна некоторая симметрия (например, осевая симметрия в случае распространения круглой струи в нестратифицированной среде), которой не обладают исходные неосредненные турбулентные поля течения. Таким образом, численное моделирование трехмерного нестационарного турбулентного течения в этом случае может быть сведено к анализу установившегося течения с параметрами, зависящими от меньшего числа пространственных переменных, в результате чего существенно уменьшается объем вычислений (если, как и прежде, приходится прибегать к численному решению модельных уравнений).

В противоположность аналитическим теориям в моделях переноса используются непосредственно средние характеристики турбулентного течения, а основополагающей для турбулентности динамике взаимодействия между различными масштабами течения если и уделяется, то лишь незначительное внимание. Преимущест-

ва такого подхода по сравнению с аналитическими теориями очевидны: даже в случае чрезвычайно сложных неоднородных течений в модели переноса входят лишь относительно простые динамические переменные. Столь же очевидны и недостатки этого подхода: при столь поверхностном отношении к динамическим процессам потенциально существенная динамическая информация полностью исключается из рассмотрения.

Предложенное к настоящему времени число моделей переноса весьма значительно. Все авторы, как правило, используют уравнение Рейнольдса для средней скорости, которое получается при осреднении уравнений Навье—Стокса. Это уравнение описывает изменение средней скорости, обусловленное напряжениями Рейнольдса. В моделях замыкания второго порядка выводятся дополнительные уравнения движения для самих напряжений Рейнольдса. Однако информация, содержащаяся в этих дополнительных уравнениях, без дальнейших предположений недостаточна для определения эволюции турбулентности, так как эта эволюция существенным образом зависит от деталей течения, которые были потеряны при осреднении. Для замыкания уравнений в этих моделях приходится вводить некоторые произвольные предположения о связях между динамическими величинами. Все эти модели отличаются одна от другой лишь выбором условий замыкания.

В моделях замыкания мелкомасштабных движений (третий подход) аппроксимация процессов переноса турбулентности совершается лишь на тех масштабах движения, которые не могут быть разрешены в явной форме при численной аппроксимации уравнений Навье—Стокса. Основоположителем этих методов является Дирдорф [11, 23], который использовал как упрощенные схемы замыкания с турбулентной вязкостью, так и усложненные схемы замыкания второго порядка для турбулентного переноса мелкомасштабной компоненты течения. Большие масштабы (которые разрешаются явно при численной аппроксимации) трактуются так же, как при прямом численном решении уравнений Навье—Стокса. Малые масштабы трактуются с помощью статистической аппроксимации в процессе детального рассмотрения больших масштабов. Влияние неразрешаемых малых масштабов на разрешаемые большие масштабы характеризуется с помощью коэффициента турбулентной вязкости K , заменяющего коэффициент молекулярной вязкости. Коэффициент K выбирается [24] в виде

$$K = (c\Delta x)^2 \left| \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 \right|^{1/2}$$

для трехмерного течения и

$$K = (c'\Delta x)^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \times \mathbf{v}) \right|$$

для двумерного; здесь Δx — пространственное разрешение (шаг сетки, а c и c' — постоянные, равные примерно $0,1 \div 0,2$. Эти выражения для K пригодны лишь в том случае, когда для пространственных производных используется разностная аппроксимация первого или второго порядка; в случае схем более высокого порядка необходимо использовать другие выражения для коэффициентов турбулентной вязкости.

Этот подход имеет очень много положительных сторон, позволяющих рекомендовать его; в частности, при таком моделировании не накладывается непосредственное ограничение на величину числа Рейнольдса, так как влияние мелкомасштабной турбулентности принимается во внимание. По-видимому, мелкомасштабную турбулентность следует учитывать подобным образом при решении всех задач теории турбулентности, когда исследователя интересуют детали поведения крупномасштабных структур и не интересуют их статистические свойства. Тем не менее используемые в настоящее время методы учета мелкомасштабных эффектов имеют ряд недостатков, в том числе применение произвольных моделей переноса турбулентности для мелкомасштабной составляющей движения и пренебрежение всеми стохастическими влияниями флуктуаций характеристик этой составляющей на генерацию флуктуаций в крупномасштабных структурах.

Казалось бы, основным преимуществом моделирования мелкомасштабных движений по сравнению с прямым численным моделированием является отсутствие каких-либо прямых ограничений на величину числа Рейнольдса в первом из этих подходов. В действительности это не так. Удовлетворительная точность схем замыкания для мелкомасштабной составляющей движения достигается лишь тогда, когда разделение течения на мелкомасштабную и крупномасштабную составляющие не оказывает заметного влияния на эволюцию крупномасштабных структур.

Рассмотрим теперь возможность прямого численного моделирования (четвертый подход) течения с очень большим числом Рейнольдса посредством искусственного уменьшения числа Рейнольдса до значения, при котором это течение можно моделировать с достаточной точностью на существующих ЭВМ. Ясно, что в этом модельном течении движения на всех масштабах не могут не измениться, однако может оказаться, что при уменьшении числа Рейнольдса достаточно крупномасштабные движения останутся неизменными. В самом деле, крупномасштабные характеристики турбулентных течений, по-видимому, не зависят от числа Рейнольдса, если от него не зависят граничные и начальные условия [5]. Этот вывод до некоторой степени подтверждается данными, приведенными на рис. 10.14. На рис. 10.14 показана эволюция распределений завихренности, соответствующих трем различным числам Рейнольдса и начальному распределению завихренности рис. 10.5.

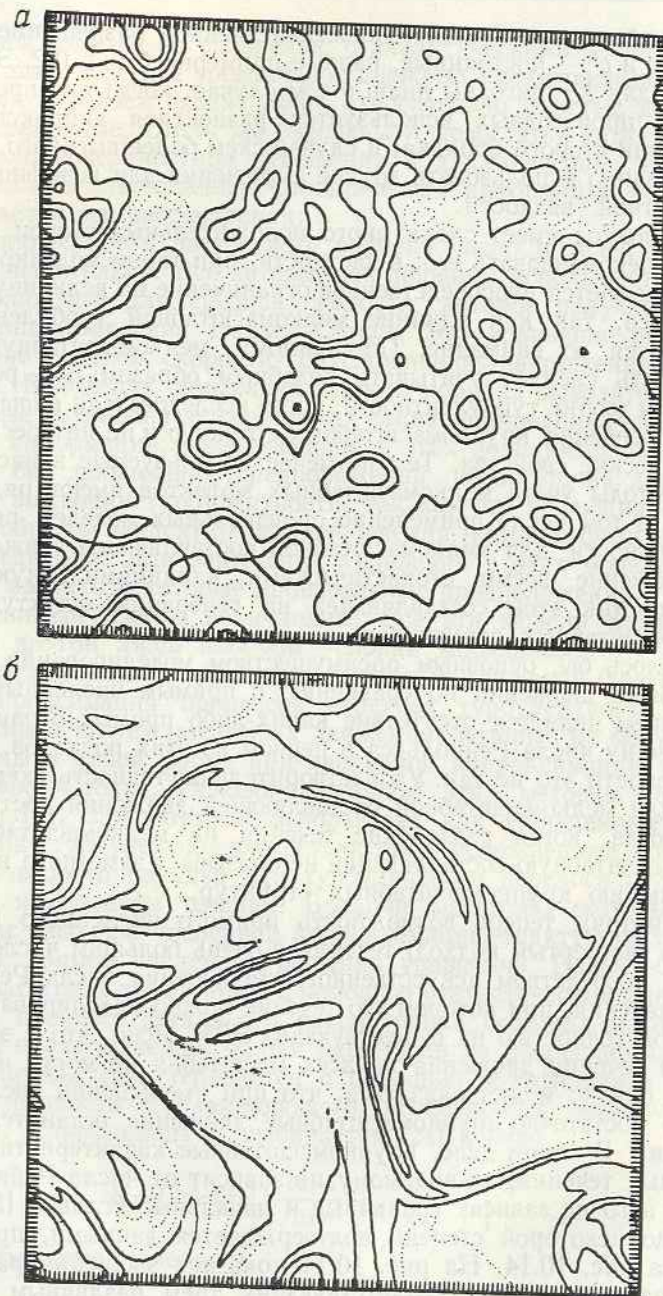
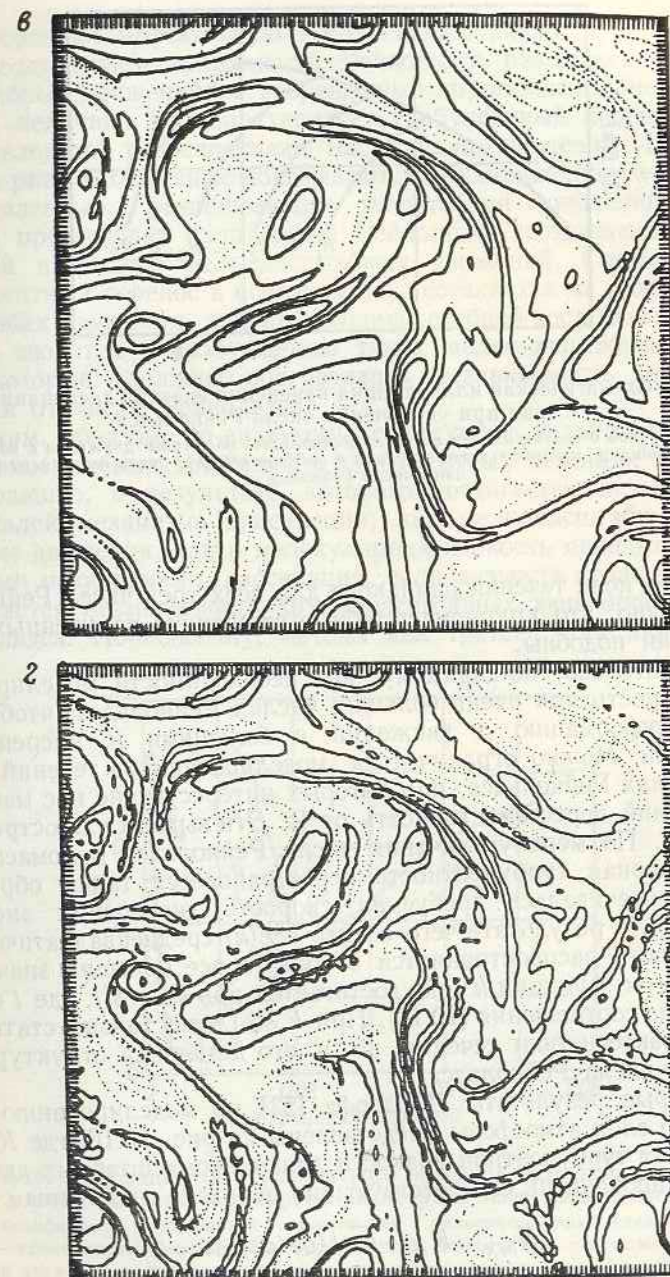


Рис. 10.14. Контурные диаграммы распределений
Расчеты при помощи спектрального метода, использующего 128^2 волновых чисел. *а* — на-
10.5–10.8); *б*, *в*, *г* — распределения завихренности при $t = 2$



Завихренности в двумерной турбулентности.

Чальное распределение завихренности (тождественное распределению для расчетов рис.
для чисел Рейнольдса $R = 138, 349$ и 1184 соответственно.

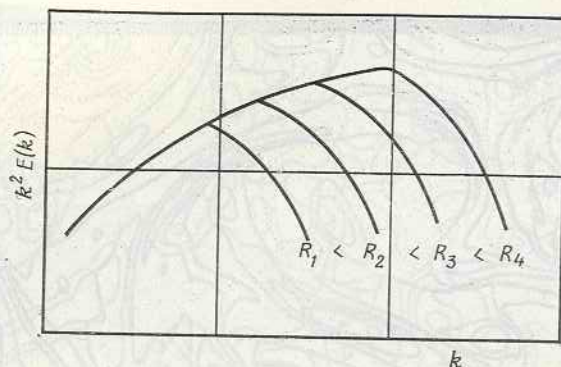


Рис. 10.15. Схематическая иллюстрация изменения спектра диссипации энергии при увеличении числа Рейнольдса.

Согласно гипотезе о независимости от числа Рейнольдса, масштабы движения с волновыми числами, меньшими максимального значения в спектре $k^2 E(k)$, почти не зависят от величины числа Рейнольдса.

Начальное поле течения одинаково для всех трех чисел Рейнольдса. Очевидно, что крупномасштабные структуры полученных распределений подобны.

Следовательно, по-видимому, нет необходимости моделировать турбулентность при очень больших числах Рейнольдса, чтобы получить информацию о движении с большими и умеренными масштабами. Можно ограничиться моделированием течений при таких числах Рейнольдса, при которых интересующие нас масштабы движений перестают зависеть от R . Эти выводы иллюстрирует рис. 10.15. По мере увеличения числа Рейнольдса маломасштабная трехмерная турбулентность перестраивается таким образом, чтобы обеспечивалась требуемая скорость диссипации энергии (разд. 10.3), в результате чего спектр $k^2 E(k)$ среднеквадратической завихренности распространяется в область все больших значений k . Максимум функции $k^2 E(k)$ достигается при $k \sim 1/l$, где l определяется из соотношения (10.10). При $k \leq 1/l$ не только статистические характеристики течения, но и его детальная структура не зависят от числа Рейнольдса.

Некоторые результаты Дирдорфа [23] по моделированию пограничного слоя атмосферы представлены на рис. 10.16, где K_m — коэффициент турбулентной вязкости для мелкомасштабных движений (нормированный соответствующим образом), величины

$$K_{MX} = K_m - \overline{u\omega} / (\partial \overline{u} / \partial z) \quad \text{и}$$

$$K_{MY} = K_m - \overline{v\omega} / (\partial \overline{v} / \partial z)$$

характеризуют эффективную турбулентную вязкость, обусловленную воздействием напряжений Рейнольдса разрешаемых мелкомасштабных движений на разрешаемые крупномасштабные движения, а величина K_0 характеризует турбулентный перенос тепла, обусловленный разрешаемыми масштабами движений. Приведенные на рис. 10.16 данные показывают, что напряжения Рейнольдса, обусловленные разрешаемыми масштабами движений, значительно превосходят напряжения Рейнольдса, создаваемые турбулентной вязкостью мелкомасштабных движений. Следовательно, турбулентный перенос в основном осуществляется на разрешаемых масштабах движения, а роль мелкомасштабной составляющей движения сводится к возбуждению таких мелкомасштабных движений, которые должны обеспечивать независимость диссипации энергии от числа Рейнольдса.

Таким образом, по-видимому, существует сильная тенденция крупномасштабных движений в турбулентных течениях к саморегулированию, в результате которого достигается независимость от деталей механизма диссипации; как мелкомасштабные турбулентные движения, так и молекулярная вязкость являются эффективными механизмами диссипации, если вязкость столь мала, что достигается независимость крупномасштабных движений от числа Рейнольдса. По-видимому, методы как третьей, так и четвертой

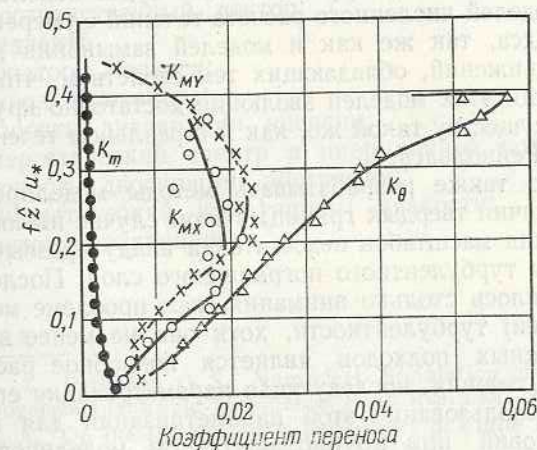


Рис. 10.16. Коэффициенты турбулентного переноса, использовавшиеся Дирдорфом [23] при моделировании пограничного слоя атмосферы.

K_m — коэффициент турбулентной вязкости для мелкомасштабных движений; K_{MX} , K_{MY} — эффективные коэффициенты турбулентной вязкости для разрешаемых мелкомасштабных движений, действующих на разрешаемые крупномасштабные движения вдоль направлений x и y соответственно; K_0 — коэффициент турбулентного переноса тепла, обусловленного воздействием разрешаемых мелкомасштабных движений на крупномасштабные движения.

группы могут обеспечить моделирование турбулентных течений при ограниченном разрешении масштабов; остается открытым вопрос о том, с какой эффективностью достигается инвариантность относительно разделения масштабов на мелкомасштабные и разрешаемые масштабы движений (для методов третьей группы) или же независимость от числа Рейнольдса (для методов четвертой группы).

10.6. ДАЛЬНЕЙШИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ

ЭВМ, которые появятся в 1980-х годах, по-видимому, будут превосходить современные ЭВМ по мощности не более чем на порядок. Поэтому ограничения на величину чисел Рейнольдса, подобные тем, которые существуют в настоящее время при численном моделировании, останутся в силе. Однако увеличение быстродействия на порядок можно использовать, чтобы увеличить соответственно объем статистической информации, а эта перспектива особенно существенна для задач моделирования неоднородной турбулентности.

По-видимому, наибольшие надежды при моделировании течений с большими числами Рейнольдса следует связывать с изучением других эффектов, подобных независимости моделирования от числа Рейнольдса. Эти эффекты можно будет использовать при построении моделей численного расчета течений с умеренными числами Рейнольдса, так же как и моделей замыкания для мелкомасштабных движений, обладающих тем свойством, что описываемая при помощи этих моделей эволюция достаточно крупных вихрей будет по существу такой же, как и в реальном течении с большим числом Рейнольдса.

Необходимо также разрабатывать методы моделирования течений при наличии твердых границ; в этом случае имеющаяся степень разрешения масштабов недостаточна ввиду чрезвычайной малости толщины турбулентного пограничного слоя. Последней проблеме не уделялось столько внимания, как проблеме моделирования (внутренней) турбулентности, хотя она не менее важна. Одним из возможных подходов является подробное рассмотрение малых сечений течения, последующая параметризация его свойств и, наконец, использование этой параметризации для получения граничных условий при крупномасштабном моделировании (как сделал Дирдорф [23], использовавший параметризацию пограничного слоя в моделях крупномасштабной общей циркуляции атмосферы).

В заключение отметим, что достигнут определенный прогресс в решении проблемы численного моделирования турбулентности. Тем не менее некоторые интересные и важные проблемы ждут своего решения и, по-видимому, будут решены в недалеком будущем.

ОТ АВТОРА

Эта работа выполнялась по контракту № N00014-72-C-0355 Управления исследований ВМС США.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

D	— стандартное отклонение;
E	— энергетический спектр;
k	— волновой вектор;
k_d	— волновое число, соответствующее колмогоровскому масштабу диссипации;
l, L	— размеры вихрей;
N	— число случайных событий;
n	— вектор с целочисленными компонентами;
P	— давление;
g	— случайная (гауссовская) переменная;
R	— число Рейнольдса;
t	— время;
u	— преобразование Фурье скорости v ;
$\bar{U}$	— средняя скорость;
$\mathbf{v}$	— вектор скорости;
$\bar{v}$	— среднеквадратическое значение скорости;
$\mathbf{x}$	— пространственный вектор;
∇	— градиент;
∇^2	— оператор Лапласа;
δ_{ij}	— символ Кронекера;
ε	— скорость диссипации энергии;
Φ_1	— энергетический спектр в инерционной подобласти;
η	— скорость диссипации энтропии;
ν	— кинематический коэффициент вязкости;
ω	— вектор завихренности.

ЛИТЕРАТУРА

- Orszag S. A., Patterson G. S., Numerical Simulation of Three-Dimensional Homogeneous Isotropic Turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 76—79 (1972).
- Orszag S. A., On the Resolution Requirements of Finite Difference Schemes, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 395—397 (1971).
- Orszag S. A., Israeli M., Numerical Simulation of Viscous Incompressible Flows, в книге: Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 6 (M. Van Dyke, W. G. Vincenti, J. V. Wehausen, eds), Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, 1974, p. 281—318.
- Kreiss H. O., Oliger J., Methods for the Approximate Solution of Time Dependent Problems, Monograph Number 10, GARP Publ. Service, World Meteorology Organization, 1973.

5. Herring J. R., Orszag S. A., Kraichnan R. H., Fox D. G., Decay of Two-Dimensional Homogeneous Turbulence, *J. Fluid Mech.*, **66**, 417—444 (1974).
6. Orszag S. A., Pao Y.-H., Numerical Computation of Turbulent Shear Flows, в книге: *Advances in Geophysics*, Vol. 18A (F. N. Frenkiel, R. E. Munn, eds), Academic Press, New York, 1974, p. 225—236.
7. Grant H. L., Stewart R. W., Moilliet A., Turbulence Spectra from a Tidal Channel, *J. Fluid Mech.*, **12**, 241—268 (1962).
8. Batchelor G. K., *The Theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, 1953. [Имеется перевод: Бэтчелор Дж. К., Теория однородной турбулентности. — М.: ИИЛ, 1955.]
9. Orszag S. A., Lectures on the Statistical Theory of Turbulence, в книге: *Fluid Dynamics* (R. Balian, J.-L. Peube, eds), Gordon and Breach, New York, 1977.
10. Grosch C. E., Orszag S. A., Numerical Solution of Problems in Unbounded Regions: Coordinate Transforms, *J. Comp. Phys.* (1977).
11. Deardorff J. W., A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Number, *J. Fluid Mech.*, **41**, 453—480 (1970).
12. Taylor G. I., Green A. E., Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones, *Proc. R. Soc., London*, **A158**, 499—521 (1937).
13. Orszag S. A., Numerical Simulation of the Taylor-Green Vortex, Computing Methods in Applied Science and Engineering Proceedings of the International Symposium, Pt. 2, Versailles, France, Springer, Berlin, 1974, p. 50—64.
14. Kraichnan R. H., Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence, *Phys. Fluids*, **10**, 1417—1423 (1967).
15. Saffman P. G., On the Spectrum and Decay of Random Two-Dimensional Vorticity Distributions at Large Reynolds Number, *Stud. Appl. Math.*, **50**, 377—383 (1971).
16. Kraichnan R. H., An Almost Markovian Galilean Invariant Turbulence Model, *J. Fluid Mech.*, **47**, 513—524 (1971).
17. Kraichnan R. H., The Structure of Isotropic Turbulence at Very High Reynolds Numbers, *J. Fluid Mech.*, **5**, 497—543 (1959).
18. Leith C. E., Atmospheric Predictability and Two-Dimensional Turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **28**, 145—161 (1971).
19. Prandtl L., Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *Z. Angew. Math. Mech.*, **5**, 136—139 (1925).
20. Herring J. R., Statistical Theory of Thermal Convection at Large Prandtl Numbers, *Phys. Fluids*, **12**, 39—52 (1969).
21. Launder B., Spalding D. B., *Lectures in Mathematical Models Turbulence*, Academic Press, New York, 1972.
22. Harlow F. H. (ed.), *Turbulence Transport Modeling*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, New York, 1973.
23. Deardorff J. W., A Three-Dimensional Numerical Investigation of the Idealized Planetary Boundary Layer, *Geophys. Fluid Dyn.*, **1**, 377—410 (1970).
24. Smagorinsky J., Manabe S., Holloway J. L., Numerical Results from a Nine-Level General Circulation Model of the Atmosphere, *Mon. Weather Rev.*, **93**, 727—768 (1965).
25. Kraichnan R. H., Isotropic Turbulence and Inertial Range Structure, *Phys. Fluids*, **9**, 1728—1752 (1966).

26. Patterson G. S., Orszag S. A., Numerical Simulation of Turbulence, *Atmos. Technol.*, **3**, 71—78 (1973).
27. Arakawa A., Computational Design for Long-Term Numerical Intergration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible Flow, Part 1, *J. Comput. Phys.*, **1**, 119—143 (1966).
28. Orszag S. A., Fourier Series on Spheres, *Mon. Weather Rev.*, **102**, 56—75 (1974).
29. Gottlieb D., Orszag S. A., *Numerical Analysis of Spectral Methods*, SIAM Monograph, Philadelphia, 1977.

Аппаратура, используемая в лабораторных измерениях турбулентности

В. СЭНДБОРН¹⁾

11.1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость измерения турбулентности возникает во многих задачах течения жидкости. Масштаб турбулентных пульсаций может изменяться в десятки и сотни раз по времени, амплитуде и/или пространству. Некоторое представление о многообразии временных масштабов, встречающихся в турбулентных движениях, может быть получено при рассмотрении рис. 11.1.

В лабораторных условиях рассматриваются только пульсации с частотой, превышающей $\sim 10^2 \text{ ч}^{-1}$. Крупномасштабные pulsa-

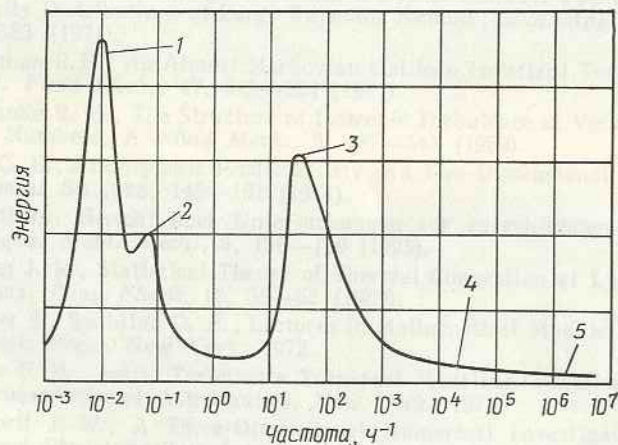


Рис. 11.1. Энергетический спектр атмосферной турбулентности [1].

1 — фронт бури; 2 — суточный цикл; 3 — турбулентность, зависящая от локальных условий; 4 — локально-изотропная турбулентность; 5 — вязкая диссипация.

¹⁾ V. A. Sandborn, College of Engineering, Colorado State University, Fort Collins, Colorado.

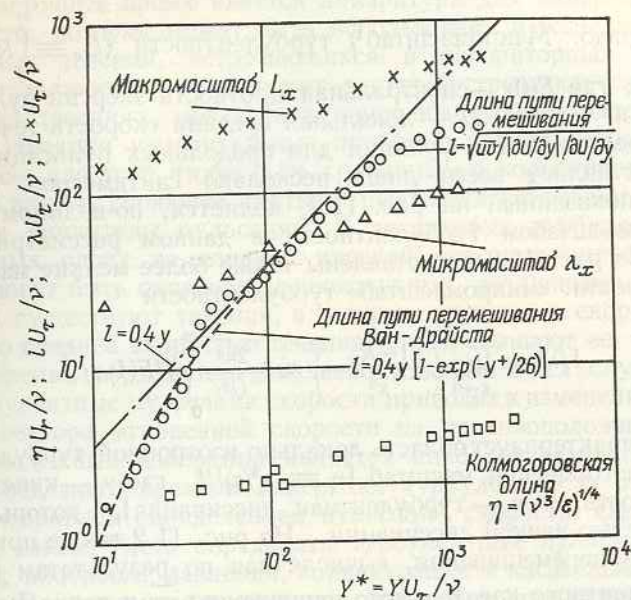


Рис. 11.2. Масштабы турбулентности вблизи стенки в пограничном слое.

ции меньшей частоты, очевидно, характерны для атмосферных движений. На рис. 11.1 энергия высокочастотных пульсаций, характерных для локально-изотропной турбулентности и вязкой диссипации, из соображений наглядности показана непропорционально большой. Однако несмотря на то, что высокочастотные пульсации по энергии на несколько порядков уступают низкочастотным, они представляют большой интерес в общей структуре турбулентности. Частоты, указанные на рис. 11.1, могут ввести в заблуждение, поскольку они определяются локальной средней скоростью течения. Диапазон частот, представленный на рис. 11.1, соответствует низким скоростям, характерным для атмосферных течений. Однако если локальная средняя скорость течения *сверхзвуковая*, то диапазон частот расширяется на несколько порядков. Таким образом, в лабораторных условиях представляют интерес временные масштабы турбулентных движений в диапазоне от 10^2 до 10^3 или 10^4 ч^{-1} .

Физический масштаб турбулентного движения связан с размерами потока. Для атмосферы возможные масштабы порядка нескольких километров. В лабораторных условиях в большинстве случаев масштабы движений порядка нескольких метров или меньше. На рис. 11.2 показаны различные масштабы турбулентности, вычисленные для «толстого» пограничного слоя (толщина 82,6 см, эквивалентное число Рейнольдса $3 \cdot 10^8$) в установке университета

шт. Колорадо. Макромасштаб¹⁾ турбулентности ($L_x \equiv \int_0^\infty R_x dx = UF(0)/4$, где $F(0)$ — спектральная плотность энергии пульсаций при нулевой частоте, U — локальная средняя скорость течения, а R_x — корреляционная функция для продольных пульсаций), как видно, составляет всего лишь несколько сантиметров. Макромасштаб, показанный на рис. 11.2, является, по-видимому, наибольшим масштабом турбулентности в данном рассматриваемом течении. На рис. 11.2 представлены также более мелкие масштабы турбулентности: «микромасштаб» турбулентности

$$1/\lambda_x^2 \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1-R_x}{x^2} \right) \approx \frac{2\pi^2}{U^2} \int_0^\infty f^2 F(f) df,$$

который характеризует область локально-изотропной турбулентности, и колмогоровский масштаб [$\eta \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, где ν — кинематическая вязкость, а ε — турбулентная диссипация], который связан с областью вязкой диссипации. На рис. 11.2 также приведена длина пути перемешивания, вычисленная по результатам измерений турбулентного касательного напряжения uv и локального градиента средней скорости

$$l = \left[\frac{\overline{uv}}{|dU/dy|(dU/dy)} \right]^{1/2}.$$

В лабораторных условиях могут быть созданы различные типы турбулентных течений, так что диапазон значений макромасштаба турбулентности может изменяться на порядок. Колмогоровский масштаб, который является нижним пределом, определяется в основном вязкими свойствами жидкости, так что его величина слабо зависит от условий течения.

В то время как общее представление об ожидаемых частоте и размерах турбулентных пульсаций может быть получено до измерений в лабораторных условиях, значительно труднее предопределить диапазон изменения их амплитуды. Энергетический спектр на рис. 11.1 имеет локальный максимум и, следовательно, большие амплитуды пульсаций в области, где турбулентность определяется локальными условиями течения. Фактическая величина турбулентных пульсаций зависит от источника, вызывающего турбулентность. Шероховатые поверхности и в особенности поверхности с переменной шероховатостью, например пластиковые ленты, используемые для моделирования полей, засеянных злаками, могут вызывать очень большие пульсации скорости.

¹⁾ В отечественной литературе более употребительным является термин «интегральный масштаб». — Прим. перев.

В настоящее время имеется аппаратура для измерения турбулентности, которая может быть использована в большинстве турбулентных течений, встречающихся в лабораторных условиях. Даже пульсации очень высоких частот, встречающиеся в сверхзвуковых течениях, могут быть измерены существующей аппаратурой. Имеются измерительные приборы, размер которых достаточно мал для того, чтобы быть сравнимым с колмогоровским масштабом длины. Наиболее жесткие требования возникают при определении амплитуды пульсаций. В дозвуковых турбулентных пограничных слоях на гладкой плоской пластине пульсации скорости могут быть определены несколькими различными методами. Однако существуют течения, в которых пульсации скорости сравнимы со средней скоростью течения или превышают ее, что делает их измерение трудным или даже невозможным. В тех случаях, когда турбулентные пульсации скорости приводят к изменению направления вектора мгновенной скорости на противоположное, проведение надежных измерений является наиболее затруднительным.

До недавнего времени измерения турбулентности ограничивались в основном определением пульсаций скорости. Однако необходимо также уметь определять турбулентные пульсации температуры, плотности, давления, концентрации и касательного напряжения. В несжимаемых течениях измерение пульсаций температуры не представляет каких-либо принципиальных трудностей. Напротив, в сжимаемых течениях в настоящее время, как правило, невозможно разделить пульсации температуры, плотности и давления. В большинстве исследований сверхзвуковых течений просто принимается, что пульсациями давления можно пренебречь. В действительности имеется очень мало данных по пульсациям плотности и давления. Измерения пульсаций концентрации были выполнены только в последние годы.

Характеристики турбулентных течений. Определение характеристик турбулентных течений является одной из наиболее сложных задач измерений в механике жидкости. Поскольку не существует удовлетворительной теории турбулентных течений, основную информацию о них дают измерения. Как уже отмечалось, измерительное устройство должно иметь очень большое быстродействие и очень малый размер с тем, чтобы обеспечивать достаточно подробную информацию о пульсациях скорости, температуры, плотности, давления, концентрации и касательных напряжений.

Пульсации скорости. В статистической теории турбулентности принимается, что скорость течения может быть представлена в виде суммы средней и пульсационной скоростей. Пульсационная скорость является существенно трехмерной, поэтому вводятся в рассмотрение три ортогональные составляющие пульсационной скорости. Если в уравнениях движения Навье — Стокса использо-

вать представление скорости в виде суммы скоростей осредненного и пульсационного движений, то получим систему уравнений, которые называются уравнениями Рейнольдса,

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i u_j} - \delta_{ij} p \right), \quad (11.1)$$

где U — скорость осредненного движения, а u — пульсационная скорость. В этих уравнениях член $\overline{\rho u_i u_j}$, содержащий пульсации скорости, подобен члену, описывающему напряжения, хотя он получен непосредственно из инерционных членов. Поэтому указанные члены в уравнениях движения получили название «турбулентных напряжений».

Обозначая компоненты пульсационной скорости в трех взаимно ортогональных направлениях через u , v и w , можно составить тензор турбулентных касательных напряжений

$$T_T = \rho \begin{vmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{vu} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{wu} & \overline{wv} & \overline{w^2} \end{vmatrix}. \quad (11.2)$$

Не только три составляющие $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ и $\overline{w^2}$ отличны от нуля, но также не равны нулю и члены, содержащие перекрестные произведения составляющих пульсационной скорости $\overline{uv}$, $\overline{vu}$, $\overline{uw}$, $\overline{wu}$, $\overline{vw}$ и $\overline{wv}$. Тензор турбулентных напряжений можно упростить, приняв $\overline{uv} = \overline{vu}$, $\overline{uw} = \overline{wu}$ и $\overline{vw} = \overline{wv}$. Для большинства изучаемых турбулентных течений имеет место симметрия (плоская или цилиндрическая), так что членами $\overline{uw}$ и $\overline{uw}$ можно пренебречь. В работе Сэндборна и Слогара [2] сообщается об измерениях составляющих тензора для турбулентного пограничного слоя. Эти измерения были проведены с помощью термоанемометра с нагретой нитью.

Для большинства течений со сдвигом скорости (в частности, для течения в пограничном слое [2]) было найдено, что перекрестное произведение $\overline{uv}$ является единственным пульсационным членом, который нужно учитывать в уравнении (11.1). Величины $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ и $\overline{w^2}$ играют существенную роль в процессах диффузии.

Для изучения турбулентных пульсаций скорости необходимо рассматривать «уравнение баланса турбулентной энергии» более высокого порядка (см. [2], стр. 326). В уравнения более высокого порядка входят не только компоненты тензора турбулентных напряжений (11.2), но и тройные корреляции $\overline{u^2 v^2}$, $\overline{v^3}$, $\overline{uw^2}$. Турбулентная диссипация

$$\varepsilon \equiv \nu \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \Big] \quad (11.3)$$

и корреляция пульсаций давления и скорости $\overline{up'}$ также входят в уравнение энергии. О прямом измерении всех членов, входящих в выражение для турбулентной диссипации, в литературе не сообщается. Значения турбулентной диссипации были определены только для течений, для которых можно принять некоторые упрощающие предположения, такие, как допущение о локальной изотропности. Значения колмогоровского масштаба, приведенные на рис. 11.2, были вычислены в предположении, что величину ε можно получить из соотношений, справедливых для локально-изотропной турбулентности. Это допущение является сомнительным для малых значений yU_τ/ν .

С определением турбулентных пульсаций скорости в лабораторных условиях связан ряд статистических характеристик турбулентности, таких, как распределения вероятностей, спектральные распределения, перемежаемость, а также автокорреляции и корреляции. Подробности электронной обработки сигналов турбулентных наблюдений приводятся в гл. VIII работы [3].

Пульсации температуры. Во многих случаях в потоке наряду с пульсациями скорости имеют место и пульсации температуры. Анализ уравнения энергии показывает, что взаимная корреляция вертикальной составляющей пульсационной скорости v и пульсации температуры T' , т. е. $\overline{vT'}$, описывает важный механизм турбулентного переноса энергии. Для медленных течений имеется значительное количество экспериментальных данных по пульсациям температуры. В сжимаемых течениях определение пульсаций температуры затруднено тем обстоятельством, что большинство датчиков измеряет температуру торможения, а не статическую температуру. Для сжимаемых течений задача осложняется еще и тем, что пульсации температуры приводят к появлению пульсаций плотности и давления, что следует из уравнения состояния.

Пульсации плотности и давления. Как отмечалось выше, в некоторых течениях могут наблюдаться пульсации плотности и давления. Конечно, маловероятно, что в течениях жидкости может возникнуть необходимость рассматривать пульсации плотности. Для газов температура, плотность и давление связаны уравнением состояния. До недавнего времени не было возможности проводить прямые измерения пульсаций плотности и давления в поле течения. Большое количество данных было получено при измерении пульсаций давления на поверхности тел. В настоящее время разрабатываются методы измерения пульсаций давления в поле течения; они будут весьма ценными для дальнейших исследований.

В сжимаемых течениях важно определять пульсации плотности. В сверхзвуковых течениях одними из основных являются

пульсации расхода. Датчики теплового потока (анемометры с нагретой нитью или пленкой) непосредственно реагируют на пульсации расхода. Основная трудность состоит в том, что необходимо выделить пульсации плотности, чтобы можно было определить пульсации скорости. В некоторых частных случаях, например в невозмущенном течении в сверхзвуковой аэродинамической трубе, удается установить специфический характер пульсаций плотности. В будущем развитие оптических методов позволит существенно улучшить определение этих пульсаций.

Пульсации концентрации. В отдельных случаях могут быть выполнены измерения пульсаций концентрации. До недавнего времени наибольший интерес представляло измерение средних значений концентраций, так что в литературе имеется мало данных измерений пульсаций концентрации. Появление лазерных источников света позволит существенно улучшить качество измерений таких величин, как пульсации концентрации аэрозолей. Как и в случае пульсаций температуры, здесь представляют интерес корреляции пульсаций скорости и концентрации.

Уравнение диффузии можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i c'). \quad (11.4)$$

Взаимная корреляция пульсаций скорости и концентрации является тем турбулентным членом, который следует учитывать в уравнении диффузии. Прямые измерения этого члена обычно не производились, хотя недавно были развиты методы, позволяющие осуществить такие измерения.

Пульсации касательного напряжения на поверхности. В последние годы в литературе появились сообщения об экспериментах по определению пульсаций касательного напряжения на поверхности. Хотя в ранних исследованиях пограничного слоя принималось, что течение вблизи стенки является полностью установившимся, теперь стало очевидным, что на стенке могут иметь место большие пульсации локальных касательных напряжений. Изучение перемещения наносов позволяет сделать вывод, что такое перемещение происходит главным образом под действием больших пульсаций касательного напряжения на стенке. Об изменении по времени касательного напряжения на стенке, по-видимому, свидетельствует появление асимметричного сигнала, который содержит периоды большого значения трения.

11.2. ИЗМЕРЕНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ СКОРОСТИ

Существует ряд методов определения турбулентных пульсаций скорости. Раньше для измерения турбулентных пульсаций скорости широко использовались термоанемометры с нагретой нитью или

пленкой. Успехи, достигнутые за последние годы в разработке лазерных измерителей скорости, позволили значительно усовершенствовать метод измерения турбулентных пульсаций скорости, в котором используются трассирующие частицы. Метод, основанный на электрохимических явлениях, представляет особую ценность при проведении измерений в жидкости. Для определения турбулентных пульсаций скорости были также разработаны методы, основанные на измерении подъемной силы и сопротивления тел. Многие приборы, пригодные в основном для измерения крупномасштабных турбулентных пульсаций, такие, как акустические анемометры, вертушки и т. п., также могут оказаться полезными в некоторых лабораторных приложениях.

11.2.1. Тепловые методы

Термоанемометры с нагретой нитью используются для измерения турбулентности в течение последних тридцати лет. Обзор термоанемометрических методов на раннем этапе их разработки и применения выполнен Шубауэром и Бергерсом [4]. В последнее время были разработаны термоанемометры с нагретой пленкой для измерения турбулентности в жидкостях. Подробный анализ всех аспектов применения таких приборов содержится в монографии Сэндборна [3]. В этой же работе получено соотношение для кругового цилиндра, связывающее потери тепла со скоростью потока.

Режимы работы. Датчик с нагретой нитью может работать в режиме постоянного тока или постоянной температуры. В режиме постоянного тока, который можно было бы также назвать режимом постоянного среднего сопротивления, по мере изменения скорости течения ток регулируется таким образом, чтобы электрический мост был все время уравновешен, и тем самым поддерживается среднее сопротивление чувствительного элемента постоянным. В режиме постоянной температуры, который можно назвать также режимом постоянного мгновенного сопротивления, для уравновешивания мостовой схемы используется усилитель с обратной связью. Датчики пленочного типа обычно используются в режиме постоянной температуры из-за особенностей их частотной характеристики.

Если в турбулентный поток воздуха поместить нагретую нить, то отводимый от нее тепловой поток будет испытывать колебания соответственно турбулентным пульсациям. Как показано в работе [3], можно приближенно принять, что нагретая нить реагирует на изменения как система первого порядка¹⁾. Частотная характеристика

¹⁾ Т. е. система, в которой процесс описывается дифференциальным уравнением первого порядка. — Прим. перев.

тика вольфрамовой нити диаметром 5 мкм является почти идеальной приблизительно до 70 Гц. Для частот выше 70 Гц сигнал нити затухает приблизительно как для системы первого порядка. Пленочный датчик реагирует на изменения как система более высокого порядка [3, 6]. Частотные характеристики проволочных и пленочных датчиков сравниваются на рис. 11.3.

Для измерения высокочастотных турбулентных пульсаций следует улучшить частотную характеристику проволочного датчика. Конечно, существуют течения (например, атмосферные течения или течения жидкостей), для которых полоса пропускания

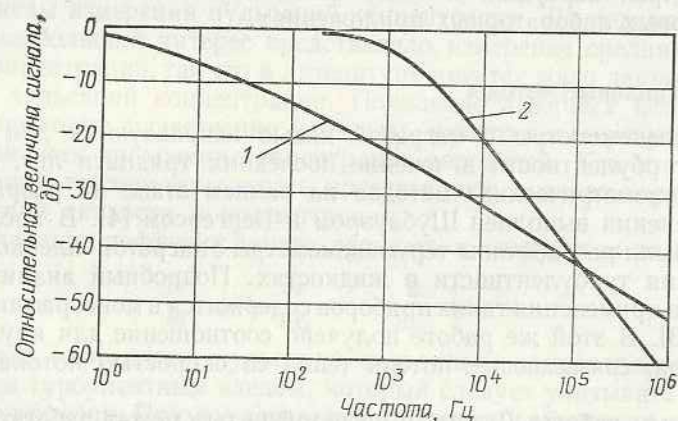


Рис. 11.3. Частотная характеристика проволочного и пленочного датчиков [5].
1 — пленочный датчик; 2 — проволочный датчик.

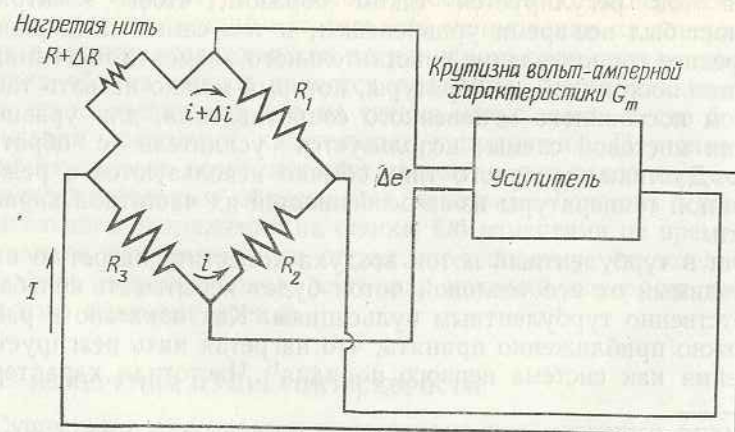


Рис. 11.4. Схема термоанемометра постоянной температуры.

порядка 70 Гц является достаточной для определения интенсивности турбулентности.

Частотные характеристики проволочного или пленочного датчика могут быть улучшены путем применения электронной аппаратуры. Как отмечалось в работе [3], наличие тепловой инерции $c_p(\partial T_w/\partial t)$ приводит к ухудшению частотной характеристики датчика. Если температуру металлической нити анемометра T_w поддерживать постоянной, то инерционный член будет равен нулю. Для поддержания температуры нити постоянной может быть использована электронная система. Нить или пленка используется в качестве элемента мостовой схемы, как, например, показано на рис. 11.4. Разбаланс моста возникает при изменении сопротивления нити вследствие изменения теплоотдачи. Для обнаружения разбаланса моста в электрическую цепь вводится усилитель постоянного тока с обратной связью. Усилитель воспринимает разбаланс и в свою очередь так изменяет ток в мостовой цепи, чтобы сопротивление нити оставалось неизменным. Поддержание постоянного сопротивления нити эквивалентно поддержанию нити при постоянной температуре. Частотная характеристика прибора такого типа, который называется термоанемометром постоянной температуры, полностью определяется тем, насколько быстро электронная схема может уравновесить мост. Выпускаются термоанемометры, работающие в режиме постоянной температуры, которые имеют удовлетворительную частотную характеристику до частот, превышающих 50 кГц. Подробную информацию об устройстве термоанемометрических систем постоянной температуры читатель может найти в работе [3].

Термоанемометр с нагретой нитью. Частотная характеристика нагретой нити может быть улучшена также путем применения аналоговых или цифровых схем. При работе в режиме постоянного тока для увеличения амплитуды сигнала от нагретой нити при высоких частотах могут быть использованы аналоговые электронные схемы. Величина сигнала от нити изменяется по частоте приблизительно как для системы первого порядка, так что применение схем, у которых коэффициент усиления растет с увеличением частоты как для системы первого порядка [7], позволит компенсировать затухание сигнала нити. Отметим, что можно использовать более сложные аналоговые электронные схемы для компенсации погрешностей сигнала более высокого порядка [3]. Функционирование аналоговых систем компенсации погрешностей сигнала также рассматривается в работе [3].

Сэндборн [3] показал, что отношение чувствительности нагретой нити в режиме постоянного тока (когда среднее сопротивление нити поддерживается постоянным путем изменения тока, так что оно не зависит от осредненного течения) к ее чувствительности в режиме

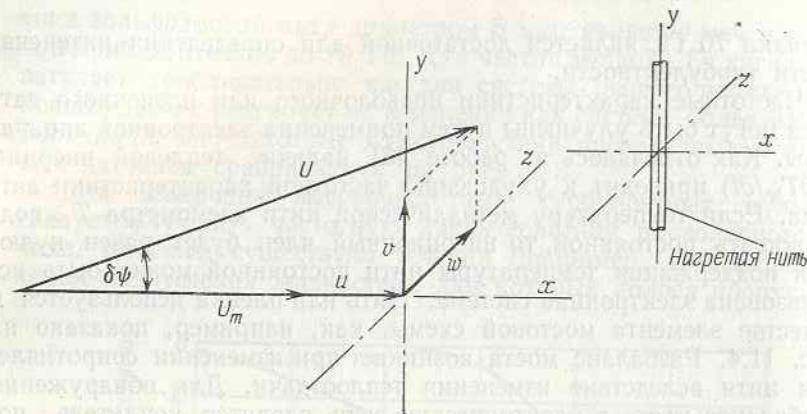


Рис. 11.5. Вектор мгновенной скорости в трехмерном турбулентном течении.

постоянной температуры дается выражением

$$\frac{de \text{ (режим постоянного тока)}}{de \text{ (режим постоянной температуры)}} = 2 \left(\frac{R - R_a}{R_a} \right). \quad (11.5)$$

Здесь R — сопротивление нити в нагретом состоянии, R_a — сопротивление нити в холодном состоянии (т. е. при температуре окружающей среды). Для большинства материалов, из которых изготавливаются нити, это отношение сопротивлений не превышает 0,5. Вольфрамовая нить начинает окисляться при температуре порядка 570 К, что соответствует $R \approx 1,6 R_a$. Нити из платиновых сплавов нагреваются докрасна при $R = 1,25 R_a$ и выходят из строя, прежде чем достигается величина $R = 1,5 R_a$. Таким образом, чувствительность нити при работе в режимах постоянного тока и постоянной температуры оказывается приблизительно одинаковой.

Если нагретую нить или пленку (рис. 11.5) поместить в трехмерный турбулентный поток перпендикулярно к направлению основного течения, то она будет реагировать главным образом на пульсации скорости в направлении этого течения [3]. Основное ограничение состоит в том, что пульсационная скорость должна быть много меньше средней скорости. В тех случаях, когда пульсационная составляющая имеет тот же порядок, что и средняя скорость, выходной сигнал не поддается простой интерпретации. Если металлическая нить термоанемометра на рис. 11.5 имеет наклон относительно направления осредненного течения, то выходной сигнал прибора пропорционален составляющей скорости в направлении осредненного течения и перпендикулярной к ней составляющей в плоскости, содержащей среднюю скорость и нить.

Нагретая нить или пленка, работающие в режиме постоянной

температуры, имеют тарировочную кривую типа показанной на рис. 11.6. Выходным сигналом термоанемометра является напряжение на нити (пленке), который используется для поддержания ее температуры постоянной при изменении скорости. Здесь принимается, что следует учитывать реакцию нити только на пульсации скорости. Реакция нити на пульсации температуры и плотности будет рассмотрена в следующих разделах.

Принимая, что выходной сигнал нагретой нити пропорционален продольной составляющей пульсационной скорости, для вычисления $(\bar{u}^2)^{1/2}$ можно использовать тарировочную кривую напряжение — скорость. Для вычисления среднеквадратического значения или среднего значения квадрата пульсационной скорости необходимо измерить две электрические величины: среднее значение напряжения постоянного тока и среднеквадратическое значение напряжения переменного тока. Измерение среднего напряжения E_m дает рабочую точку на тарировочной кривой на рис. 11.6. Принимается, что среднеквадратическое значение напряжения $(\bar{e}^2)^{1/2}$ распределено симметрично относительно среднего напряжения E_m . Предположение о симметрии может приводить к ошибкам, если сами пульсации несимметричны относительно среднего значения. Зная положение точек $(\bar{e}^2)^{1/2}$ на тарировочной кривой, можно найти величину $(\bar{u}^2)^{1/2}$ на шкале скорости. Среднее значение скорости U_m определяется серединой отрезка $(\bar{u}^2)^{1/2}$. Если тарировочная кривая линейна, то ошибки, связанные с несимметричностью, возникать не будут.

На практике для нахождения скорости по выходному сигналу термоанемометра с нагретой нитью обычно используются не графические методы, а эмпирические соотношения. Общий подход со-

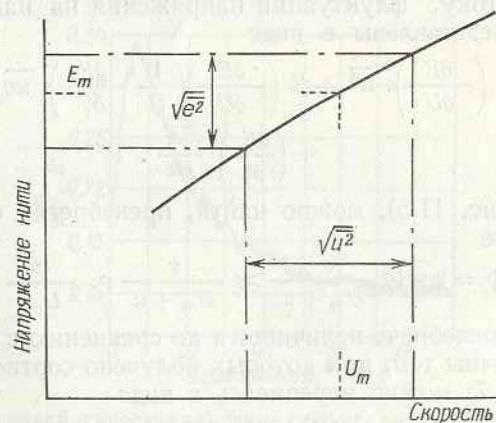


Рис. 11.6. Определение пульсаций скорости по показаниям термоанемометра с нагретой нитью.

стоит в том, чтобы провести локальную линеаризацию тарировочной кривой и связать флуктуации напряжения с флуктуациями скорости соотношением

$$(\bar{e}^2)^{1/2} = \left(\frac{\partial E}{\partial U} \right)_{E_m} (\bar{u}^2)^{1/2}, \quad (11.6)$$

где $(\partial E / \partial U)_{E_m}$ — наклон тарировочной кривой в точке E_m . Из этого соотношения следует, что тарировочная кривая должна сниматься достаточно точно, чтобы можно было найти первую производную в заданной точке. Это требование одинаково необходимо независимо от того, линеаризуется ли тарировочная кривая с помощью электронной аппаратуры или нет, поскольку производная совпадает с константой в уравнении линеаризованной тарировочной кривой.

Уравнение (11.6) является общим почти для всех методов измерений физических величин, зависящих от времени. Например, при измерениях не термоанемометром с нагретой нитью, а термометром сопротивления в уравнении (11.6) скорости U и u следует заменить на T и T' . В современных аналоговых устройствах для упрощения тарировки используются линеаризаторы. В этом случае линеаризованная тарировочная кривая имеет постоянный наклон $(\partial E / \partial U)$, не зависящий от величины E_m . При использовании нагретых нитей настройка линеаризатора требует подбора констант в эмпирической зависимости по данным тарировки отдельно для каждой конкретной нити. Наиболее точным методом определения констант является подбор первой производной тарировочной кривой, поскольку эта производная является важным параметром в уравнении (11.6).

Аналогично уравнению (11.6) для нити, расположенной нормально к потоку, флуктуации напряжения на наклонной нити могут быть представлены в виде

$$\bar{e}^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial U} \right)^2 \bar{u}^2 + 2 \left(\frac{\partial E}{\partial U} \right) \left(\frac{1}{U} \frac{\partial E}{\partial \psi} \right) \bar{uv} + \left(\frac{\partial E}{\partial \psi} \right)^2 \frac{\bar{v}^2}{U^2}. \quad (11.7)$$

Угол $\delta\psi$ (рис. 11.5), можно найти, пренебрегая составляющей w , по формуле

$$\delta\psi = \arctg \frac{v}{U_m + u} \approx \frac{v}{U_m + u} \approx \frac{v}{U_m}. \quad (11.8)$$

Здесь можно пренебречь величиной u по сравнению с U_m . Эти допущения аналогичны тем, при которых получено соотношение (11.6). Уравнение (11.7) можно переписать в виде

$$e = \frac{\partial E}{\partial U} u + \frac{\partial E}{\partial \psi} \frac{v}{U_m}. \quad (11.9)$$

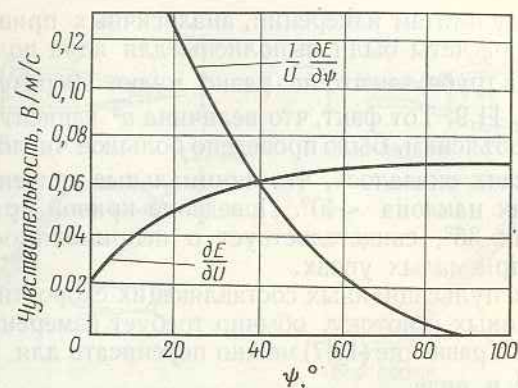


Рис. 11.7. Чувствительность нагретой нити к пульсациям скорости и углу наклона.

Величины, входящие в уравнение (11.9), можно определить из полученных экспериментально тарировочных кривых путем измерения дифференциалов величин. На рис. 11.7 приведены типичные характеристики $\partial E / \partial U$ и $(1/U)(\partial E / \partial \psi)$, полученные таким путем. Сравнение членов в уравнении (11.9) показывает, что с уменьшением угла наклона член $(1/U)(\partial E / \partial \psi)$ растет значительно быстрее, чем $\partial E / \partial U$ уменьшается. Вследствие этого выходной сигнал от нагретой нити при уменьшении наклона нити будет усиливаться. На рис. 11.8 приведена полученная экспериментально зависимость величины выходного сигнала от угла наклона нагретой нити относительно потока.

Проверка правильности проведенного выше анализа была выполнена путем вычисления составляющей $\bar{v}^2$ в зависимости от угла

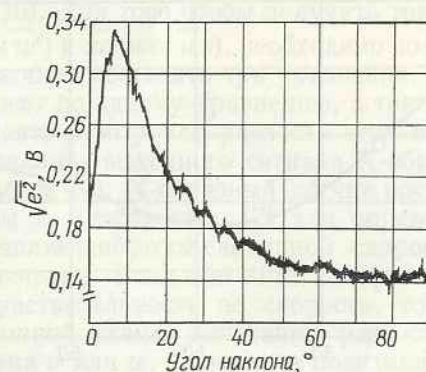


Рис. 11.8. Среднеквадратическое значение сигнала нагретой нити в зависимости от угла наклона к направлению течения.

наклона по результатам измерений, аналогичных приведенным на рис. 11.8. Эти расчеты были выполнены для ядра полностью развитого течения в трубе, так что $\overline{uv}$ равно нулю. Их результаты приведены на рис. 11.9. Тот факт, что величина $\overline{v^2}$ зависит от угла наклона, трудно объяснить. Было проведено большое число измерений, и во всех случаях оказалось, что минимальные значения $\overline{v^2}$ имеют место при углах наклона $\sim 40^\circ$. Поведение кривой при углах наклона, меньших 35° , свидетельствует о неприменимости данного приближения при малых углах.

Определение пульсационных составляющих скорости с помощью нитей, наклоненных к потоку, обычно требует измерений при трех углах наклона. Уравнение (11.7) можно переписать для измеренного напряжения $\overline{e^2}$ в виде

$$\overline{e^2} = S_u^2 \overline{u^2} + 2S_u S_v \overline{uv} + S_v^2 \overline{v^2}, \quad (11.10)$$

где $S_u = \partial E / \partial U$, $S_v = (1/U)(\partial E / \partial \psi)$ и $\overline{uv}$ — корреляция между двумя составляющими скорости. Здесь необходимо определить три турбулентные величины. Для случая рис. 11.9 можно положить $\overline{uv} = 0$. Составляющая $\overline{u^2}$ пульсационной скорости может быть вычислена по измерениям, когда нить расположена нормально к потоку ($\partial E / \partial \psi = 0$ при $\psi = 90^\circ$). Для течений, в которых $\overline{uv}$ не равно нулю, измерения можно провести при углах наклона нити $+40^\circ$, -40° и 90° . Если влиянием державки можно пренебречь, то $S_{u+40} = S_{u-40}$ и $S_{v+40} = S_{v-40}$. По результатам измерения напряжения выходного сигнала для трех углов наклона можно определить составляющие пульсационной скорости путем решения системы из трех уравнений. Этот метод измерения турбулентных пульсаций требует тарировки нагретой нити по скорости

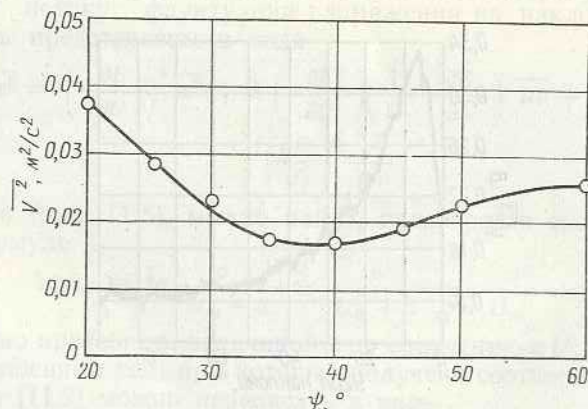


Рис. 11.9. Значения $\overline{v^2}$ в зависимости от угла наклона нити.

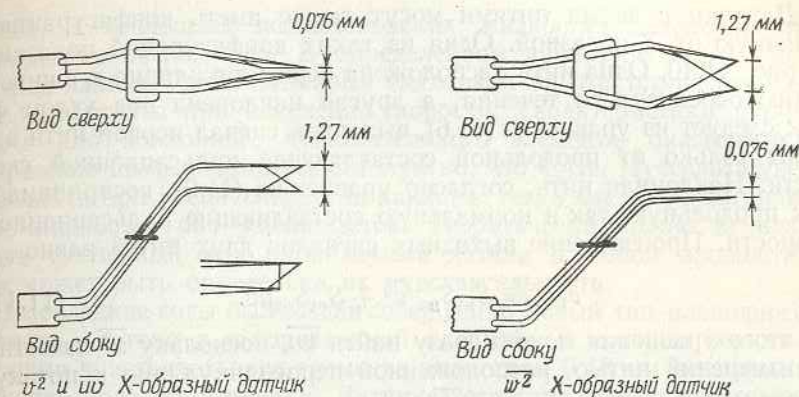


Рис. 11.10. Проволочные датчики, применяемые для измерения турбулентных пульсаций скорости.

при трех углах наклона и тарировки по углу при двух значениях скорости.

Определение пульсационных составляющих скорости, нормальных к направлению осредненного течения, и турбулентных касательных напряжений $\overline{uv}$ или $\overline{uw}$ производится с помощью одной наклонной или двух перекрещенных нитей (X-образного термоанемометра). На рис. 11.10 показаны типичные конструкции датчиков, чувствительным элементом которых является нагретая нить. X-образные термоанемометры применяются в тех случаях, когда трудно осуществить повороты датчика. В X-образном датчике нити располагаются под углом $+\psi$ и $-\psi$. Нити работают точно так же, как и одна наклонная нить, так что к ним также применимо соотношение (11.10). Для того чтобы получить три неизвестные величины $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ (или $\overline{w^2}$) и $\overline{uv}$ (или $\overline{uw}$), необходимо по выходному сигналу X-образного датчика составить три уравнения. Выходные сигналы каждой нити дают по одному уравнению, а третье уравнение получается, если взять сумму или разность этих выходных сигналов. Подробности анализа выходного сигнала X-образного датчика содержатся в работе [3]. X-образный датчик впервые был использован Шубауэром и Клебановым [7] для определения мгновенных значений составляющей пульсационной скорости, нормальной к направлению течения. Если обе нити X-образного датчика имеют одинаковую чувствительность по скорости, то полученная с помощью электронной схемы вычитания разность сигналов прямо пропорциональна v или w . Однако на практике трудно обеспечить полную идентичность двух нитей. Трудности, встречающиеся при измерениях X-образными датчиками, и погрешности этих измерений обсуждаются в работе [3].

Датчики с двумя нитями могут также иметь конфигурацию, отличную от Х-образной. Одна из таких конфигураций показана на рис. 11.10. Одна нить расположена перпендикулярно к направлению осредненного течения, а другая наклонена под углом ψ . Как следует из уравнения (11.6), выходной сигнал первой нити зависит только от продольной составляющей пульсационной скорости. Наклонная нить, согласно уравнению (11.9), воспринимает как продольную, так и нормальную составляющие пульсационной скорости. Произведение выходных сигналов двух нитей равно

$$\overline{e_1 e_2} = S_{u1} S_{u2} \overline{u^2} + S_{v1} S_{v2} \overline{uv}. \quad (11.11)$$

Из этого уравнения можно сразу найти $\overline{uv}$, поскольку $\overline{u^2}$ известно из измерений нитью, расположенной перпендикулярно к потоку. Далее можно найти значение $\overline{v^2}$, зная средний квадрат выходного сигнала наклонной нити, поскольку $\overline{u^2}$ и $\overline{uv}$ уже известны. Эта модификация Х-образного датчика позволяет получить лучшую точность при определении $\overline{uv}$ по сравнению с той, которая получается при решении системы трех уравнений.

Пленочные термоанемометры. Настоящее обсуждение измерений турбулентных пульсаций термоанемометром с нагретой нитью справедливо как для газов, так и для жидкостей. Пленочные термоанемометры широко используются при измерении в жидкостях, так как они более прочны и могут быть покрыты тонким слоем кварца. Отвод тепла от пленочного датчика цилиндрического типа приблизительно такой же, как от нагретой нити. Подробное исследование чувствительности пленочных датчиков проведено Ричардсоном и др. [8] (см. также работу [3]). Основная трудность при измерении турбулентности в воде связана с изменением тарировки чувствительного элемента вследствие загрязнений. Маккиви [9] показал, что влияние загрязнения приблизительно аналогично уменьшению разности температур между чувствительным элементом и жидкостью. Таким образом, изменение чувствительности можно учесть путем тарировки чувствительного элемента при различных перепадах.

Пленочные датчики могут быть изготовлены практически любой требуемой формы. С целью уменьшения влияния загрязнения использовались датчики, имеющие форму конуса и клина. К сожалению, в случае изменения теплоотдачи по поверхности датчика могут возникать дополнительные трудности. Беллхауз и Расмуссен [10] показали, что при неравномерной теплоотдаче наличие подложки датчика может приводить к появлению сигнала на очень низких частотах.

В работе Фрайе и Шварца ([11] сообщается о применении пленочных термоанемометров при измерениях в не-newтоновских жид-

костях. В некоторых не-newтоновских жидкостях интенсивность теплоотдачи очень мала. В определенном диапазоне чисел Рейнольдса данные Фрайе и Шварца указывают на отсутствие изменения теплоотдачи при изменении скорости. Характеристики теплоотдачи для наклонного чувствительного элемента оказываются совершенно необычными: было получено, что число Нуссельта увеличивается при увеличении угла наклона, тогда как для newтоновских жидкостей оно уменьшается. Теоретически можно использовать пленочный или проволочный датчик в любой жидкости, если может быть определена их чувствительность.

В последние годы был создан совершенно новый тип пленочного датчика — датчик с «расщепленной пленкой», в котором верхняя половина чувствительного элемента диаметром 0,15 мм не связана с нижней половиной пленки. Датчик этого типа весьма чувствителен к углу наклона. Суммарная теплоотдача от двух пленок пропорциональна местной скорости течения. Разность тепловых потоков двух пленок оказалась пропорциональной углу наклона течения [12]. Отношение тепловых потоков также пропорционально углу наклона. В литературе сообщалось о трудностях измерений датчиком с расщепленной пленкой вблизи поверхности в пограничном слое. Без сомнения, необходимо развивать технику измерений этим новым инструментом.

11.2.2. Методы наблюдения за трассирующими частицами

Для исследования турбулентного движения использовался ряд методов наблюдения за трассирующими частицами. Эти методы основываются на конвективном переносе трассирующих частиц в турбулентном движении. Наиболее перспективными из них являются методы измерения с современными лазерными измерителями скорости. Трассирующие частицы с успехом используются не только для определения скорости, но и для визуализации потока.

Одна из наиболее ранних попыток измерения турбулентности с помощью трассирующих частиц описана в работе Фейджа и Тауненда [13]. Эти авторы использовали ультрамикроскоп для наблюдения за движением очень мелких частиц в потоке воды. Визуализация таких частиц осуществляется с помощью интенсивного светового луча и темного фона. Для наблюдения деталей течения потока воды в трубе применялся микроскоп с увеличением 50 и более. Появление частиц обнаруживалось по вспышкам света в фокусе микроскопа. Для измерения скорости объектив микроскопа перемещался в направлении движения частиц. Объектив был установлен на эксцентрично расположенном вращающемся диске, так что его ось совмещалась с осью микроскопа один раз за полный оборот. Когда частица казалась неподвижной, скорость ее можно было определить, зная скорость вращения объектива. Этот ме-

тод позволяет найти максимальную и минимальную скорости турбулентного потока в данной точке. С помощью микроскопа также можно было определить направление движения частиц. Эти измерения дали первую информацию о закономерностях турбулентного движения.

Трассирующие частицы обычно много крупнее молекул жидкости, поэтому они не повторяют точно мелкомасштабные движения жидкости. Обычно принимается, что движение трассирующей частицы описывается уравнением первого порядка

$$\frac{dU_p}{dt} = -\frac{1}{\tau_p} (U - U_p), \quad (11.12)$$

где U_p — скорость частицы, U — скорость жидкости, а τ_p — постоянная времени для движения частицы. Решение этого уравнения первого порядка имеет вид

$$U_p = U + (U_{p,0} - U) e^{-t/\tau_p}, \quad (11.13)$$

где $U_{p,0}$ — начальная скорость частицы. Если частица имеет сферическую форму, то можно рассчитать ее сопротивление методом Стокса и найти постоянную времени. Для вязких стоксовских течений постоянная времени равна $m/3\pi\eta d$, где d — диаметр сферы, m — масса, η — вязкость жидкости. Измерения Буро [14] дали величину $m/6,6\eta d$ для алюминиевых чешуек толщиной 1 мкм, которые имели форму квадрата со стороной 4 мкм. Для постоянной времени при движении алюминиевых чешуек в воздухе он получил значение около 67 мкс. Такие чешуйки реагируют на сунусоидальное возмущение с частотой до 2500 Гц.

Лазерный анемометр. Наибольший прогресс в измерении скорости за последние годы характерен для оптических методов, в которых используется рассеяние света. Их применение стало возможным вследствие открытия принципа «усиления света с помощью вынужденного излучения», т. е. лазерного источника света. В принципе лазер не отличается от электронного генератора гармонических колебаний с усилением и обратной связью, за исключением того, что лазер работает в диапазоне частот $10^{14} \div 10^{16}$ Гц (излагаемые здесь сведения заимствованы из работы [15]). Основные особенности лазера — высокая интенсивность, монохроматичность и направленность выходящего луча. Электромагнитное излучение испускается при переходе атомов вещества с более высокого энергетического уровня на более низкий. Принцип действия лазера состоит в «накачке», или возбуждении, атомов вещества таким образом, чтобы выбранный переход имел больше атомов на верхнем энергетическом уровне, чем на нижнем. При вынужденном излучении возбужденных атомов происходит уси-

ние электромагнитной волны, которая уже существует в веществе. Излучение атомов совпадает по фазе с существующей электромагнитной волной, т. е. излучаемый свет является когерентным. В принципе лазер представляет собой резонатор, так что генерируемые им частоты ограничены модами резонатора. Это ограничение приводит к высокой степени пространственной когерентности. Длина излучаемой волны определяется структурой энергетических уровней активного вещества лазера, которым может быть газ или твердый кристалл. Используя различные материалы, можно получить излучение в широком диапазоне частот.

Лазерным анемометром измеряют скорости микроскопических частиц, взвешенных в потоке газа или жидкости. Принцип действия лазерного анемометра основан на измерении доплеровского сдвига частоты света, рассеиваемого движущимися частицами. Было бы желательно использовать рассеяние света на молекулах жидкости, однако, как правило, интенсивность света лазера непрерывного действия для этого недостаточно велика. Кроме того, интенсивный световой поток, необходимый для измерения рассеяния на молекулах, сам влияет на движение молекул жидкости. В настоящее время при измерениях с помощью лазера в качестве рассеивающих используются частицы, размер которых велик по сравнению с размером молекул. При этом возникают серьезные проблемы, касающиеся размеров и дисперсии частиц. Частицы должны точно отслеживать движение жидкости. Может возникнуть вопрос, в состоянии ли частица, размеры которой велики по сравнению с размерами молекул, точно отслеживать движение жидкости в турбулентном потоке?

Вообще можно считать, что лазерный измеритель скорости создает интерференционную картину в той точке потока, где производится измерение. При движении частицы через эту картину интенсивность рассеянного ею света колеблется с некоторой частотой. Частота этих колебаний пропорциональна составляющей скорости движения частицы, нормальной к интерференционным полосам. Более подробно определение доплеровского сдвига частоты рассеянного света изложено в работе Голдстейна и Крейда [16].

На рис. 11.11 показана оптическая система, использованная Голдстейном и Крейдом. Луч лазера падает на полупрозрачную пластину, на которой происходит разделение луча вследствие частичного отражения на основной и опорный лучи. Основной луч с помощью линзы фокусируется на поток жидкости. Часть падающего света рассеивается в направлении фотоумножителя; при этом вследствие эффекта Доплера происходит сдвиг частоты.

Опорный луч отражается от зеркала и фокусируется другой линзой приблизительно на то же место потока, что и основной луч. Опорный луч попадает в фотоумножитель через две апертурные диафрагмы, которые ограничивают объем и угловое направление

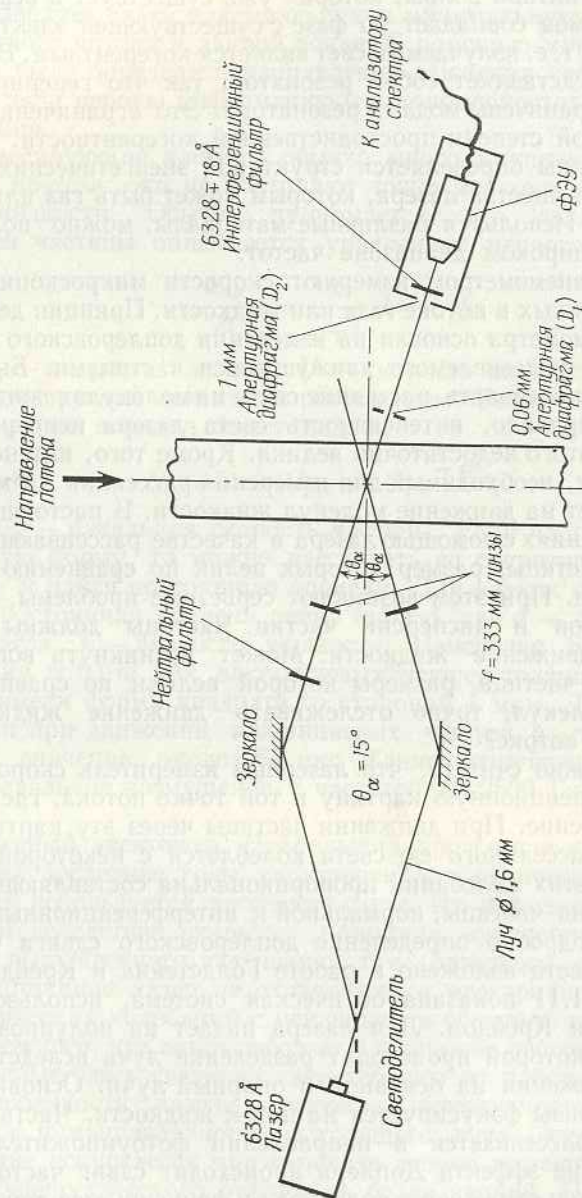


Рис. 11.11. Схема лазерного доплеровского анемометра.
Испываемой жидкостью была вода, содержащая частицы полистирола размером $0,557 \text{ мкм}$ в концентрации $1:50 \text{ 000}$

поля наблюдения фотоумножителя. Два луча, основной и опорный, падающие на фотокатод, дают биения с частотой, равной доплеровскому сдвигу. Для удобства основной и опорный лучи направлены под одинаковым углом к плоскости, перпендикулярной оси трубки. Следовательно, доплеровский сдвиг частоты пропорционален составляющей скорости, параллельной оси. Выходной сигнал фотоумножителя анализируется с помощью дискриминатора. Доплеровский сдвиг, соответствующий средней скорости, обычно соответствует частоте, на которой выходной сигнал максимален.

Методы, основанные на использовании эффекта Доплера, могут быть применены при рассеянии любой электромагнитной волны, а не только света лазера. Доплеровские системы в микроволновой области спектра используются для измерения скорости в атмосфере. Акустический доплеровский анемометр может представлять большой интерес для измерений в системе кровообращения. Некоторые дополнительные сведения об этих методах и лазерном анемометре приводятся в гл. 13.

Тепловые трассирующие частицы. В 1935 г. Шубауэр [17] использовал диффузию тепла от линейного источника для индикации поперечной составляющей скорости в турбулентном потоке. Теория диффузии в течениях сплошной среды, развитая Тейлором [18], показывает, что распространение теплового следа от линейного источника зависит от поперечной турбулентности. Угол расхождения α между линейным источником и линией в следе, на которой повышение температуры, вызванное источником, равно половине его значения на оси следа (рис. 11.12), определяется формулой

$$\alpha^2 = \alpha_m^2 + \alpha_s^2, \quad (11.14)$$

где α_m характеризует распространение тепла вследствие молекулярной диффузии, а α_s — распространение тепла, вызванное

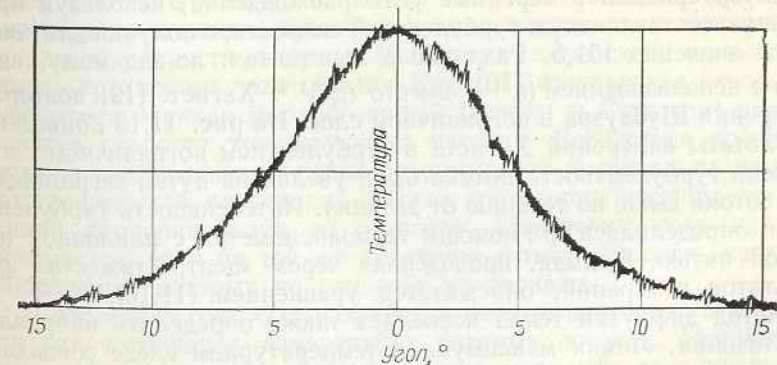


Рис. 11.12. Распространение тепла от линейного источника.

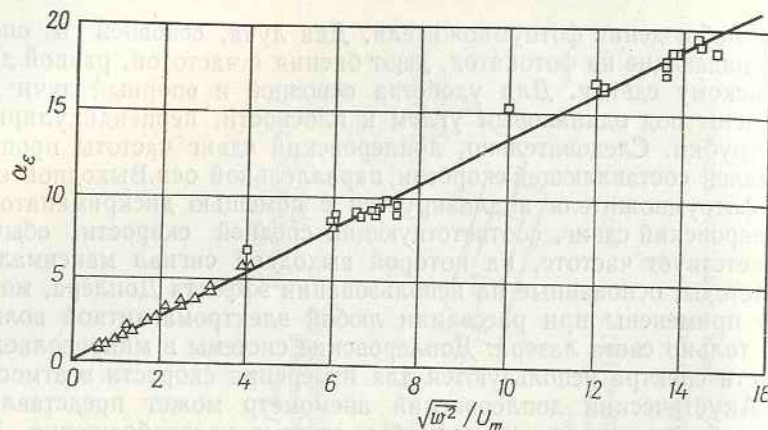


Рис. 11.13. Изменение α_s при изменении поперечной составляющей интенсивности турбулентности.

поперечной составляющей турбулентной скорости. Молекулярный угол расхождения (в градусах) вычисляется по формуле

$$\alpha_m = 190,8 \left(\frac{k}{\rho c_p U_m x} \right)^{1/2}, \quad (11.15)$$

где ρ — плотность, c_p — удельная теплоемкость, k — коэффициент теплопроводности, U_m — средняя скорость потока, а x — расстояние вниз по потоку в следе, где производятся измерения. Тейлор принял для следа гауссовское распределение; при этом для турбулентного угла расхождения (в градусах) получается выражение

$$\alpha_s = 134,7 (\overline{w^2}/U_m)^{1/2}. \quad (11.16)$$

Шубауэр сравнил измеренные углы расхождения, используя продольную составляющую турбулентной скорости, и получил для константы значение 151,5. Различие в константах, по-видимому, связано с использованием $(\overline{u^2})^{1/2}$ вместо $(\overline{w^2})^{1/2}$. Хагист [19] повторил измерения Шубауэра в пограничном слое. На рис. 11.13 приведены результаты измерений Хагиста в турбулентном пограничном слое. Степень турбулентности потока была увеличена путем загромождения потока выше по течению от датчика. Интенсивность турбулентности определялась при помощи термоанемометра с наклонной нагретой нитью. Прямая, проведенная через «центр тяжести» результатов измерений, описывается уравнением (11.16).

Метод диффузии тепла позволяет также определять направление течения. Линия максимума в температурном следе совпадает с направлением основного течения. И Шубауэр, и Хагист обнаружили

ли несимметричность температурного следа. Для регистрации небольших изменений температуры они использовали термопары. Дальнейшее совершенствование метода может быть связано с применением более чувствительных датчиков температуры, например термисторов, обеспечивающих более точные измерения в следе.

Тауненд [20] использовал периодическое пропускание электрической искры для индикации небольших масс нагретого воздуха. Нагретый воздушный объем можно было наблюдать с помощью оптической шпирен-системы и исследовать путем наблюдения турбулентной диффузии массы воздуха. Тауненд проанализировал несколько сотен фотоснимков и определил среднюю скорость, а также среднеквадратические значения поперечной и осевой составляющих турбулентной скорости в трубе квадратного сечения со стороной 76,2 см.

Рассмотренные методы, основанные на тепловой индикации, были почти полностью вытеснены термоанемометром с нагретой нитью. Основным недостатком этих методов является то, что они не позволяют производить измерения в точке. Результатом измерений является среднее интегральное значение по длине за рассматриваемой точкой.

Другие методы, использующие трассирующие частицы. На основе слежения за частицами был развит ряд методов измерения характеристик турбулентности. Появление лазерного измерителя скорости позволило существенно улучшить методы определения пульсационных составляющих скорости, однако эти измерения дают лишь небольшую часть информации о турбулентном потоке. Между тем трассирующие частицы могут быть использованы для индикации мгновенного поля течения, а также для измерений в точке. Если трассирующие частицы наблюдаются с помощью источника света переменной интенсивности или устройства для прерывания светового потока, то можно получить фотоснимки, состоящие из ряда штрихов, характеризующих величину и направление локальной скорости частицы. Используя стереоскоп, можно наблюдать трехмерное поле течения. Кэди [21] использовал метод вращающегося зеркала (разработанный Цвикки и Саттоном) для измерения скорости трассирующих частиц. Вследствие вращения зеркала изображение частицы перемещается диагонально поперек фотографической пластинки. Наклон траектории частицы на пластинке пропорционален ее скорости. Измерение угла наклона упрощается, если на той же пластинке фотографировать частицы, изображение которых не попадает на зеркало.

В последние годы был разработан метод водородных пузырьков для количественных измерений в водяных потоках. Использование комбинированных время-полосных маркеров дает визуально наблюдаемую картину течения и одновременно позволяет измерить

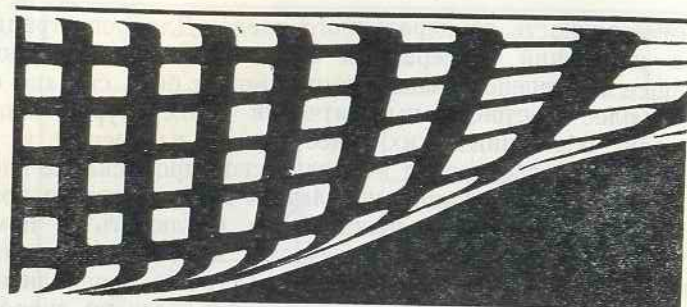


Рис. 11.14. Интерференционные полосы в конфузоре [23].
Течение слева направо.

величину скорости в конечной области течения. Метод водородных пузырьков разработан Геллером и усовершенствован Клаттером с сотр. [22] в корпорации «Дуглас эйркрафт» и Шраубом с сотр. [23] в Стенфордском университете. В этом методе одним из электродов в цепи постоянного тока для электролиза воды служит тонкая проволока. На ней образуются очень маленькие пузырьки водорода. Эти пузырьки достаточно малы, чтобы быть хорошими маркерами, и в то же время не возникает особых трудностей, связанных с их скоростью всплывания.

Тонкая проволока диаметром $0,0127 \div 0,508$ мм использовалась в качестве отрицательного электрода в цепи постоянного тока в водяном потоке. Вторым электродом может быть любая подходящая часть установки, в которой создается водяной поток. Подробные схемы электрических цепей для получения пузырьков приведены в работах [22] и [23]. Для обеспечения равномерного появления пузырьков и крутой характеристики отрыва, что необходимо при работе в импульсном режиме, необходимо тщательно отрегулировать экспериментальное оборудование. В качестве материала проволок для генерации пузырьков успешно использовались платина, медь и нержавеющей сталь. Достаточная для фотографирования оптическая плотность пузырьков может быть получена только при больших токах. Основная масса образующихся пузырьков имеет диаметр порядка половины диаметра проволоки.

Метод водородных пузырьков позволяет производить одновременные измерения скорости во всей плоскости в любой момент времени. Короткий импульс маркирует локальную группу частиц жидкости. На рис. 11.14 показана типичная маркировка течения в конфузоре, полученная Шраубом и др. [23].

Экспериментальные данные, полученные с помощью водородных пузырьков, могут обрабатываться теми же методами, которые используются для других типов индикаторных частиц. Составляю-

щая скорости вдоль оси может быть определена из соотношения

$$\tilde{u} = (\Delta x/S) f, \quad (11.17)$$

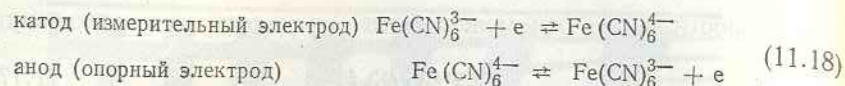
где $\tilde{u}$ — оценка составляющей вдоль оси x истинной местной скорости $u(x, y, z, t)$ в переменных Эйлера в некоторой точке (x_0, y_0, z_0, t_0) , Δx — смещение пузырька вдоль оси x за известный промежуток времени $\Delta T = 1/f$, измеренный на пленке, S — масштабный множитель для измерений на пленке и f — частота следования импульсов пузырьков или частота кадров при киносъемке. Показано [23], что этот метод позволяет измерять скорость с точностью приблизительно 4% при доверительном уровне вероятности 95%.

11.2.3. Электрохимические методы

Для измерения турбулентности в жидкостях имеется возможность использовать химические реакции. В Иллинойском университете под руководством Хенретти [24, 25] был разработан электрохимический метод, который использовался для измерения флуктуаций скорости и концентраций. Химические реакции происходят на поверхности электрода. К электроду прикладывается напряжение, достаточное для уменьшения концентрации реагирующих компонентов до нуля на поверхности электрода. Электрод можно рассматривать как аналог термоанометра, работающего в режиме постоянной температуры, в том смысле, что концентрация на поверхности электрода поддерживается постоянной, а ток в цепи зависит от интенсивности массообмена. Интенсивность массообмена связана с местным градиентом скорости у электрода. Проблемы, возникающие при нахождении зависимости между током и интенсивностью массообмена, аналогичны тем, которые встречаются при установлении зависимости между показаниями термоанометра и пульсационной скоростью.

В том методе, который использовался на практике, электрод являлся частью электрохимического элемента, состоящего из водного раствора ферри- и ферроцианида калия и никелевых электродов. Таким образом, измерения могли проводиться только в одной конкретной жидкости. Химическая реакция протекает между ферроцианидом и гидроокисью натрия. Гидроокись натрия является проводником с низким сопротивлением для тока во всем объеме элемента, за исключением области, непосредственно примыкающей к электродам. Измерения проводятся на катоде элемента; анод имеет значительно большую площадь. Большая поверхность анода позволяет с помощью тока катода управлять выходным сигналом датчика.

На поверхности электродов происходят следующие реакции:



Ток I связан со скоростью реакции феррицианида на единицу площади измерительного электрода N уравнением

$$N = (I/AF)(1-T), \quad (11.19)$$

где A — площадь измерительного электрода, F — число Фарадея, а T — коэффициент переноса. Если концентрация гидроокиси натрия велика по сравнению с концентрацией феррицианида, то коэффициент переноса очень мал (приблизительно 0,001), так что им можно пренебречь. Эксперименты проводили в атмосфере азота, чтобы избежать реакций окисления на катоде.

Коэффициент массообмена K определяется выражением

$$K = N/(C_b - C_w), \quad (11.20)$$

где C_b — концентрация ионов феррицианида в растворе, а C_w — их концентрация на поверхности электрода. При достаточно большом напряжении на электродах реакция протекает настолько быстро, что C_w близка к нулю на поверхности измерительного электрода и ток определяется величиной коэффициента массообмена. При работе датчика напряжение регулируется так, чтобы $C_w \approx 0$, и измеряется ток. На рис. 11.15 показаны типичные кривые поляризации для электрода диаметром 1,6 мм, расположенного на стенке трубки диаметром 25,4 мм. Предельная величина тока является функцией расхода жидкости в трубке. Измерения, выполненные Райсом [26], Митчеллом [27] и Саном [28], показали, что электрохимический метод дает достаточно точные значения градиента скорости на стенке в диапазоне чисел Рейнольдса от 300 до 70 000.

Метод определения градиента пульсационной скорости аналогичен тому, который использовался для нагретой нити. Предполагается, что коэффициент массообмена представляет собой сумму стационарной и нестационарной составляющих,

$$K = \bar{K} + k. \quad (11.21)$$

Сиркар и Хенретти [25] получили следующие линейные соотношения между коэффициентами массообмена и градиентами местной скорости:

$$\frac{\bar{K}L}{D} = 0,807 \left(\frac{\bar{S}_x L^2}{D} \right)^{1/3} \quad (\text{для среднего значения}), \quad (11.22)$$

$$\frac{k}{\bar{K}} = \frac{1}{3} \left(\frac{s_x}{\bar{S}_x} \right) \quad (\text{для пульсационной составляющей}), \quad (11.23)$$

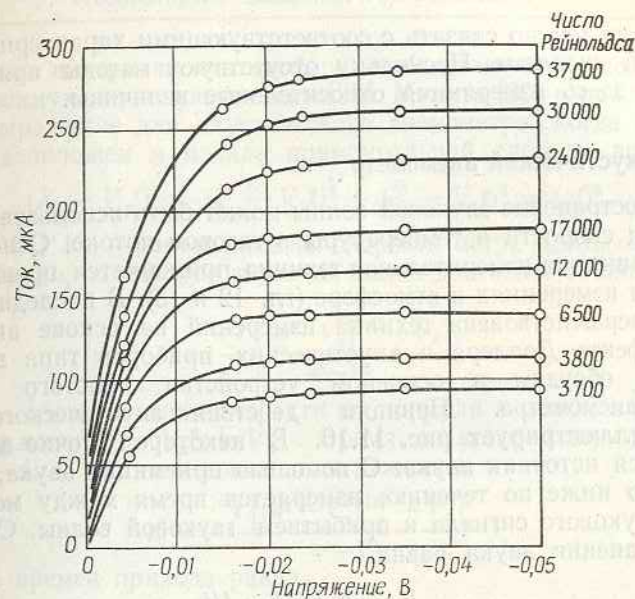


Рис. 11.15. Предельные токи для реакции восстановления феррицианида [24]. Диаметр электрода 1,626 мм.

где $\bar{S}_x$ — среднее значение градиента местной скорости, s_x — пульсационная составляющая градиента скорости в направлении осредненного течения. Электрод, расположенный наклонно к направлению осредненного течения, можно использовать для измерения пульсаций градиента скорости в направлениях, нормальных к направлению течения. V-образный электрод используется для измерения поперечных градиентов аналогично тому, как X-образный термоанемометр.

В работе Митчелла и Хенретти [24] приводятся результаты большого числа измерений пульсаций у стенки в полностью развитом течении в трубе. Они включают среднеквадратические значения скорости и интенсивности массообмена, а также спектры и корреляции. Плотности распределений вероятностей дают как положительные, так и отрицательные отклонения от среднего значения, по величине имеющие тот же порядок, что и само среднее значение.

В работе Болдуина и Чермака [29] описывается «электрокинетический» метод индикации турбулентности в жидкости, главным образом в воде. В этом методе используется система электродов, аналогичная той, которая использовалась в электрохимических экспериментах, и измеряются пульсации напряжения. Величина пульсаций напряжения имеет порядок нескольких микровольт. Среднеквадратические значения и частотный спектр пульсаций

напряжения можно связать с соответствующими характеристиками пульсаций скорости. Поскольку отсутствуют методы прямой тарировки, здесь измеряются относительные величины.

11.2.4. Акустический анемометр

Распространение звуковой волны может быть использовано для измерения скорости и температуры в газовом потоке. Основанная на этом принципе измерительная техника применяется преимущественно при измерениях в атмосфере (гл. 12 и 13). В последние годы была усовершенствована техника измерений на основе акустического эффекта Доплера и акустических приборов типа эхолота. Здесь мы обсудим в основном устройство простого акустического анемометра. Принцип действия акустического анемометра иллюстрирует рис. 11.16. В некоторой точке в потоке помещается источник звука. С помощью приемника звука, расположенного ниже по течению, измеряется время между моментом подачи звукового сигнала и прибытием звуковой волны. Скорость распространения звука равна

$$V = a + U = l/t, \quad (11.24)$$

где a — скорость звука, которая в идеальном газе является функцией абсолютной температуры. Используя два приемника звука, расположенные, как показано на рис. 11.16, можно непосредственно измерить U и a . Разница во времени между моментами прихода сигналов (приемники расположены на одинаковом расстоянии l от источника звука) пропорциональна местной скорости.

Поскольку направление ветра не является постоянным, при

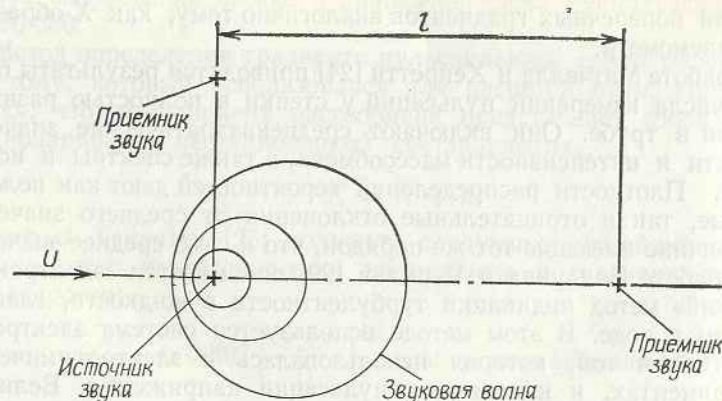


Рис. 11.16. Измерение скорости акустическим методом.

проведении измерений в атмосфере необходимо использовать пространственную звуковую систему [30]. Мицута [30] дает следующее общее выражение для акустического анемометра, когда источник звука расположен в начале прямоугольной системы координат:

$$(X - V_x t)^2 + (Y - V_y t)^2 + (Z - V_z t)^2 = (at)^2, \quad (11.25)$$

где (V_x, V_y, V_z) — составляющие скорости ветра вдоль осей координат. Время, за которое звуковая волна достигнет точки $(l, 0, 0)$, равно

$$t_1 = \frac{l [(a^2 - V_n^2)^{1/2} - V_x]}{a^2 - V^2}, \quad (11.26)$$

где V_n — составляющая скорости по нормали к оси x , а V — полная скорость ($V^2 = V_x^2 + V_n^2$). Время, за которое звук достигнет точки $(-l, 0, 0)$, определяется выражением

$$t_2 = \frac{l [(a^2 - V_n^2)^{1/2} + V_x]}{a^2 - V^2}. \quad (11.27)$$

Разница времен прихода равна

$$t_1 - t_2 = -\frac{2lV_x}{a^2 - V^2} = -\frac{1}{A} \frac{2lV_x}{a^2}. \quad (11.28)$$

Сумма этих времен

$$t_1 + t_2 = \frac{2l(a^2 - V_n^2)^{1/2}}{a^2 - V^2} = \frac{1}{B} \frac{2l}{a}. \quad (11.29)$$

Для небольших скоростей (50 м/с и меньше) значения $A = 1 - V^2/a^2$ и $B = (1 - V^2/a^2)/(1 - V_n^2/a^2)^{1/2}$ близки к единице. Таким образом, при проведении измерений в атмосфере можно использовать сумму и разность времен прихода сигнала в точки l и $-l$ для определения V_x или других составляющих скорости в зависимости от расположения приемников звука.

Скорость звука зависит от температуры воздуха и, в незначительной степени, от влажности воздуха. Баррет и Суоми [31] приводят следующее выражение для скорости звука:

$$a = 20,067 [T(1 + 0,32 e/p)]^{1/2}, \quad (11.30)$$

где T — абсолютная температура, e — давление водяных паров и p — атмосферное давление. Величина в квадратных скобках в Уравнении (11.30) называется виртуальной звуковой температурой T_{sv} . На рис. 11.17 представлены зависимости виртуальной звуковой температуры в форме $(T_{sv} - T)$ от температуры и относительной влажности воздуха. Виртуальную звуковую температуру можно найти по формуле

$$T_{sv} = \left[\frac{2l}{20,067} \frac{1}{(t_1 + t_2)} \right]^2. \quad (11.31)$$

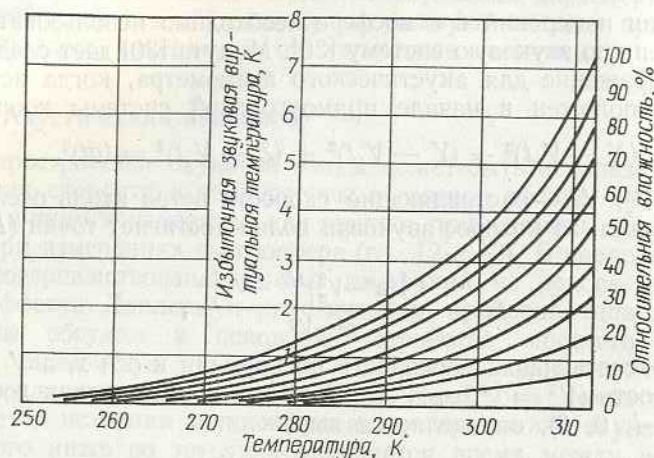


Рис. 11.17. Зависимость виртуальной звуковой температуры от температуры и относительной влажности [30].

Для определения флуктуаций скорости и температуры подается короткий сигнал от источника звука и замеряются времена прихода сигнала t_1 и t_2 . Поскольку звуковой импульс позволяет получить только один набор t_1 и t_2 , для нахождения статистических значений производится целая серия таких измерений. Метод импульсных звуковых сигналов ограничен частотной характеристикой прибора. Акустические анемометры для измерений в атмосфере имеют полосу пропускания порядка 100 Гц. Пространственное разрешение ограничено вихрями, размер которых превышает длину пути звукового сигнала. Типичное значение длины пути сигнала ~ 50 см. Сравнение различных типов акустических анемометров имеется в работе [32].

11.2.5. Методы, основанные на измерении подъемной силы и сопротивления

Существует большое число датчиков для измерения турбулентности, основанных на принципе изменения подъемной силы или сопротивления при изменении скорости. Эти датчики имеют особую ценность для измерения крупномасштабной турбулентности, как, например, в атмосфере. Такие устройства, как чашечные, флюгерные и крыльчатые анемометры, давно использовались для измерения атмосферной турбулентности, однако они, как правило, слишком велики, чтобы их можно было использовать в лабораторных измерениях. Для измерения турбулентных пульсаций в установках с большим расходом воды были созданы небольшие чашечные

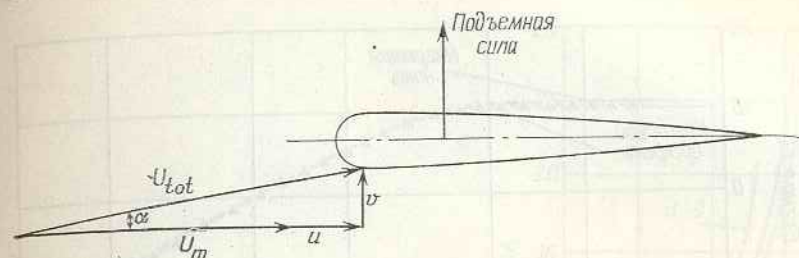


Рис. 11.18. Обтекание профиля.

расходомеры [33]. В последние годы были предприняты попытки создания пригодных для лабораторных измерений датчиков, в которых измеряется подъемная сила или сопротивление.

Датчик с крыловым профилем. В методе, разработанном Сиддоном и Рибнером [34], используется маленький крыловой профиль для измерения поперечной составляющей турбулентности. Рассмотрим простой крыловой профиль, изображенный на рис. 11.18. Профиль находится под углом атаки α по отношению к направлению вектора мгновенной скорости. В турбулентном потоке мгновенная скорость U_{tot} и угол атаки α изменяются случайным образом. Подъемная сила профиля для квазистационарного случая в линейном приближении определяется формулой

$$L = \frac{1}{2} \rho U_{tot}^2 S [dC_L / d\alpha] \alpha. \quad (11.32)$$

Для большинства профилей зависимость подъемной силы от угла атаки при малых углах представляет собой прямую линию. Таким образом, используя линейную аппроксимацию, т. е. $U_{tot} \approx U_m$ и $\alpha \approx v/U_m$, что эквивалентно допущениям, принимаемым для наклонной нагретой нити в линейном приближении, получаем, что вертикальная составляющая скорости является линейной функцией подъемной силы:

$$v/U_m = L/\text{const}, \quad (11.33)$$

где константа равна $1/2 \rho S (dC_L / d\alpha)$. Ограничения, при которых справедливо линейное приближение, в общем те же самые, что и для нагретой нити. Сиддон и Рибнер [34] считают, что датчик можно использовать, если среднеквадратическое значение вертикальной скорости не превышает 30% средней скорости.

Измерительное устройство представляет собой профиль, подвешенный в потоке на заостренной державке консольного типа. В державку вмонтирован пьезоэлектрический датчик. Крыловой профиль, являющийся чувствительным элементом, должен удов-

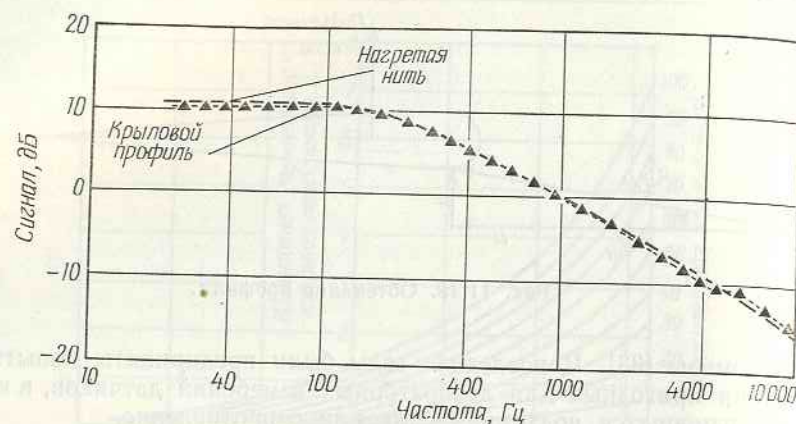


Рис. 11.19. Сравнение спектра v -составляющей пульсационной скорости, измеренной термоанемометром и датчиком с крыловым профилем [34].
 $U = 26$ м/с; $x/D = 4,5$; $y/r = 1$; $D = 102$ мм.

летворять двум взаимно исключаящим требованиям. Для получения большого выходного сигнала желательно иметь возможно большую несущую поверхность. Для получения хорошей частотной характеристики и пространственного разрешения чувствительный элемент должен быть как можно меньше. Сиддон и Рибнер в своих исследованиях использовали крыловой профиль в форме диска диаметром 1,58 мм. Измерения производились в установке с воздушной струей с начальным диаметром 102 мм и средней скоростью течения 26 м/с. Кроме того, с успехом использовались крыловые профили прямоугольной формы приблизительно такой же площади и относительным удлинением $\lambda = 2$. Коническая алюминиевая консоль с короткой внешней частью постоянного диаметра использовалась в качестве державки для профиля. Основная собственная частота консоли была равна приблизительно 12,5 кГц. На турбулентные пульсации реагировал только чувствительный элемент, для чего устанавливался кожух. Для измерения подъемной силы профиля использовался керамический пьезоэлектрический датчик деформаций.

На рис. 11.19, заимствованном из работы Сиддона и Рибнера, сравниваются частотные спектры составляющей пульсационной скорости v , измеренные термоанемометром и рассматриваемым датчиком. Небольшое расхождение имеется при низких частотах; оно обусловлено электронной схемой, в которую входит пьезоэлектрический датчик. Результаты, полученные Сиддоном и Рибнером, согласуются с измерениями термоанемометром приблизительно до 4 000 Гц. Завал частотной характеристики на частотах, превышающих 4 000 Гц, объясняется инерционностью профиля.

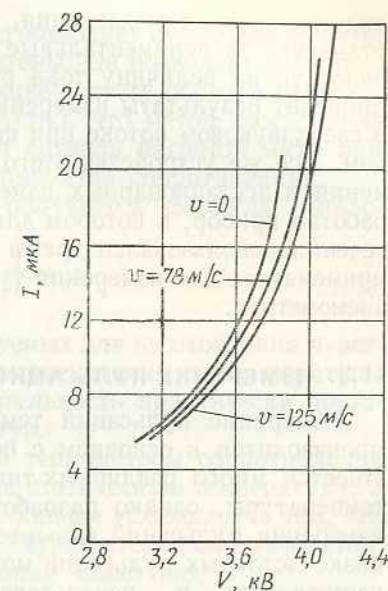


Рис. 11.20. Чувствительность анемометра с тлеющим разрядом к изменениям скорости [36].

На критической частоте 12,5 кГц отмечается резонансный пик.

Для проведения измерений использовался ряд устройств, подобных датчику, в котором чувствительным элементом является крыловой профиль. В атмосферных измерениях весьма полезны устройства типа флюгера, которые позволяют определить направление потока. Датчики ветра, которые также используются при изучении процессов в атмосфере, измеряют подъемную силу и сопротивление профиля или фюзеляжа. В недавно опубликованной работе Ченга [35] описывается датчик для измерения составляющих пульсационной скорости, в котором в качестве чувствительного элемента вместо крылового профиля используется сфера малого диаметра.

11.2.6. Анемометр с тлеющим разрядом

Электрический разряд между двумя электродами в воздухе чувствителен к давлению, скорости потока и влажности. В литературе имеются сообщения об экспериментальных исследованиях с использованием тлеющего разряда для измерений в воздушных потоках [36, 37]. Применялись электроды диаметром порядка 0,025 мм, расстояние между которыми не превышало 10 мм. Напряжение между электродами могло изменяться от 1000 до 5000 В. Измерения, выполненные Вернером [36], показали, что ток разряда

сильнее зависит от давления, чем от скорости. На рис. 11.20 представлены экспериментальные данные, иллюстрирующие влияние скорости на величину тока разряда. В своей работе [36] Вернер приводит результаты измерений турбулентных пульсаций скорости в сверхзвуковом потоке при помощи анемометра с тлеющим разрядом. Все же устройства этого типа не получили широкого применения в нестационарных измерениях. В последние годы был разработан прибор, в котором для измерения параметров осредненного течения использовался дрейф ионов. Устройства этого типа могут применяться для измерения турбулентности, подобно акустическим анемометрам.

11.3. ИЗМЕРЕНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Измерение пульсаций температуры в турбулентных течениях производится в основном с помощью термометров сопротивления. Имеется много различных типов датчиков для измерения средней температуры, однако разработка достаточно малых датчиков для измерения пульсаций вызывает определенные трудности. В случае низкочастотных пульсаций можно использовать термопары, однако изготовление и использование очень маленьких термопар затруднительно.

11.3.1. Термометр сопротивления

Устройство термометров сопротивления для измерения пульсаций аналогично устройству термоанемометров с нагретой нитью. В очень чувствительных термометрах сопротивления используются проволоки диаметром порядка 0,5 мкм [3]. Чувствительность термометра сопротивления определяется по формуле

$$\Delta E / \Delta T = I \alpha R_0, \quad (11.34)$$

где E — величина выходного сигнала в вольтах, I — ток, проходящий через сопротивление, α — термический коэффициент сопротивления, R_0 — характерное сопротивление чувствительного элемента. Чем меньше диаметр проволоки, тем больше сопротивление при фиксированной длине чувствительного элемента. Переходная характеристика термометра сопротивления также подобна переходной характеристике термоанемометра с нагретой нитью [3]. Проволочки очень малого диаметра могут непосредственно воспринимать пульсации, имеющие частоту порядка нескольких килогерц. Улучшения частотной характеристики можно достичь путем использования аналоговых компенсационных схем «постоянного тока». Если переходная характеристика чувствительного элемента известна [3], то для компенсации ее затухания можно использовать электронный усилитель, который усиливает сигнал датчика, осла-

бевающий с ростом частоты. Этот метод позволяет существенно улучшить переходную характеристику системы. Он позволяет регистрировать пульсации температуры, имеющие частоту порядка нескольких десятков килогерц. Заметим попутно, что метод «постоянной температуры» компенсации затухания сигнала нагретой нити при высоких частотах не годится для термометра сопротивления.

Для термометра сопротивления получается формула, аналогичная формуле для нагретой нити:

$$(\overline{e^2})^{1/2} = \frac{\partial E}{\partial t} (\overline{T'^2})^{1/2}. \quad (11.35)$$

Для большинства металлов, используемых для изготовления чувствительных элементов, зависимость сопротивления от температуры близка к линейной, поэтому чувствительность практически постоянна в широком диапазоне температур.

Основная трудность при работе с термометром сопротивления состоит в том, что он воспринимает не статическую температуру, а температуру торможения. Задача еще больше усложняется тем, что проволока не является идеальным чувствительным элементом. Выражение для температуры торможения имеет вид

$$T_0 = T_s + \frac{1}{2} \frac{U^2}{c_p}, \quad (11.36)$$

где T_s — статическая температура, U — скорость течения, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Идеальный датчик должен преобразовывать кинетическую энергию потока в температуру. Для низкоскоростных потоков динамический член в уравнении (11.36) мал, и прибор дает приемлемое значение статической температуры. Для скоростей, превышающих приблизительно 50 ÷

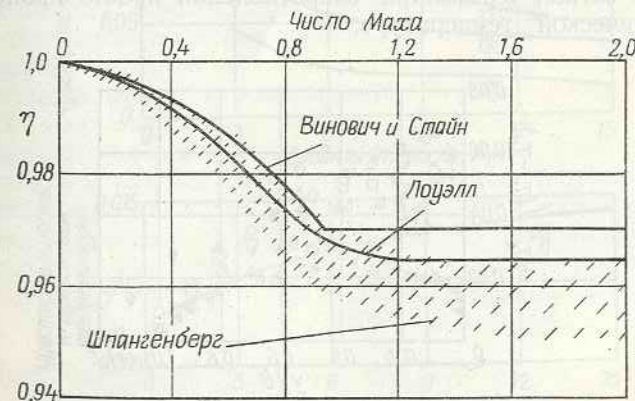


Рис. 11.21. Зависимость коэффициента восстановления температуры нити от числа Маха.

$\div 60$ м/с, динамическим членом пренебрегать нельзя. На рис. 11.21 приведены типичные измеренные значения коэффициента восстановления ($\eta = T_w/T_0$) в зависимости от числа Маха потока для проволок, расположенных перпендикулярно набегающему потоку воздуха. (Ссылки на работы авторов, указанных на рис. 11.21, см. в [3].) Коэффициент восстановления температуры характеризует степень превращения кинетической энергии в температуру. На практике отклонение от идеального случая никогда не превышает 5%, однако заметим, что коэффициент восстановления представляет собой отношение абсолютных температур. Поэтому абсолютное отклонение может составлять 20—30 К в зависимости от величины T_0 . На рис. 11.21 представлены результаты для непрерывного режима течения. Если плотность потока мала, как это часто имеет место в сверхзвуковых течениях, то проволока может работать в режиме течения со скольжением. В течениях со скольжением и свободномолекулярных течениях трудности, связанные с неполным восстановлением температуры, еще более усугубляются [3].

На рис. 11.22 приведены результаты измерения пульсаций температуры торможения, которые были опубликованы в нескольких обзорах по сверхзвуковому пограничному слою [38] (в работе [38] имеются ссылки на эти работы). Пульсации температуры обезразмерены путем отнесения их к разности между температурой теплоизолированной стенки T_r и статической температурой во внешнем потоке T_e . Определяя независимо пульсации скорости (например, термоанемометром или лазерным измерителем скорости), можно найти пульсации статической температуры. Как показано в работе [38], разброс экспериментальных данных для статической температуры получается при этом существенно большим, чем для температуры торможения. В несжимаемых течениях выходной сигнал термометра сопротивления просто пропорционален статической температуре.

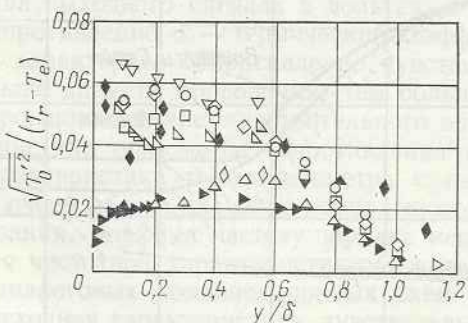


Рис. 11.22. Пульсации температуры торможения в сверхзвуковом пограничном слое по данным измерений [38].

11.3.2. Измерение корреляций температуры и скорости

В несжимаемых течениях пульсации статической температуры можно измерить непосредственно термометром сопротивления. Очевидно, что если имеются пульсации температуры, ими нельзя пренебрегать при расшифровке сигнала термоанемометра с нагретой нитью. Разными авторами было предложено нагревать нить до более высоких температур, чтобы сделать чувствительность к пульсациям скорости значительно большей, чем к пульсациям температуры. На рис. 11.23 сравниваются величины чувствительности к пульсациям скорости и температуры. В то время как температурная чувствительность незначительно изменяется с увеличением скорости (из-за концевых эффектов в местах крепления, а также изменения распределения температуры вследствие изменения теплоотдачи), чувствительность к пульсациям скорости значительно возрастает с увеличением ΔT .

Представляя выходной сигнал термоанемометра в виде

$$e = \frac{\partial E}{\partial U} u + \frac{\partial E}{\partial T} T', \quad (11.37)$$

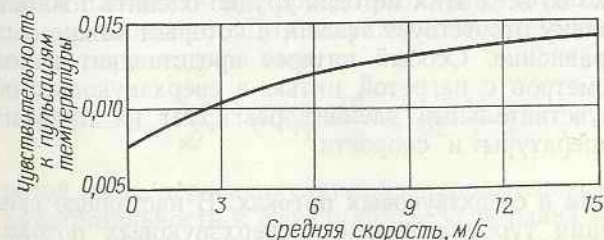
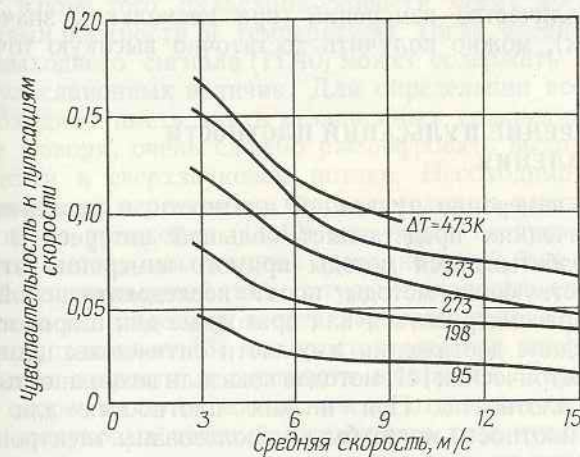


Рис. 11.23. Чувствительность нагретой нити к пульсациям скорости и температуры.

получаем соотношение для статистически измеряемой величины

$$\overline{e^2} = S_u^2 \overline{u^2} + 2S_u S_T \overline{uT'} + S_T^2 \overline{T'^2}, \quad (11.38)$$

где $S_u = \partial E / \partial U$ и $S_T = \partial E / \partial T$. Из соотношения (11.38) следует, что при $S_T = 0$, S_u и $\overline{uT'} = 0$ выходной сигнал термоанометра пропорционален скорости. Однако ниоткуда не следует, что корреляцией температуры и скорости можно пренебречь. Для того чтобы расшифровать сигнал нагретой нити при наличии пульсаций температуры, измерения проводят при нескольких значениях ΔT . Как видно из рис. 11.23, каждому значению ΔT соответствует свое значение S_u , в то время как S_T остается приблизительно постоянным. Можно составить систему трех уравнений типа (11.38) и решить ее относительно трех неизвестных. Очевидно, что значение $\overline{T'^2}$ можно найти непосредственно для случая $\Delta T \rightarrow 0$, и тогда необходимо решить систему только из двух уравнений.

Коважный [39] предложил метод «пульсационных диаграмм» для решения уравнений, коэффициенты которых получены путем измерений. Когда коэффициенты уравнений получены экспериментально, трудно ожидать хорошей точности. Поэтому, проведя большее количество измерений (при нескольких значениях ΔT , вместо трех), можно получить достаточно высокую точность.

11.4. ИЗМЕРЕНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ПЛОТНОСТИ И ДАВЛЕНИЯ

Прямое измерение пульсаций плотности и давления в турбулентных течениях представляет большой интерес. В настоящее время разрабатываются методы прямого измерения этих пульсаций. Существующие методы носят исследовательский характер и не могут рассматриваться как пригодные для широкого применения. Последние достижения в области оптических шлирен- [40] и интерферометрических [41] методов показали возможность измерения пульсаций плотности. При низких плотностях для измерения пульсаций плотности могут быть использованы электронные пучки [42]. Однако во всех этих методах трудно оценить точность измерений, поскольку отсутствует эталон, с которым можно было бы выполнить сравнение. Особый интерес представляет использование термоанометров с нагретой нитью в сверхзвуковых потоках, в которых чувствительный элемент реагирует на пульсации плотности, температуры и скорости.

Измерения в сверхзвуковых потоках. В настоящее время почти все измерения турбулентности в сверхзвуковых потоках производятся с помощью термоанометров или лазерных измерителей

скорости. В общем случае коэффициент теплоотдачи для кругового цилиндра является функцией чисел Маха, Кнудсена (или Рейнольдса), степени нагрева, температуры торможения и угла наклона:

$$Nu = f(M, Kn, \Delta T, T_\infty, \psi). \quad (11.39)$$

Сэндборн [3] приводит подробный вывод выражения для сигнала термоанометра при работе как в режиме постоянной температуры, так и в режиме постоянного тока. Это выражение можно представить в виде

$$e = S_u \frac{\delta U}{U} + S_\rho \frac{\delta \rho}{\rho} + S_{T_t} \frac{\delta T}{T_t} + S_\psi \frac{\delta \psi}{\psi}, \quad (11.40)$$

где δU , $\delta \rho$, δT и $\delta \psi$ — пульсации скорости, плотности, температуры и угла наклона соответственно.

Уравнение (11.40) показывает, что нагретая нить или пленка может являться анемометром, термометром сопротивления и измерителем давления в одно и то же время. Предполагается, что вклад каждой моды является аддитивным. В сверхзвуковом потоке сжимаемого газа могут присутствовать одновременно все три моды пульсаций. Кроме того, пульсации скорости могут коррелировать с пульсациями плотности и температуры. Тогда среднее значение квадрата выходного сигнала (11.40) может содержать шесть неизвестных пульсационных величин. Для определения всех этих величин необходимо иметь шесть независимых уравнений.

Вообще говоря, очень сложно расшифровать выходной сигнал нагретой нити в сверхзвуковом потоке. Необходимо уменьшить число независимых переменных, чтобы преодолеть имеющиеся трудности. Хотя из уравнения (11.40) как будто следует, что можно использовать метод, аналогичный тому, который был использован при разделении пульсаций температуры и скорости, его нельзя непосредственно использовать в сверхзвуковом потоке. Экспериментально было установлено [3], что чувствительность термоанометра к пульсациям скорости и плотности одинакова. Термоанометр реагирует скорее на поток массы, чем на отдельные его составляющие. Для дозвуковых течений сжимаемого газа чувствительность к пульсациям плотности и скорости различна, но таким течениям уделялось мало внимания. Для сверхзвукового течения уравнение (11.40) можно переписать в виде

$$e = S_{\rho u} \frac{\delta \rho u}{\rho U} + S_{T_t} \frac{\delta T}{T_t} + S_\psi \frac{\delta \psi}{\psi}. \quad (11.41)$$

Для нагретой нити, перпендикулярной к направлению осредненного потока, чувствительность к флуктуациям угла равна нулю. Таким образом, для уравнения (11.41) можно воспользоваться методом, использованным в разд. 11.3.2 для флуктуаций скорости и темпе-

ратуры. Этим методом можно определить пульсации массового расхода и корреляцию между массовым расходом и полной температурой.

Для набегающего потока в сверхзвуковой аэродинамической трубе, по-видимому, можно связать пульсации непосредственно со звуковыми волнами. Лауфер [43] установил с помощью термоанемометрических измерений, что в диапазоне чисел Маха от 1,6 до 5 коэффициент корреляции между пульсациями массового расхода и температуры торможения в набегающем потоке равен приблизительно —1. Кроме того, известно, что сами по себе пульсации статической температуры и скорости недостаточны для объяснения высокого уровня турбулентности, показываемого термоанемометром. Из анализа, выполненного Коважным [39], следует, что единственным простым полем пульсаций, совместимым с измерениями, является чисто звуковое поле. Для звукового поля зависимость между давлением, плотностью и температурой и их пульсациями является изэнтропической. В литературе для ряда установок приводятся данные, что в свободном сверхзвуковом потоке преобладающим типом колебаний являются звуковые колебания. Звуковые колебания связаны непосредственно с пульсациями массового расхода, измеренными термоанемометром с нагретой нитью. Отклонения появляются только в гиперзвуковых трубах, в которых поток на входе должен быть нагрет до высокой температуры. В гиперзвуковых трубах [44, 45] наряду с пульсациями расхода могут иметь место большие пульсации температуры.

На рис. 11.24 приведены зависимости интенсивности пульсаций расхода от числа Маха, построенные по данным различных авторов. Лауфер [46] и Морковин [47] обнаружили, что при числе Маха приблизительно 2,5 пульсации скорости выше по течению не влияли на степень турбулентности в рабочей части трубы.

Измерения Лауфера [43], Сэндборна и Вишневого [48] и Дональдсона и Уоллеса [49] показывают, что интенсивность пульсаций расхода уменьшается с увеличением числа Рейнольдса при фиксированном числе Маха пропорционально $Re^{-0,25}$. Лауфер [43] указал, что пристенные пограничные слои, которые генерируют звуковые колебания в свободном потоке, становятся тоньше при увеличении числа Рейнольдса. С целью выявления роли пограничного слоя на стенке Лауфер [43] проводил эксперименты в аэродинамической трубе при пониженных числах Рейнольдса, когда пристенные слои ламинарные. Точка, приведенная на рис. 11.24 при $M = 4,5$ (Лауфер, $Re/m \sim 1 \times 10^6$), показывает, что пульсации расхода в трубе уменьшаются почти на порядок. Хотя не все данные на рис. 11.24 согласуются между собой, они дают основание предположить, что в сверхзвуковых аэродинамических трубах большего размера (при данном числе Маха $M > 2$)

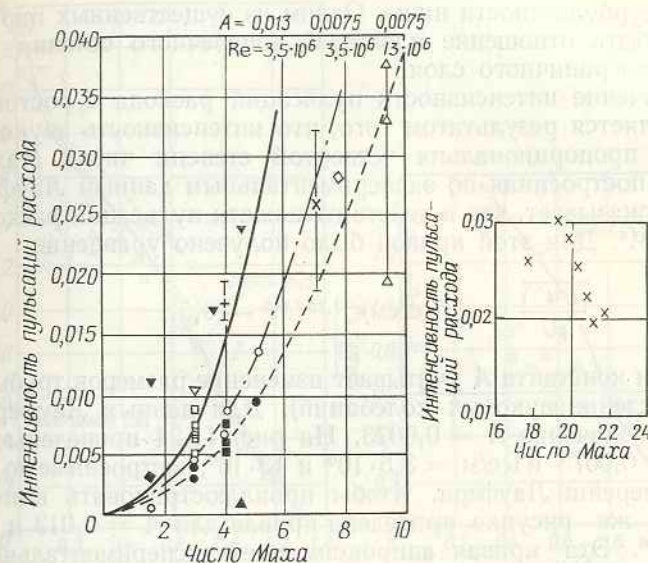


Рис. 11.24. Измеренные пульсации расхода в набегающем потоке [38].

Кривые построены по формуле $(\overline{q'q})'/\overline{q}U = A (Re/cm)^{-0,25} (M^2 - 0,5)$

Обозначение	Работа ¹⁾	Число Рейнольдса/м, 10^6	Размеры аэродинамической трубы
◇	Ладерман [63]	5,5 ÷ 87	Диаметр 127 см
■	Дональдсон и Уоллес [18]	2,0 ÷ 9,8	Канал 30×30 см ²
△	Ладерман и Деметриадис [17]	4,9	Канал 53×53 см ²
▲	Лауфер [16]	1,0	Канал 46×51 см ²
○	Лауфер [16]	3,5	Канал 46×51 см ²
●	Лауфер [16]	13	Канал 46×51 см ²
□	Сэндборн и Вишевский [13]	2,9 ÷ 6,5	Канал 15×15 см ²
▼	Кистлер [4]	20,3 ÷ 28,1	Канал 15×15 см ²
×	Стейнбек, Вагнер, Оуэн и Хорстмен [11]	1090	Диаметр 102 см
◆	Вайз и Шульц [64]	—	Канал 23×8 см ²
+—	Роуз [37]	16,5	Диаметр 5 см
▽	Джонсон и Роуз [23]	49	Канал 20×20 см ²

¹⁾ Номера ссылок соответствуют работе [38].

степень турбулентности ниже. Одним из существенных параметров должно быть отношение площадей поперечного сечения рабочей части и пограничного слоя.

Увеличение интенсивности пульсаций расхода с ростом числа Маха является результатом того, что интенсивность звуковых колебаний пропорциональна четвертой степени числа Маха [43]. Кривая, построенная по экспериментальным данным Лауфера для $M > 2$, показывает, что в действительности пульсации расхода растут как M^2 . Для этой кривой было получено уравнение

$$\frac{(\rho u')^2}{\rho U} = A (\text{Re}/\text{см})^{-0,25} (M^2 - 0,5), \quad (11.42)$$

в котором константа A учитывает изменение размеров трубы (и/или происхождение звуковых колебаний). Для данных Лауфера было получено значение $A = 0,0073$. На рис. 11.24 приведены кривые для $A = 0,0073$ и $\text{Re}/\text{м} = 3,5 \cdot 10^6$ и $13 \cdot 10^6$, построенные по результатам измерений Лауфера. Чтобы проиллюстрировать влияние A , на этом же рисунке приведена кривая для $A = 0,013$ и $\text{Re}/\text{м} = 3,5 \cdot 10^6$. Эта кривая аппроксимирует экспериментальные данные, полученные Сэндборном и Вишневским в аэродинамической трубе $15 \times 15 \text{ см}^2$. Приведенные на рис. 11.24 данные измерений Кистлера [67] могут не соответствовать истинному значению для аэродинамической трубы, так как измерения производились на границе пограничного слоя. Кистлер сообщает, что уровень турбулентности в набегающем потоке был ниже уровня шума использованной им измерительной системы.

Результаты для очень больших чисел Маха, показанные на рис. 11.24 справа, не подчиняются уравнению (11.42). Они были получены на установке, на которой с увеличением числа Рейнольдса увеличивалось число Маха. Таким образом, большим числам Маха соответствуют большие числа Рейнольдса. Влияние чисел Маха и Рейнольдса оказывается большим, чем это следует из уравнения (11.42). Отметим также, что интенсивность пульсаций расхода значительно меньше той, которая получается при экстраполяции кривых, приведенных на левом рис. 11.24.

При измерениях в пограничном слое неясно, как расшифровывать сигнал термоанемометра. Раньше обычно пренебрегали пульсациями давления и принимали, что пульсации температуры и плотности связаны линейно. Недавно Роуз и Джонсон [50] сравнили данные, получаемые в сверхзвуковом потоке термоанемометром и лазерным измерителем скорости. Лазерный измеритель скорости регистрирует скорость частиц, и результаты измерения не зависят от плотности, температуры или давления. На рис. 11.25 показаны результаты измерений u^2 в несжимаемом течении, полученные при низких числах Рейнольдса Клебаноным [51] и при высоких числах

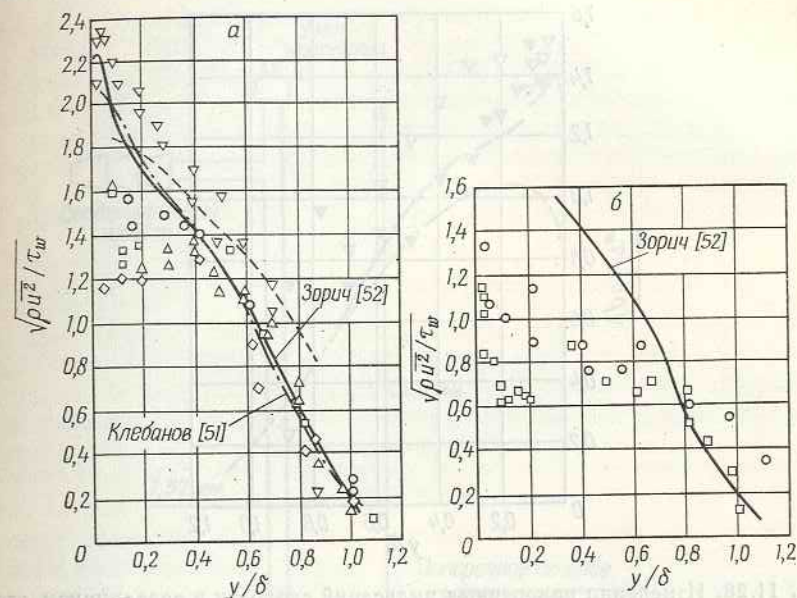


Рис. 11.25. Измерения продольных пульсаций скорости в пограничном слое без градиента давления [38].

a — теплоизолированная стенка; b — охлаждаемая стенка.

Рейнольдса — Зоричем [52]. Данные лазерных и термоанемометрических измерений Роуза и Джонсона (перевернутые треугольники на рис. 11.25, a) [50] находятся в удовлетворительном согласии с результатами для несжимаемых течений. Этот факт, по-видимому, оправдывает пренебрежение пульсациями давления для условий экспериментов Роуза и Джонсона. Результаты термоанемометрических измерений турбулентных пульсаций других авторов вблизи стенки располагаются ниже, что может указывать на измерительные трудности. На рис. 11.25, b приведены результаты измерений в гиперзвуковых аэродинамических трубах, в которых пренебрежение пульсациями давления может оказаться неоправданным.

На рис. 11.26 представлены результаты выполненных Роузом и Джонсоном измерений поперечной составляющей пульсационной скорости. Данные, полученные с помощью термоанемометра, оказываются выше, чем можно было ожидать, однако это может быть следствием погрешностей в экспериментально полученной системе уравнений. Вычисленные по результатам измерений значения турбулентных касательных напряжений $\rho u'v'$ приведены на рис. 11.27. Заптрихованная область дает «наилучшую оценку» ожидаемых значений [38]. Уменьшение напряжений вблизи стен-

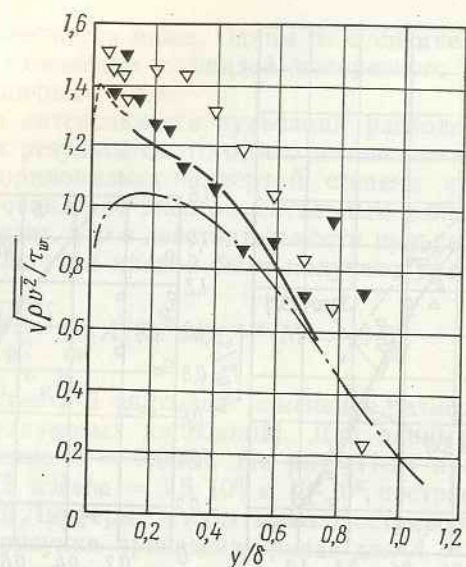


Рис. 11.26. Измерения поперечных пульсаций скорости в пограничном слое без градиента давления [38].
 ∇ термоанемометр; $\blacktriangledown$ лазерный измеритель скорости; — Роуз и Джонсон [50]; — Зорич [52]; --- Клеббанов [51].

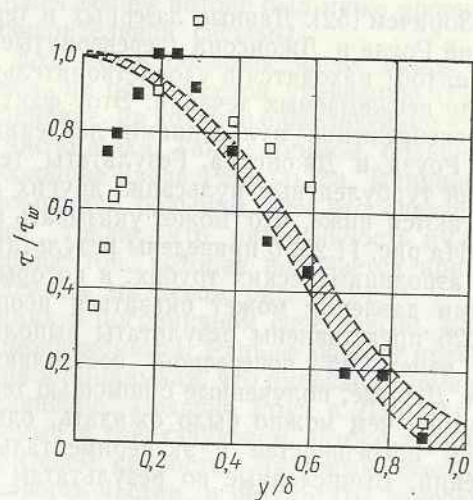


Рис. 11.27. Измеренное турбулентное касательное напряжение в пограничном слое без градиента давления.

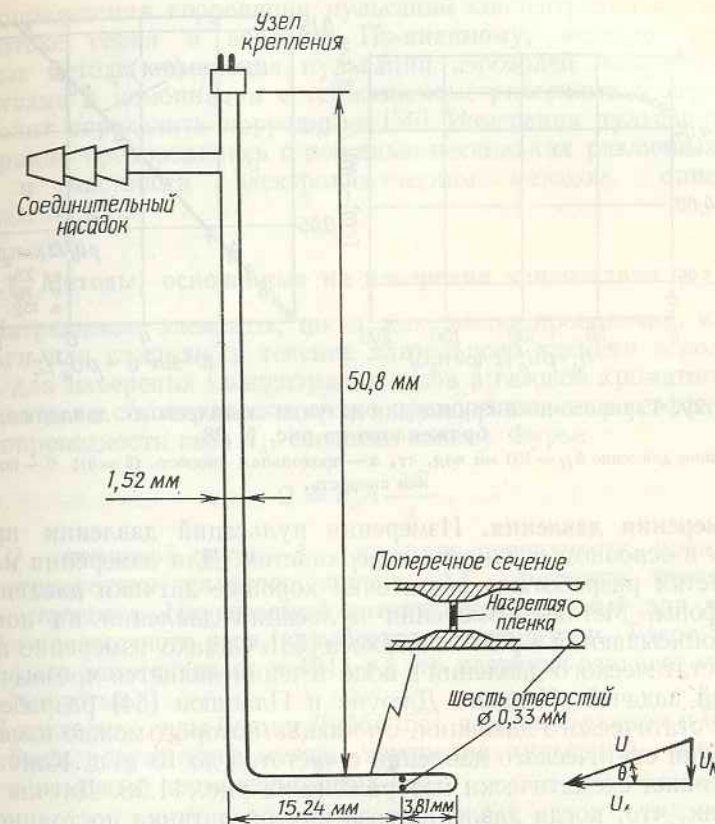


Рис. 11.28. Датчик статического давления для измерения пульсаций.

ки подвергает сомнению точность измерений. В настоящее время прилагаются значительные усилия для улучшения методов измерения турбулентных касательных напряжений в сверхзвуковых течениях.

Имеющийся объем экспериментальных данных по дозвуковым сжимаемым течениям невелик. Этот режим течения ставит ряд новых проблем. Чувствительность термоанемометра к пульсациям плотности и скорости в этом случае неодинакова, поэтому теоретически их можно разделить. При больших дозвуковых скоростях возникают серьезные трудности, обусловленные интерференционными эффектами датчика. Без сомнения, лазерные измерители скорости являются наилучшим средством измерения в этом режиме течения.

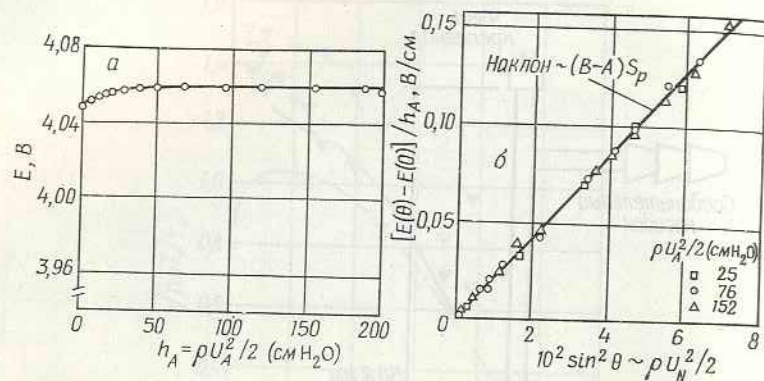


Рис. 11.29. Тарировочные кривые для датчика статического давления, изображенного на рис. 11.28. Характерное давление $h_B = 150$ мм вод. ст. a — продольная скорость ($\theta = 0$); b — поперечная скорость.

Измерения давления. Измерения пульсаций давления проводились в основном только на поверхностях. Для измерения на поверхностях разработаны достаточно хорошие датчики давления и микрофоны. Методы измерения пульсаций давления на поверхности описываются в работе Коркоса [53]. Однако измерение пульсаций статического давления в поле течения является чрезвычайно трудной задачей. Недавно Джоунс и Планшон [54] разработали датчик статического давления, с помощью которого можно измерять пульсации статического давления с частотой до 10 кГц. Конструкция датчика схематически изображена на рис. 11.28. Датчик устроен так, что, когда давление газа внутри датчика постоянно, из него через отверстия в стенке трубки вытекает газ в основной поток. Скорость течения газа в трубке зависит от статического давления окружающего трубку газа. Чувствительным элементом является нагретая пленка, которая реагирует на изменение скорости, вызванное изменением статического давления в потоке. На рис. 11.29 приведены тарировочные кривые этого датчика.

Возникает вопрос, как влияет нормальная составляющая пульсационной скорости на показания датчика статического давления. Оказывается, что, пока масштаб пульсаций скорости больше диаметра датчика, они мало влияют на величину статического давления. Необходимо совершенствовать конструкцию датчиков этого типа для измерений в сжимаемых течениях.

11.5. ИЗМЕРЕНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ

Измерение пульсаций концентрации производилось немногими авторами. Вэй и Либби [55] использовали нагретые пленки и нити

для определения корреляции пульсаций концентрации и скорости в потоке гелия и воздуха. По-видимому, недавно разработанные методы измерения пульсаций аэрозолей лазерными устройствами в комбинации с термоанемометрическими измерениями позволяют определить корреляцию [56]. Измерения пульсаций концентрации производились с помощью нескольких различных методов, в частности электрохимическим методом, описанным в разд. 11.2.3.

11.5.1. Методы, основанные на измерении теплоотдачи

Нагреваемые элементы, такие, как тонкие проволоочки, кусочки фольги или спирали, в течение длительного времени использовались для измерения концентрации газов в газовой хроматографии. Теплоотдача с поверхности прямо пропорциональна коэффициенту теплопроводности газа k_a , согласно закону Фурье

$$Q = k_a A \frac{\Delta T}{\delta}, \quad (11.43)$$

где Q — тепловой поток, A — площадь поверхности, нормальной к направлению теплового потока, ΔT — разность температур, а δ — толщина. Нагреваемый датчик, используемый для анализа пробы неизвестного газа, называется катарометром. Такое устройство было запатентовано в 1915 г.; его название означает «измеритель чистоты».

В последние годы Взем и Либби [55], а также Браун и Реболло [57] были разработаны методы измерения пульсаций концентрации с помощью термоанометра.

Комбинированный датчик с нагретыми нитью и пленкой. Вэй и Либби [55] использовали комбинированный датчик, изображен-

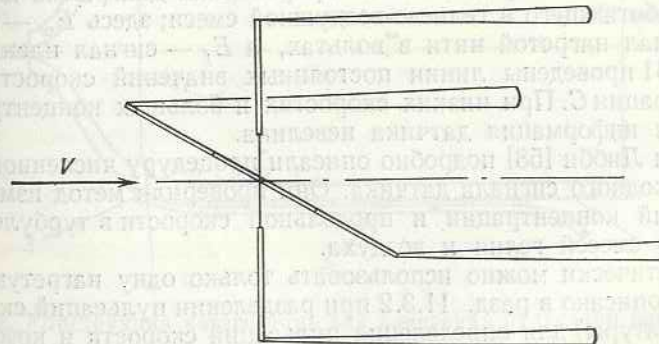


Рис. 11.30. Датчик для измерения пульсаций скорости и концентрации.

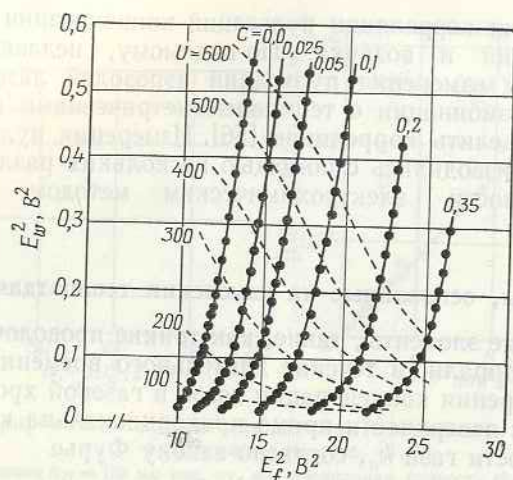


Рис. 11.31. Тарировочная диаграмма для датчика, изображенного на рис. 11.30.

ный на рис. 11.30, для измерения пульсаций скорости и концентрации. Датчик состоит из нагретой нити, работающей при сравнительно низкой температуре, которая перпендикулярна нагретой пленке и расположена чуть выше ее по течению. И нить, и пленка расположены ортогонально к направлению осредненного течения. Нагретая нить находится внутри «теплого поля» пленки.

Использовалась платиновая проволока диаметром 2,5 мкм и длиной ~0,38 мм. Диаметр нагретой пленки составлял 25 мкм. Пленка изготовлялась из платины и имела кварцевое покрытие. Ее длина составляла 0,25 мм. Нагретая нить работала при температуре на 125 К, а пленка на 300 К выше температуры потока.

На рис. 11.31 представлена тарировочная диаграмма для датчика, работающего в гелиево-воздушной смеси; здесь E_w — выходной сигнал нагретой нити в вольтах, а E_f — сигнал пленки. На рис. 11.31 проведены линии постоянных значений скорости U и концентрации C . При низких скоростях и больших концентрациях полезная информация датчика невелика.

Вэй и Либби [58] подробно описали процедуру численного анализа выходного сигнала датчика. Они проверили метод измерения пульсаций концентрации и продольной скорости в турбулентных течениях смесей гелия и воздуха.

Теоретически можно использовать только одну нагретую нить (как это описано в разд. 11.3.2 при разделении пульсаций скорости и температуры) для определения пульсаций скорости и коэффициента теплопроводности. Если температура газовой смеси остается постоянной, то пульсации коэффициента теплопроводности про-

порциональны пульсациям концентрации. Чувствительность нагретой нити к пульсациям коэффициента теплопроводности должна быть пропорциональна температуре нити. При этом нагретая нить вызывает некоторые изменения локальной температуры газа, которые в свою очередь приводят к небольшим изменениям коэффициента теплопроводности. Чувствительность к пульсациям скорости должна изменяться аналогично тому, как показано на рис. 11.23. Впервые этот метод измерения пульсаций концентрации был применен Корсином [59].

Метод катарометра. Браун и Реболло [57] разработали малоинерционный датчик типа катарометра для измерения концентрации газа. Датчик, изображенный на рис. 11.32, состоит из стеклянной трубки диаметром 2 мм, суживающейся к одному концу. С этого конца трубка полируется до образования очень малого отверстия, диаметр которого порядка 25 мкм, так что поток через датчик не зависит от местной скорости (течение с запирающим). На рис. 11.33 приведены типичные тарировочные кривые. Брауну и Реболло удалось сконструировать датчик еще меньших размеров, чем изображенный на рис. 11.32. Быстродействие этого датчика около 200 мкс. Частотная характеристика датчика очень близка к экспоненциальной характеристике системы первого порядка.

Датчик концентрации атомов. Принцип действия датчика концентрации атомов основан на выделении тепла при объединении

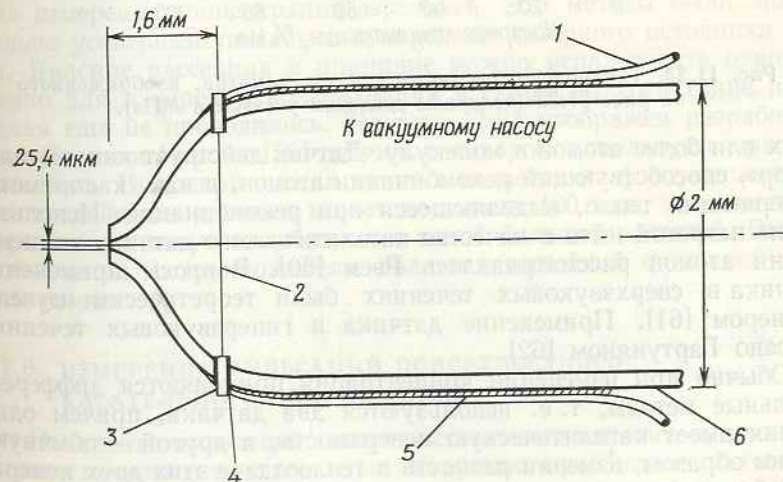


Рис. 11.32. Конструкция катарометра для измерения пульсаций концентрации.

1 — медные проводники; 2 — платиновая проволока $\varnothing 12,7$ мкм; 3 — вольфрамовая проволока; 4 — пайка; 5 — эпоксидная смола; 6 — стеклянная трубка.

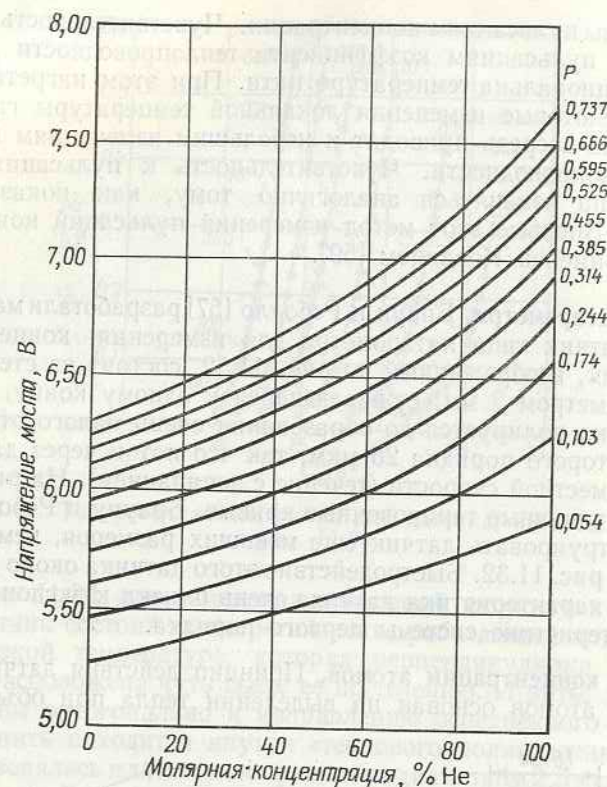


Рис. 11.33. Тарировочные кривые для катарометра, изображенного на рис. 11.32 (величины давления указаны в МПа).

двух или более атомов в молекулу. Датчик действует как «катализатор», способствующий рекомбинации атомов, и как калориметр, измеряющий тепло, выделяющееся при рекомбинации. Использование нагретой нити в качестве каталитического датчика концентрации атомов рассматривалось Рэем [60]. Вопросы применения датчика в сверхзвуковых течениях были теоретически изучены Рознером [61]. Применение датчика в гиперзвуковых течениях описано Гартуняном [62].

Обычно при измерении концентрации применяются дифференциальные методы, т. е. используются два датчика, причем один датчик имеет каталитическую поверхность, а другой — обычную. Таким образом, измеряя разность в теплоотдаче этих двух поверхностей, можно определить количество тепла, выделяющееся при рекомбинации. Катализатором обычно служит платиновая пленка или проволока. Некаталитическим чувствительным элементом другого датчика является платиновая пленка с тонким покрытием из

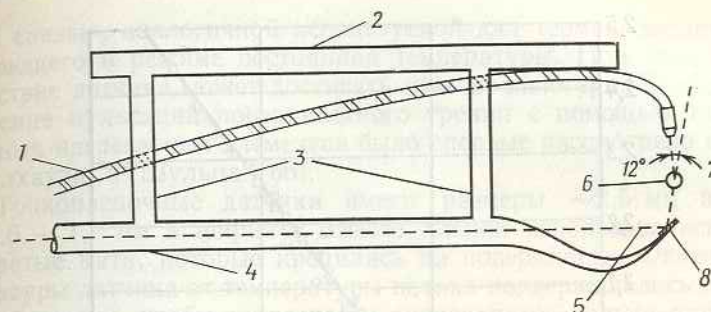


Рис. 11.34. Лазерный датчик.

1 — световод $\varnothing 3$ мм; 2 — латунная трубка $\varnothing 7,5$ мм; 3 — латунная трубка $\varnothing 6,1$ мм; 4 — трубка $\varnothing 12,2$ мм; 5 — путь светового луча; 6 — контрольный объем; 7 — апертура; 8 — очень тонкое зеркало с лицевой отражающей поверхностью $\varnothing 12$ мм.

монооксида кремния (около $5 \div 10$ мкм толщиной). Быстродействие этих датчиков может составлять порядка 10 мкс. Такие датчики концентрации применялись в основном для измерений в неравновесных течениях в ударных трубах. Атомов, способных рекомбинировать, в течениях газа при комнатной температуре обычно нет.

11.5.2. Рассеяние света

Методы, основанные на рассеянии света, могут применяться для измерения концентрации аэрозолей. Эти методы были значительно усовершенствованы с появлением лазерного источника света. Явление рассеяния в принципе можно использовать одновременно для измерений концентрации и скорости, хотя такие измерения еще не проводились. На рис. 11.34 изображен разработанный Янгом и Мерони [56] датчик, в котором используется рассеяние света. Выходной сигнал датчика подается на фотоумножитель. Быстродействие датчика может достигать 100 мкс, хотя частицы аэрозоля не могут колебаться с такой большой частотой. Выходной сигнал фотоумножителя является линейной функцией концентрации.

11.6. ИЗМЕРЕНИЕ ПУЛЬСАЦИЙ ПОВЕРХНОСТНОГО КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Измерение пульсаций поверхностного касательного напряжения можно производить с помощью поверхностных датчиков теплового потока или электрохимическими методами, описанными в разд. 11.2.3.

Тепловые методы. В этих методах используется аналогия между

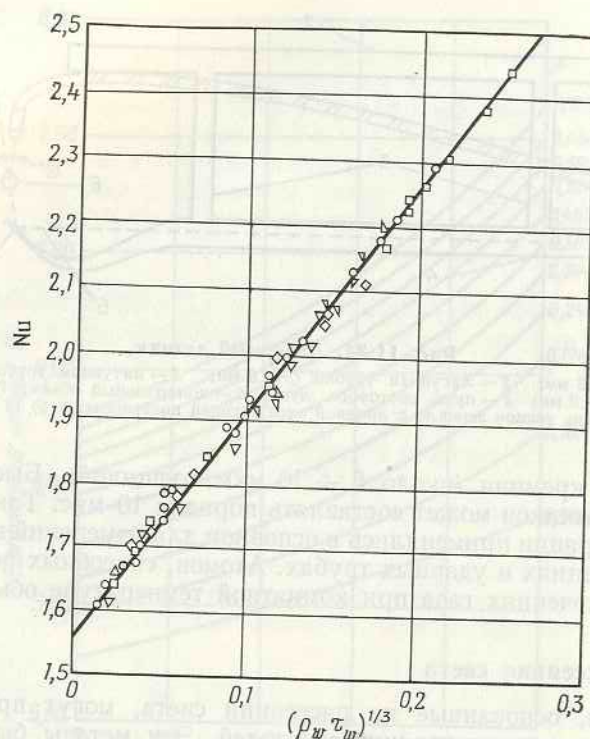


Рис. 11.35. Тарировочная кривая для тонкопленочного датчика теплового потока и касательных напряжений.

Экспериментальные данные приведены для ламинарного, переходного и турбулентного режимов дозвукового и сверхзвукового течений.

диффузией тепла и диффузией количества движения. Идею о существовании аналогии между теплоотдачей и касательными напряжениями впервые использовали Фейдж и Фолкнер [63] для ламинарных течений и Людвиг [64] для турбулентных пограничных слоев. В обоих случаях было установлено, что тепловой поток пропорционален касательному напряжению на стенке в степени $1/3$. На рис. 11.35 приведена типичная тарировочная кривая для тонкопленочных платиновых датчиков, полученная Оуэном и Беллхаузом [65]. Путем включения значения плотности на поверхности оказалось возможным учесть влияние сжимаемости. Оказалось также, что эта тарировка справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного течений. Аналогичные результаты могут быть также получены для пленочных датчиков с кварцевым покрытием в воде и других жидкостях.

Пленочный датчик может работать в электронной схеме с обрат-

ной связью, аналогичной используемой для термоанемометра, работающего в режиме постоянной температуры. При этом быстрое действие датчика может достигать многих килогерц. Подробно измерение пульсаций поверхностного трения с помощью тонкопленочных нагреваемых элементов было впервые рассмотрено в работе Беллхауза и Шульца [66].

Тонкопленочные датчики имеют размеры $\sim 2,5$ мм в длину и $0,6 \div 1,2$ мм в ширину. Вместо пленок использовались также нагретые нити, которые крепились на поверхности. Отличие температуры датчика от температуры потока поддерживалось не слишком большим, чтобы теплоотдача определялась только пристенной областью. Может возникнуть вопрос, являются ли пульсации теплоотдачи истинной мерой пульсаций напряжения трения на стенке или зависят от пульсаций непосредственно над пристенной областью. Измерение такими датчиками напряжения трения на стенке подробно освещается также в работе Сэндборна [3].

В турбулентных пограничных слоях пульсации напряжения трения на стенке очень велики по сравнению со средним значением [68]. Распределение вероятности напряжения трения характеризуется значительной асимметрией, положительные пульсации более чем в 5 раз превышают среднее напряжение трения для течения на плоской пластине. Серьезные трудности возникают при измерении таких больших пульсаций вследствие «нелинейных» эффектов осреднения. Трудности связаны с тем, что датчик теплового потока должен тарироваться в турбулентном течении (для получения требуемой величины трения на стенке), поэтому ошибки из-за нелинейных эффектов непосредственно содержатся в тарировочной кривой. Приближенный метод учета этого явления путем использования распределения вероятности описан в работе [68].

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A	— площадь;
a	— скорость звука;
C_p	— удельная теплоемкость;
c	— концентрация;
C_L	— коэффициент подъемной силы;
de	— приращение напряжения;
e	— пульсации напряжения;
E	— среднее напряжение;
f	— частота пульсаций;
F	— число Фарадея;
$F(0)$	— спектральная энергия при «нулевой частоте»;
I	— ток;
K	— коэффициент теплоотдачи;
K_n	— число Кнудсена;

k	— коэффициент теплопроводности;
L	— подъемная сила;
L_x	— макромасштаб турбулентности;
l	— расстояние, длина пути перемешивания;
M	— число Маха;
Nu	— число Нуссельта;
N	— скорость реакции;
P	— давление;
Q	— тепловой поток;
R	— сопротивление нити;
Re	— число Рейнольдса;
R_x	— корреляция продольной составляющей скорости;
S	— площадь поверхности;
S_u, S_v	— $\partial E / \partial U$; $(1/U) \partial E / \partial \Phi$;
T_T	— тензор турбулентных касательных напряжений;
T	— температура;
t	— время;
T_w	— температура нагретой нити;
u, v, w или u_i	— составляющие пульсационной скорости;
U, V, W или U_i	— составляющие средней скорости;
U_τ	— динамическая скорость;
U_p	— скорость частицы;
x, y, z или x_i	— прямоугольные координаты;
α	— угол, характеризующий скорость распространения тепла, или угол наклона;
δ_{ij}	— символ Кронекера;
ϵ	— турбулентная диссипация;
η	— колмогоровский масштаб;
ρ	— плотность;
ν	— кинематическая вязкость;
μ	— вязкость;
λ	— микромасштаб турбулентности;
ψ, θ	— угловые координаты;
τ_p	— постоянная времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lumley J. L., Panofsky H. A., The Structure of Atmospheric Turbulence, Interscience Publishers, New York, 1964. [Имеется перевод: Ламли Дж. Л., Пановский Г. А., Структура атмосферной турбулентности. — М.: Мир, 1966.]
2. Sandborn V. A., Slogar R. J., Study of the momentum distribution of turbulent boundary layers in adverse pressure gradients, NACA Report № TN 3264, 1955.
3. Sandborn V. A., Resistance Temperature Transducers, Metrology Press, Fort Collins, Colorado, 1972.

4. Schubauer G. B., Burgers J. M., в книге: Advances in Hot Wire Anemometry (W. L. Melnik, J. R. Weske, eds.), Proceedings, International Symposium on Hot Wire Anemometry, University of Maryland, 1967.
5. Ling S. C., Hubbard P. G., The hot-film anemometer — A new device for fluid mechanics research, *J. Aerosp. Sci.* 23, 890—891 (1956).
6. Lowell H. H., Patton N., Response of homogenous and two-material laminated cylinders to sinusoidal environmental temperature change, with applications to hot-wire anemometry and thermocouple pyrometry, NACA report № TN-3514, 1955.
7. Schubauer G. B., Klebanoff P. S., Theory and application of hot wire instruments in the investigation of turbulent boundary layers, NACA report № WR W-86, 1946.
8. Richardson E. V., McQuivey R. S., Sandborn V. A., Jog P. M., Comparison between hot film and hot wire measurements of turbulence, в книге: Proceedings of the Tenth Midwestern Mechanics Conference, Developments, in Mechanics, Vol. 4 (J. E. Cermak, J. R. Goodman, eds.), Johnson Publishing Co., Boulder, Colorado, 1968, p. 1213—1223.
9. McQuivey R. S., Turbulence in a hydrodynamically rough and smooth open channel flow, Ph. D. dissertation, Colorado State University, 1967, см. также Richardson E. V., McQuivey R. S., Measurements of turbulence in water, *ASCE J. Hydraulics*, 95, 411—430 (1968).
10. Bellhouse B. J., Rasmussen C. G., Low frequency characteristics of hot-film anemometers, DISA Information № 6, 1968.
11. Friehe C. A., Schwarz W. H., The use of Pitot static tubes and hot film anemometers in dilute polymer solutions, в книге: Viscous Drag Reduction (C. S. Wells, ed.), Plenum Press, New York, 1969, p. 281—296.
12. Spencer B. W., Jones B. G., Turbulence measurements with the split film anemometer probe, в книге: Proceedings of Symposium on Turbulence in Liquids, University of Missouri at Rolla, 1971.
13. Fage A., Townend H. C. H., An examination of turbulent flow with an ultramicroscope, *Proc. R. Soc. London*, A135, 656—677 (1932).
14. Bourot J. M., Chromophotographie des champs aerodynamiques, Publications Scientifiques et Techniques, № 226, Ministere Air, Paris, France, 1949.
15. Gee T. H., An Introduction to the Laser, von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series № 39: Laser Technology in Aerodynamic Measurements, 1971.
16. Goldstein R. J., Kried D. R., Measurement of laminar flow development in a square duct using a laser-Doppler flow meter, *J. Appl. Mech.*, 34, 813—818 (1967).
17. Schubauer G. B., A Turbulence indicator utilizing the diffusion of heat, NACA report № TR-524, 1935.
18. Taylor G. I., Statistical theory of turbulence — IV, Diffusion in a turbulent air stream, *Proc. R. Soc. London*, A151, 465—478 (1935).
19. Hagist W. H., Measurements of turbulent intensity by a diffusion method (неопубликованные исследования в ун-те шт. Колорадо, 1968).
20. Townend H. C. H., Statistical measurements of turbulence in the flow of air through a pipe, *Proc. R. Soc. London*, A145, 180—211 (1934).
21. Cady W. M., Velocity measurements by illuminated or luminous particles, в книге: Physical Measurements in Gas Dynamics and Combustion (R. W. Ladenburg, B. Lewis, R. N. Pease, H. S. Taylor, eds.), High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. 9, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1954.

22. Clutter E. W., Smith A. M. O., Braxier J. G., Techniques of flow visualization using water as the working medium, Douglas Aircraft Company report № ES 29075 (1959). Also Clutter D. W., Smith A. M. O., Flow visualization by electrolysis of water, *Aerosp. Eng.* 20, 24—27 (1961).
23. Schraub F. A., Kline S. J., Henry J., Runstadler P. W., Littel A., Use of hydrogen bubbles for quantitative determination of time dependent velocity fields in low speed water flow, Department of Mechanical Engineering report № MD-10, Stanford University, Stanford, California, 1964.
24. Mitchell J. E., Hanratty R. J., A Study of turbulence at a wall using an electrochemical wall shear stress meter, *J. Fluid Mech.*, 26, 199—221 (1966) см. также [25].
25. Sirkar K. K., Hanratty R. J., The use of electrochemical techniques to study turbulence close to a wall, в книге: Symposium on Turbulence Measurements in Liquids, University of Missouri at Rolla, 1971.
26. Reiss L. P., Investigations of turbulence near a pipe wall using a diffusion controlled electrode, Ph. D. dissertation, Chemical Engineering Department, University of Illinois, 1962.
27. Mitchell J. E., Investigation of wall turbulence using a diffusion controlled electrode, Ph. D. dissertation, Chemical Engineering Department, University of Illinois, 1965.
28. Son J. S., Hanratty T. J., Limiting relation for the eddy diffusivity close to a wall, *AIChE J.*, 13, 689—696 (1967).
29. Baldwin L. V., Cermak J. C., Fluid mechanics, paper № 2, Colorado State University, 1964.
30. Mitsuta Y., Sonic Anemometer — Thermometer for general use, *J. Meteorol. Soc., Japan*, 44, 12—24 (1966).
31. Barrett E. W., Suomi V. E., Preliminary report on temperature measurement by sonic means, *J. Meteorol.*, 6, 273 (1949).
32. Miyake M., Stewart R. W., Burling R. W., Tsuang L. R., Koprov B. M., Kuznetsov O. A., Comparison of acoustic instruments in an atmospheric turbulent flow over water, *Boundary Layer Meteorol.*, 2, 228—245 (1971).
33. Plate E. J., Bennett J. P., Rotary flow meter as turbulence transducer, *J. Eng. Mech. Div. ASCE Proc.*, 95 (№ EM6, paper № 6955), 1307—29, (1969).
34. Siddon T. E., Ribner H. S., An aerofoil probe for measuring the transverse component of turbulence, *AIAA J.*, 3, 747—749 (1965). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1965, № 4, с. 217.]
35. Cheng D. Y., Introduction of the viscous force sensing fluctuating probe technique with measurement in the mixing zone of a circular jet, AIAA paper № 73—1004, 1973.
36. Werner F. D., An investigation of the possible use of a glow discharge as a means of measuring air flow characteristics, *Rev. Sci. Instrum.* 21, 61—68 (1950).
37. Fuchs W., Investigations of the operating properties of the leakage current anemometer, NACA report № TM-1178, 1947.
38. Sandborn V. A., A review of turbulence measurements in compressible flow, NASA report № TM X 62—337, 1974.
39. Kovaszny L. S. G., Turbulence in supersonic flow, *J. Aeronaut. Sci.*, 20, 657—674, 682 (1953).
40. Wilson L. N., Domkevala R. J., Statistical properties of turbulent density fluctuations, *J. Fluid Mech.*, 43, 291—303 (1970).
41. Wehrmann O. H., Velocity and density measurements in a free jet, в книге: Turbulent Shear Flows, AGARD CP-93, 1970, paper № 15.

42. Wallace J. E., Hypersonic turbulent boundary layer measurements using an electron beam, *AIAA J.*, 7, 757—759 (1969). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1969, № 4, с. 221.]
43. Laufer J., Aerodynamic noise in supersonic wind tunnels, *J. Aeronaut. Sci.*, 28, 685—692 (1961).
44. Stainback P. C., Wagner R. D., Owen F. K., Horstman C. C., Experimental studies of hypersonic boundary layer transition and effects of wind tunnel disturbances, NASA report № TN D-7453, 1974.
45. Laderman A. J., Demetriades A., Measurements of the mean and turbulent flow in a cooled-wall boundary layer at March 9.37, AIAA paper № 72—73, San Diego, California, 1972.
46. Laufer J., Factors affecting transition Reynolds numbers on models in supersonic wind tunnels, *J. Aeronaut. Sci.*, 21, 497—498 (1954).
47. Morkovin M. V., On supersonic wind tunnels with low free-stream disturbances, Air Force Office of Scientific Research report № TN 56—540, 1956.
48. Sandborn V. A., Wisniewski R. J., Hot wire exploration of transition on cones in supersonic flow, Proceedings of the 1960 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute (D. M. Mason, W. C. Reynolds, W. G. Vincenti, eds.), Stanford University Press, Stanford, California, 1960.
49. Donaldson J. C., Wallace J. P., Flow fluctuation measurements at Mach number 4 in the test section of the 12 inch supersonic tunnel (D); AEDC report № TR-71-143, 1971.
50. Rose W. C., Johnson D. A., Turbulence in a shock-wave boundary layer interaction *AIAA J.*, 13, 884—889 (1975). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1975, № 7, с. 53.]
51. Klebanoff P. S., Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, NACA report № TR-1247, 1955.
52. Zoric D. L., Approach of turbulent boundary layers to similarity, Ph. D. dissertation, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, 1968.
53. Corcos G. M., Pressure measurements in unsteady flows, ASME Symposium on Measurements in Unsteady flow, Worcester, Massachusetts, 1962, p. 15—21.
54. Jones B. G., Planchon H. P., A study of the local pressure field in turbulent shear flow and its relation to aerodynamics noise generation, NASA report № CR 134493, 1972.
55. Way J., Libby P. A., Hot wire probes for measuring velocity and concentration in helium-air mixtures, *AIAA J.*, 8, 976—977 (1970). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1970, № 5, с. 169.]
56. Yang B. T., Meroney R. N., On diffusion from an instantaneous point source in a naturally stratified turbulent boundary layer with a laser light scattering probe, Colorado State University Technical Report № 20 (CER 70-73 BTY-RNM-17), Fort Collins, Colorado, 1972.
57. Brown G. L., Rebollo M. R., A small, fast response probe to measure composition of a binary gas mixture, *AIAA J.*, 10, 649—652 (1972). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1972, № 5, с. 111.]
58. Way J., Libby P. A., Application of hot wire anemometry and digital techniques to measurements in a turbulent helium jet, *AIAA J.*, 9, 1567—1573 (1971). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1971, № 8, с. 162.]
59. Corrsin S., Extended application of the hot wire anemometer, NACA report № TN 1864, 1949.
60. Wray K. L., A quantitative rapid response atom detector, AVCO Research Report № 46, 1959.

61. Rosner D. E., Catalytic probes for the determination of atom concentrations in high speed gas streams, *ARS J.*, 32, 1065—1073 (1962). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1962, № 7, с. 79.]
62. Hartunian R. A., Local atom concentrations in hypersonic dissociated flows at low densities, *Phys. Fluids*, 6, 343—348 (1963).
63. Page A., Falkner V. M., An experimental determination of the intensity of friction on the surface of an aerofoil, *Proc. R. Soc. London*, A129, 378—410 (1930).
64. Ludweig H., Instrument for measuring the wall shearing stress of turbulent boundary layers, NACA report № TM-1284, 1950.
65. Owen F. K., Bellhouse B. J., Skin-friction measurement at supersonic speeds, *AIAA J.*, 8, 1358—1360 (1970). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1970, № 7, с. 204.]
66. Bellhouse B. J., Schultz D. L., Determination of mean and dynamic skin friction, separation and transition in low-speed flow with a thin film heated element, *J. Fluid Mech.*, 24, 379—400, 1966.
67. Kistler A. L., Fluctuation measurements in a supersonic turbulent boundary layer, *Phys. Fluids*, 2, 290—296 (1959).
68. Sandborn V. A., Pyle W. L., Evaluation of the surface shear stress along rearward facing ramps, Research Memorandum № 25, Colorado State University, 1975.

12

Методы измерения атмосферной турбулентности

Дж. КОННЕЛЛ¹⁾

12.1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих отношениях измерение атмосферной турбулентности мало отличается от измерения турбулентности в аэродинамической трубе. Однако различия между течениями в трубах и в атмосфере позволяют (а часто — требуют) применения особой аппаратуры и методов. Некоторые факторы, характерные только для атмосферной турбулентности, перечисляются в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Некоторые факторы, влияющие на выбор методов измерения атмосферной турбулентности

1. Большие масштабы и большое их разнообразие.
2. Явления движения (волновые, ветровые и локальные).
3. Большие периоды движений и наличие трендов.
4. Изменения температуры, давления, влажности и запыленности атмосферы могут иметь место одновременно с пульсациями скорости.
5. Возможность возникновения пульсаций вследствие волновых движений или турбулентности, а также при их совместном воздействии.
6. Механические, тепловые и человеко-машинные воздействия, которым подвергаются приборы и наблюдатели.
7. Удаленность наблюдателя от наблюдаемого явления.

Полезная диаграмма масштабов атмосферных явлений и измерительных методов была составлена Лилли и Леншовом [1]. Она воспроизводится на рис. 12.1.

Рассмотрим кратко более простую задачу измерения характеристик воздушного потока в аэродинамических трубах. Успех методов измерения в аэродинамических трубах часто объясняется тем,

¹⁾ J. R. Connell, The University of Tennessee Space Institute, Tullahoma, Tennessee 37388.

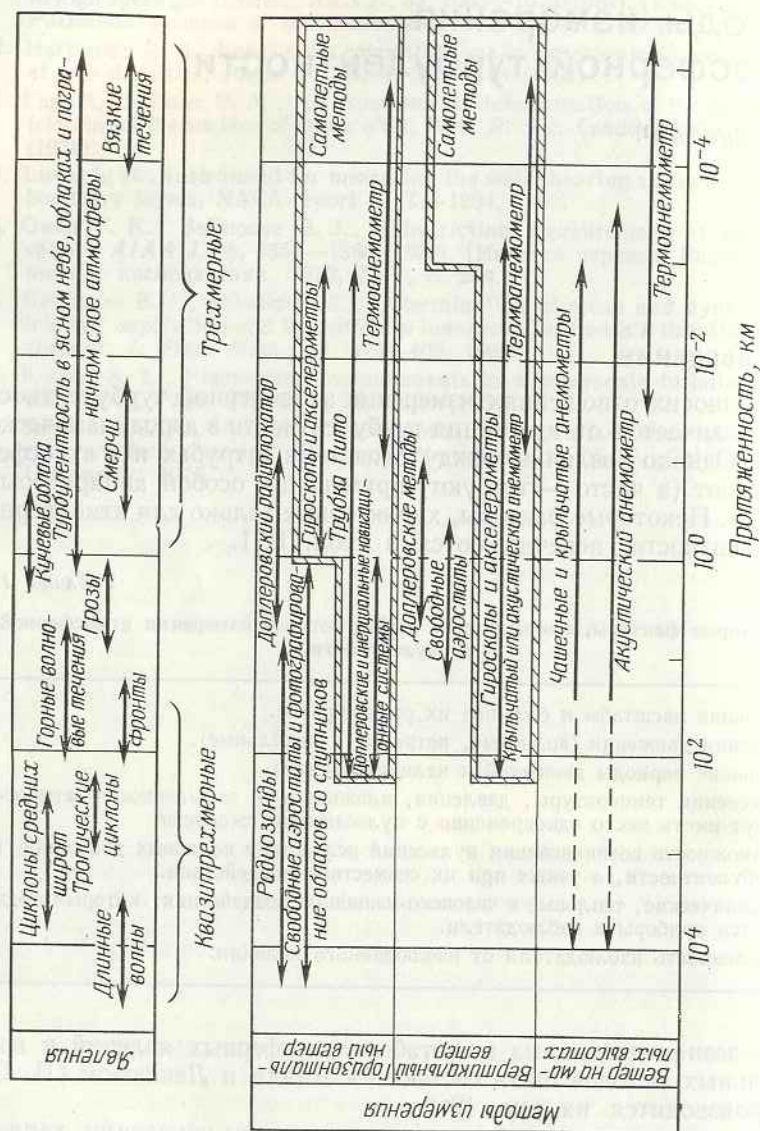


Рис. 12.1. Горизонтальные масштабы различных атмосферных явлений и масштабные ограничения различных методов измерения атмосферных движений по Джилли и Леншову [1].

что условия в трубе являются полностью контролируемыми. Поэтому нагретые нити и тонкие холодные проволоочки в трубах не испытывают частых соударений с частицами, что имеет место в атмосфере. Изменение температуры и плотности воздуха и концентрации химических веществ в трубных течениях может быть ограничено сравнительно небольшими величинами с тем, чтобы выходные сигналы термоанемометра или лазерного измерителя скорости содержали лишь незначительную часть нерасшифровываемой информации. Отношение пульсационной составляющей скорости к среднему значению скорости обычно невелико, так что, например, неопределенность в направлении потока при термоанемометрических измерениях мала. И, наконец, в поток можно ввести светорассеивающие аэрозоли с характеристиками, обеспечивающими возможность применения лазерного измерителя скорости. Все перечисленные выше методы могут быть использованы и используются для измерений в атмосфере с целью решения определенных задач. Много других методов применяется в атмосферных измерениях при больших масштабах и временных интервалах, низких частотах и в более отдаленных областях атмосферы. В табл. 12.2 перечисляются основные методы измерения турбулентности.

Таблица 12.2

Методы измерения атмосферной турбулентности

- I. Дистанционные (прибор удален от объекта измерений) волновые методы, в которых измеряются интенсивность рассеянного излучения и доплеровский сдвиг.
Радиоволны (радиолокатор): хорошо разработанный метод, однако в исследованиях атмосферной турбулентности применяется мало. Световые волны (оптический локатор): быстро прогрессирующий метод.
Звуковые волны (акустический локатор): экономичный и перспективный метод.
- II. Локальные статические методы (анемометрические мачты и посты).
Чашечные и крыльчатые анемометры и флюгеры.
Аэродинамические анемометры.
Акустические анемометры.
Термоанемометры.
Термометры.
Барометры.
Влагомеры.
- III. Локальные динамические методы (измерительные приборы располагаются на платформах, находящихся в воздушном потоке с автоматической регистрацией данных и/или использованием телеметрии).
Радиозонды, шары-зонды, шары-пилоты и аэростаты.
Воздушные змеи.
Летательные аппараты с инерциальной платформой или без нее.
Дистанционные автоматические метеостанции.
Метеорологические буи.

Наземные и локальные статические методы измерений в большинстве своем основаны на старых принципах. Они постоянно совершенствуются и надежность их улучшается. Волновые методы измерения и слежения и летательные аппараты, оборудованные инерциальными навигационными приборами для определения положения и скорости, значительно расширили возможности измерения турбулентности в атмосфере.

Следует отметить, что турбулентность или турбулентоподобные явления, играющие важную роль в атмосфере, различаются по масштабу длины от приблизительно одного сантиметра до нескольких тысяч километров. В некоторых случаях движение имеет чисто стохастический характер (например, турбулентность, вызванная трением); в других случаях, напротив, движение можно рассматривать лишь как детерминированное (грозы и циклоны). (Обсуждению движений последнего типа посвящена монография В. Старра [2] «Физика явлений с отрицательной вязкостью».) Так, измерение скорости воздушных течений путем слежения за свободными аэростатами в атмосфере будет являться на первый взгляд измерением скорости «среднего течения», на которое накладываются турбулентные возмущения. Однако «среднее течение», которое получается в результате таких многодневных измерений, представляет собой пульсационное течение, которое переносит тепло, водяные пары и количество движения и дает вклад в картину ветра и осадков при осреднении на значительно большем промежутке времени. Кроме того, существуют явления, которые не всегда вызывают перемешивание в атмосфере, однако называются турбулентными из-за того, что они вызывают болтанку самолетов.

В этой главе основное внимание будет уделено атмосферной турбулентности средних (10 км) и меньших масштабов. После краткого обзора различных методов измерения с упором на самолетные методы исследования будут приведены примеры измерений в планетарном пограничном слое. В каждом примере рассматриваются препятствия, имеющиеся на нижней поверхности атмосферы: горы и здания.

12.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ, ПРИБОРЫ, ПЛАТФОРМЫ И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

12.2.1. Характеристики приборов

Единая терминология в этой области отсутствует даже среди тех авторов, которые занимаются физикой атмосферы. Определения, относящиеся к характеристикам чувствительности приборов, даны в работах Джилла и Гекстера [3] и Маццареллы [4].

Основным требованием при выборе прибора является получение качественной информации об изменении во времени измеряемой величины. Кроме того, необходимо учитывать окружающие условия, в которых производятся измерения, и частотные характеристики прибора. Следующая проблема состоит в проверке показаний прибора при ожидаемых воздействиях, а также в выяснении того, как платформа, на которой располагается прибор, влияет на результаты измерений и на саму измеряемую величину. Если имеются данные о таких влияниях, то на их основе можно изменить метод измерения либо использовать фильтры или другие способы корректировки экспериментальных данных.

12.2.2. Чашечные анемометры, применяемые для измерения на анемометрических мачтах

В качестве конкретного примера рассмотрим измерение осредненных и пульсационных характеристик воздушного течения в атмосфере на высотах до 20 м, например, над поляной в лесу, с помощью чашечных анемометров и флюгеров. Максимальные размер и масса подвижной части приборов этого типа составляют $\sim 0,5$ м и $\sim 0,1$ кг соответственно. Вследствие этого и некоторых других факторов, таких, как площадь чашек и лопастей и трение в опоре, чашечные анемометры и флюгеры не позволяют точно измерить изменения скорости и направления ветра, происходящие с частотой > 3 Гц при скорости ветра, например, 3 м/с. В качестве характеристики чувствительности прибора часто берется некоторая постоянная длина, в данном примере 1 м. Постоянная времени, запаздывание по фазе и коэффициент затухания для различных типов анемометров и флюгеров приведены в работе Маццареллы [4]. Хорошее определение терминов дано Мак-Креди [5]. На рис. 12.2 приведены частотные характеристики типичного анемометра, заимствованные из работы Картера [7]. Видно, что при больших частотах энергия турбулентных пульсаций не может быть измерена с достаточной точностью. Нескомпенсированные запаздывания по фазе приводят к неправильным значениям взаимных корреляций турбулентных потоков. Установлено также, что небольшое отклонение от горизонтальности чашечного или крыльчатого анемометра может приводить к большим ошибкам в определении перекрестных корреляций. Тарировочные или фазочастотные характеристики в таком положении можно получить не для каждого анемометра. Чашечные анемометры дают завышенные значения средней скорости ветра и заниженные значения пульсационной составляющей, поэтому их результаты измерений должны, как правило, корректироваться.

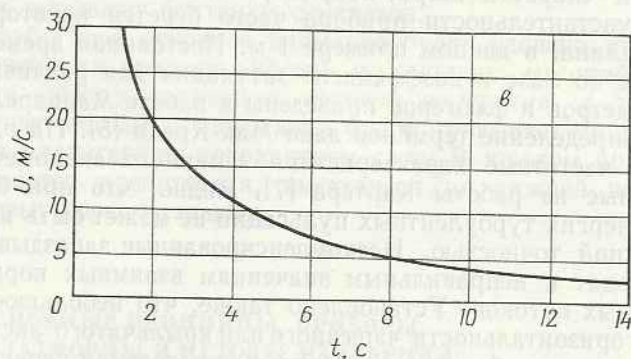
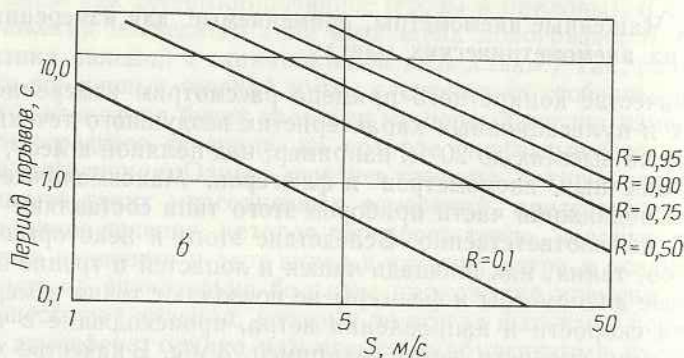
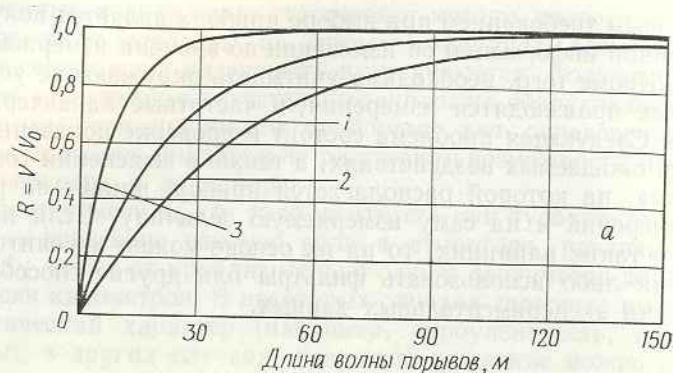


Рис. 12.2. Частотные характеристики различных анемометров по Картеру [7]. а — реакция датчика скорости на синусоидальные пульсации скорости ветра (1 — крыльчатый анемометр, 2 — трехчашечный анемометр, 3 — створчатый анемометр); б — реакция крыльчатого анемометра из рис. а с учетом средней скорости ветра как дополнительной переменной; в — время, в течение которого огибающая выходного сигнала крыльчатого анемометра падает до 10% от ее первоначального значения.

12.2.2.1. Выставление прибора. Кроме частотной характеристики чашек или вертушек важное значение имеет размещение и выставление приборов. Исследования в аэродинамических трубах точности измерения при типичном расположении анемометра относительно открытой анемометрической мачты показывают, что максимальная ошибка в величине средней скорости ветра составляет -40% и $+12\%$ [6—8] (рис. 12.3). Даже незначительное боковое отклонение от точного направления ветра приводит к ошибке более чем в 1% . Удаление прибора от мачты должно быть больше длины боковой стороны треугольной мачты. Различия в положении прибора по вертикали относительно перекрещивающихся силовых элементов конструкции мачты влияют на величину максимальной ошибки.

12.2.2.2. Ориентирование оси прибора. Если напряжения Рейнольдса вычисляются по взаимным корреляциям измеренных составляющих скорости, то оси приборов должны точно совпадать с истинной вертикалью. Ошибка в 1° в ориентации прибора может привести к $5-10\%$ -ной ошибке в величине напряжения Рейнольдса (Дикон [9] и Понд [10]), а возможно, и к ошибке в 100% (Краус [11, 12]). Влияние ошибки ориентации прибора может быть уменьшено путем фильтрации частот, не дающих вклад в напряжения, из составляющих скорости перед нахождением взаимной корреляции (Краус [12] и Дайер и др. [13]). Это означает срез нижних частот в пульсациях горизонтальной составляющей скорости и может уменьшить ошибку по крайней мере на порядок по сравнению с максимальным значением, даваемым Краусом [11]: 100% при отклонении от вертикали на 1° . Частотные характеристики чашечных и крыльчатых анемометров и флюгеров в турбулентных ветровых полях обсуждаются в работе Ачесона [14]. Измерения скорости ветра рассматриваются в работе Мозеса и др. [15].

12.2.3. Волновые методы

Волновые методы измерения турбулентности в настоящее время быстро развиваются. Наиболее известен из них основанный на эффекте Доплера метод измерения радиальной скорости движущегося объекта, отражающего радиоволны, с помощью радиолокатора. Примером уникальных возможностей метода является быстрое дистанционное измерение двумерного вектора скорости двумя радиолокаторами с пространственным разрешением 200 м^3 в объеме $1,4 \cdot 10^4 \text{ м}^3$. Благодаря применению системы оперативной цифровой обработки измерений диапазон точного измерения скорости составляет от -25 до $+25 \text{ м/с}$ в области $30 \times 30 \times 3 \text{ км}^3$. К ограничениям метода относятся: большая стоимость оборудования и обслуживания; недостаточная мобильность; недостаточные дальности и разрешение для мезо-

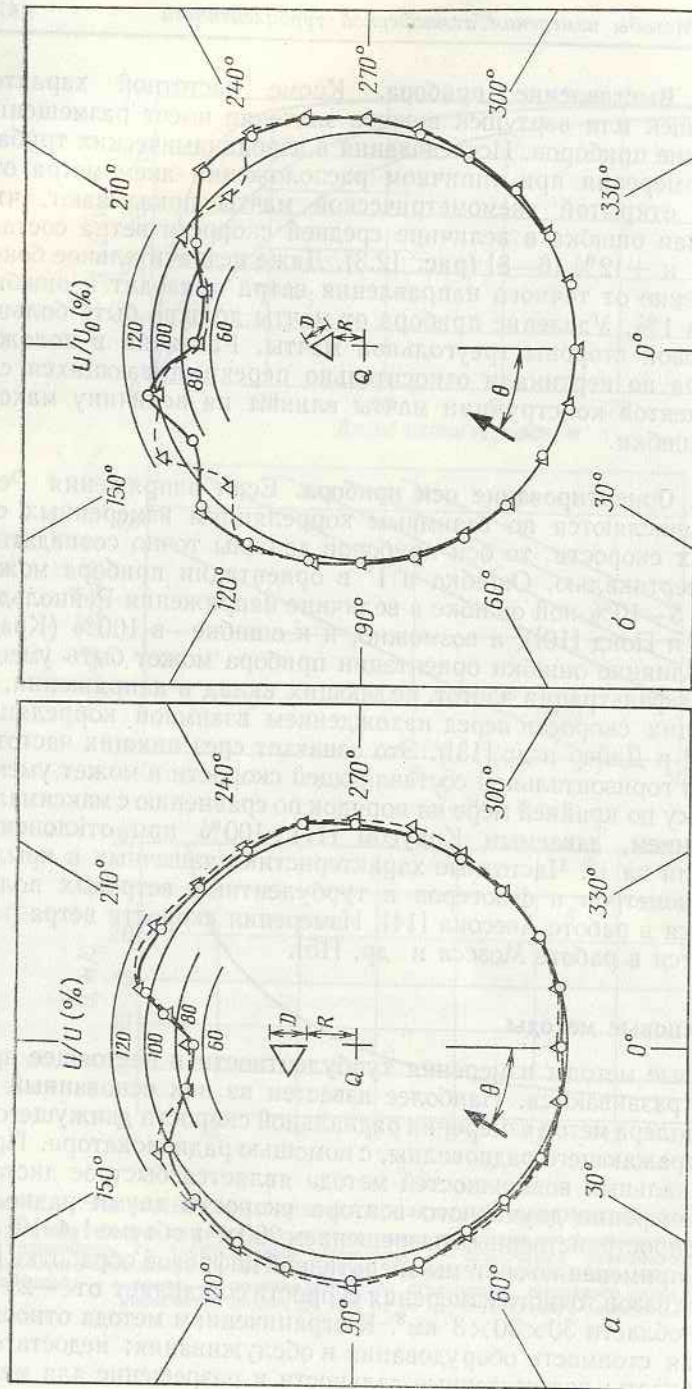


Рис. 12.3. Графики в полярных координатах истинной скорости ветра (в %) в зависимости от направления ветра для анемометра Q , расположенного на расстоянии R от треугольной открытой мачты со стороны основания D [3].
 a — анемометр Q расположен параллельно стороне основания мачты, — — — $R/D = 1/2$, — — — $R/D = 1$; δ — анемометр Q расположен на линии симметрии, значения R/D и обозначения те же самые. Стрелка указывает направление ветра.

масштабов; ограниченный диапазон точного измерения скорости. Отсутствие отражающих радиоволны, трассирующих воздушные течения частиц в ясном небе и частично в облаках является серьезным ограничением для применения радиолокаторов, за исключением локаторов очень большой мощности. Выброс мелких частиц и использование угольных отражателей на шарах-пилотах позволяет получить данные для нескольких отдельных траекторий и моментов времени в ясном небе.

Лазерный доплеровский измеритель скорости обеспечивает высокое пространственное разрешение при дистанционных измерениях турбулентности. Специалисты предсказывают быстрое развитие этого метода. В настоящее время применение метода ограничено теми областями атмосферы, в которых имеется достаточное количество взвешенных частиц аэрозолей или пыли. Для большинства лазерных доплеровских измерителей скорости дальность измерения не превышает 1 м. В США имеются установки с дальностью до 70 м¹⁾.

Методы, в которых используются звуковые волны, являются одними из самых старых и в то же время новых методов измерения скорости. Эти методы обладают следующими преимуществами:

а) Рассеивающие центры (флуктуации скорости и плотности, капли жидкости и т. п.) имеются в естественных условиях почти всюду в атмосфере.

б) Низкая стоимость оборудования.

в) В низкочастотных акустических методах используется значительно более простое электронное оборудование, чем в радиолокационных и лазерных методах.

Простой прибор для измерения двумерного вектора скорости вектора (Келтон и Бригаут [16]) состоит из узконаправленного свистка с частотой звука 10 кГц и двух, расположенных по обе стороны от луча, микрофонов со следящими фильтрами на расстоянии ~20 м от свистка. Микрофоны регистрируют звуковые колебания, распространяющиеся под прямым углом от звукового луча в горизонтальной плоскости. Сравнение результатов 300 измерений акустическим методом и одновременно крыльчатым анемометром при скоростях ветра от 1 до 10 м/с показало, что различие результатов в среднем не превышает $\pm 0,5$ м/с по величине или $\pm 0,5^\circ$ по направлению. Результаты измерения скорости и направления ветра обоими методами сравниваются на рис. 12.4.

Теперь рассмотрим другой акустический метод, который позволяет точно измерить скорость ветра, а главное обладает большим быстродействием. Используется акустический измеритель скорости, температуры и концентрации, в котором звуковые колебания рас-

¹⁾ Дальность измерения зависит от схемы ЛДИС. Она обычно мала для двухлучевых неосевых схем (~1 м) и может быть весьма велика для осевых импульсных схем (~10 км), см. гл. 13. — Прим. перев.

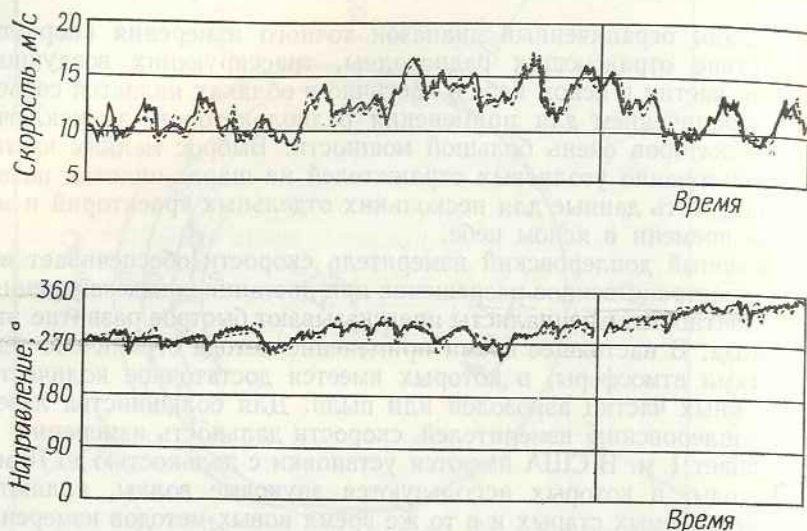


Рис. 12.4. Измерение скорости и направления ветра акустическим (штриховая линия) и крыльчатим (сплошная линия) анемометрами [16]. Небольшие расхождения вызваны тем обстоятельством, что акустический анемометр реагирует на капли дождя. (Рисунок взят из работы Келтона и Брикауа [16].)

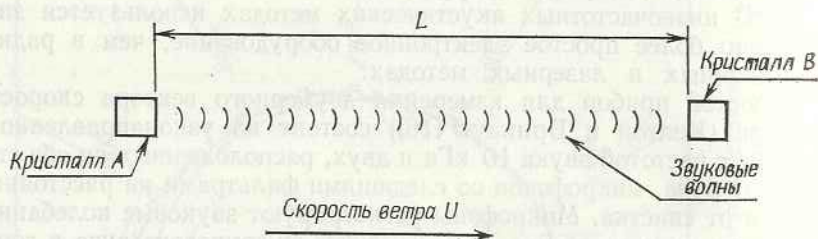


Рис. 12.5. Прохождение звуковых импульсов между двумя пьезоэлектрическими кристаллами, являющимися одновременно приемниками и излучателями.

пространяются между фиксированной парой пьезоэлектрических кристаллов, являющихся одновременно приемниками и излучателями звука. Система работает следующим образом (рис. 12.5). Звук распространяется со скоростью c относительно неподвижного воздуха, а относительно неподвижного излучателя-приемника кристалла A (или B) — со скоростью $c' = c \pm U = (\gamma RT)^{1/2} \pm U$, где $\gamma = C_p/C_v$, R — газовая постоянная и T — температура. Время прохождения звука от A до B равно

$$\Delta t_{AB} = L/c'_{AB} = L/(c-U). \quad (12.1)$$

Время прохождения от B до A равно

$$\Delta t_{BA} = L/(c+U). \quad (12.2)$$

Электроакустическая схема устроена таким образом, что, когда первый импульс, испускаемый кристаллом A , достигает кристалла B , тот испускает звуковой импульс. Когда этот импульс достигает A , он вызывает испускание звукового импульса кристаллом A . Времена прохождения звука, зависящие от c' и L , измеряются и сравниваются между собой. Поскольку L — известная константа, можно записать

$$c - U = L/\Delta t_{AB}, \quad (12.3)$$

$$c + U = L/\Delta t_{BA}. \quad (12.4)$$

Вычитая (12.3) из (12.4), получаем

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{\Delta t_{AB}} - \frac{1}{\Delta t_{BA}} \right) = \frac{L}{2} \left(\frac{\Delta t_{BA} - \Delta t_{AB}}{\Delta t_{AB} \Delta t_{BA}} \right). \quad (12.5)$$

При малых L формула (12.5) принимает вид

$$U \approx \frac{L}{2} \frac{\delta \Delta t}{\Delta t^2}, \quad (12.6)$$

где $\delta \Delta t \equiv \Delta t_{AB} - \Delta t_{BA}$.

При проведении измерений этим методом тепловые и молекулярные параметры исключаются из рассмотрения. Скорость воздуха можно исключить путем сложения формул (12.3) и (12.4), тогда получим

$$c = \frac{L}{2} \left(\frac{1}{\Delta t_{BA}} + \frac{1}{\Delta t_{AB}} \right) \approx \frac{L}{\Delta t}. \quad (12.7)$$

Частота испускания импульсов кристаллом A или B равна $f = \frac{1}{2(1/\Delta t)}$, а Δt — среднее геометрическое времен прохождения звука в двух направлениях. Таким образом, как температура, так и скорость ветра в данном направлении могут быть измерены.

В последнее время дистанционные методы измерения с использованием импульсного акустического локатора настолько усовершенствовались, что позволяют производить измерения всех трех ортогональных составляющих скорости ветра.

Когда скорость движения воздуха сравнима со скоростью звука, становится существенным эффект искривления луча. Флуктуации температуры также искажают измерения. Для типичных условий в пограничном слое атмосферы, согласно оценкам Берана и др. [17], ошибки в вертикальной составляющей скорости меньше 0,1 м/с.

Скорость вертикального движения w можно приближенно вычислить по формуле

$$w = \frac{c}{2} \left(\frac{f_0}{f_s} - 1 \right),$$

где c — скорость звука относительно воздуха, f_0 — частота излучателя, а f_s — частота звуковых волн, отраженных обратно рассеивающими частицами. Каждый импульс дает целый спектр частот, обусловленный доплеровским сдвигом. На рис. 12.6 приведены характеристики воздушных потоков из работы Берана и др. [17], измеренные приемопередатчиком с вертикальным лучом. На рис. 12.6, а показана интенсивность рассеянного излучения как функция высоты и времени. На рис. 12.6, б представлена структура вертикальных потоков, полученная по измерениям доплеровского сдвига частоты в рассеянном излучении.

Беран и Клиффорд [18] использовали систему из трех приемопередатчиков, нацеленных на одну и ту же область пространства пограничного слоя атмосферы, как показано на рис. 12.7, заимствованном с некоторыми изменениями из их работы. К рисунку надо добавить уравнение для разрешения составляющих скорости. Принимая, что искривление луча пренебрежимо мало, полный вектор

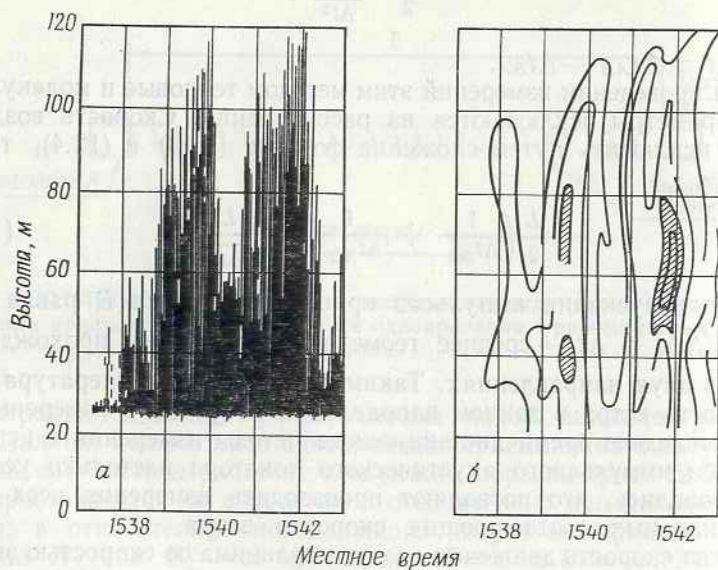


Рис. 12.6. Характеристики воздушных потоков, измеренные приемопередатчиком с вертикальным лучом [17].

а — запись интенсивности звукового эха от атмосферных струй; б — поле вертикальной скорости для этих струй, полученное из анализа доплеровского сдвига звукового эха.

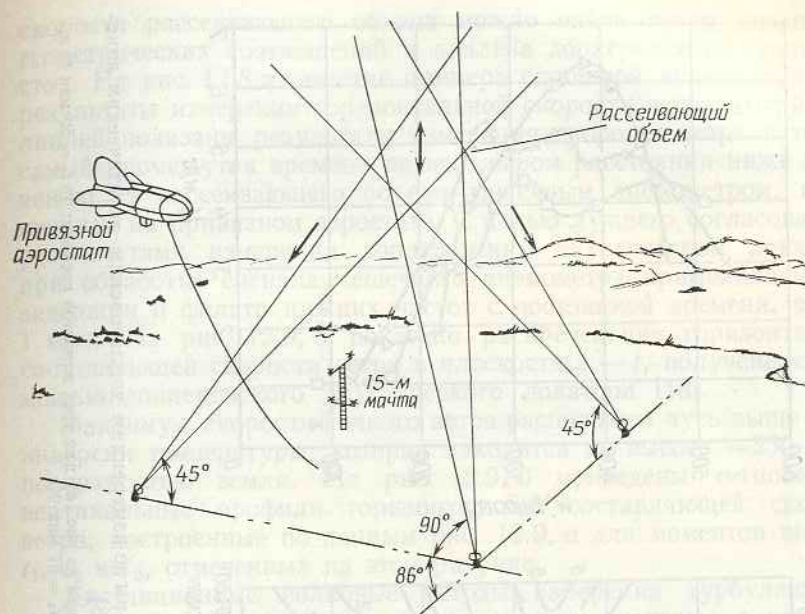


Рис. 12.7. Схема акустической системы, использованной для измерения вектора скорости ветра путем измерения доплеровского сдвига частоты эха [18].

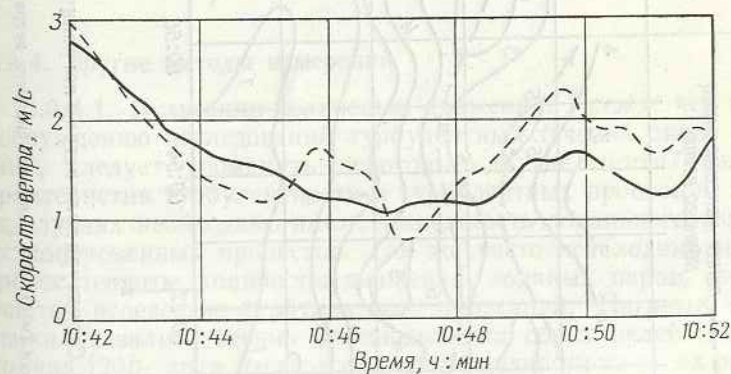


Рис. 12.8. Сравнение измерений скорости ветра доплеровской акустической системой (сплошная линия) и обычным анемометром, установленным на привязном аэростате (штриховая линия) [18].

Данные, полученные с помощью аэростата, пропускались через цепь задержки и фильтр нижних частот, имеющий постоянную времени 1 мин, чтобы получить лучшее соответствие с данными, получаемыми акустической системой.

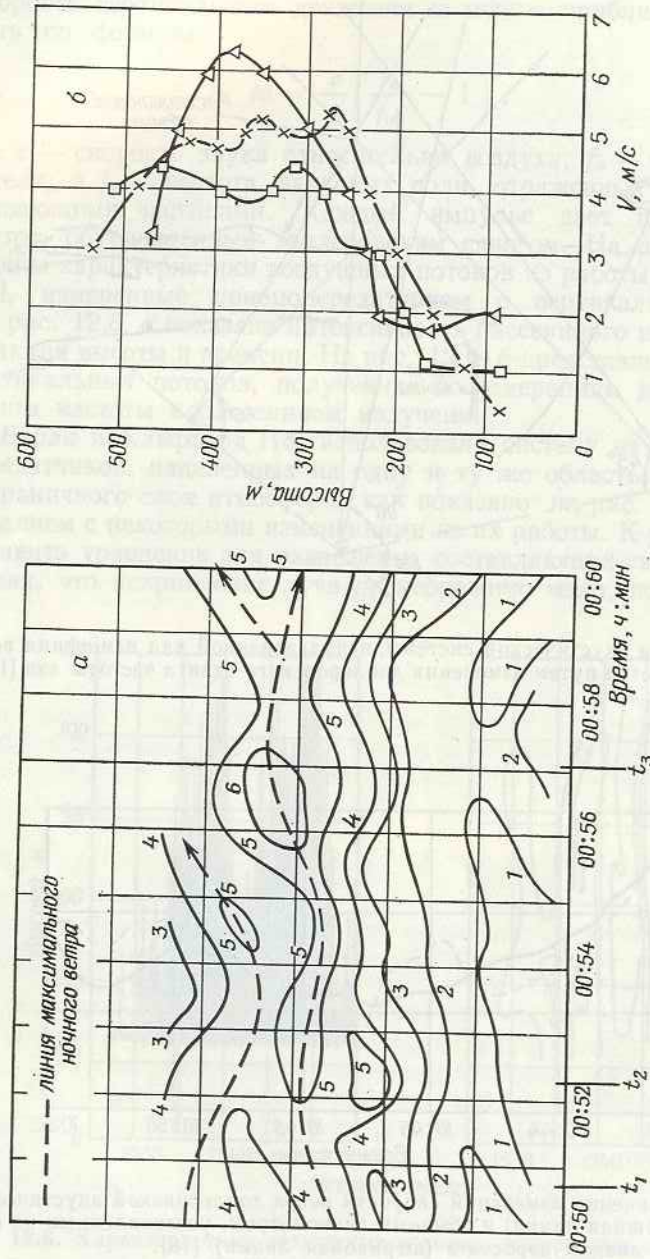


Рис. 12.9. Структура поля ветра в пограничном слое атмосферы по измерениям доплеровским акустическим лока-
тором [18].

a — изотехи (м/с); b — изменение скорости ветра с высотой (полученное из рис. a) для трех моментов времени: $\square$ $t_1 = 50$ мин 45 с;
 $\times$ $t_2 = 57$ мин 0 с; $\triangle$ $t_3 = 57$ мин 45 с.

скорости рассеивающего объема можно найти путем несложных геометрических соотношений и анализа доплеровского сдвига частот. На рис. 12.8 в качестве примера сплошной линией показаны результаты измерения горизонтальной скорости ветра. Штриховой линией показаны результаты измерения скорости ветра в тот же самый промежуток времени на небольшом расстоянии ниже по течению от рассеивающего объема чашечным анемометром, подвешенным на привязном аэростате. С целью лучшего согласования с результатами измерения доплеровским акустическим локатором при обработке сигнала чашечного анемометра применялись цепь задержки и фильтр нижних частот с постоянной времени, равной 1 мин. На рис. 12.9, a показано распределение горизонтальной составляющей скорости ветра в плоскости $z - t$, полученное с помощью доплеровского акустического локатора [18].

Максимум скорости ночного ветра расположен чуть выше точки инверсии температуры, которая находится на высоте ~ 250 м над поверхностью земли. На рис. 12.9, b приведены «мгновенные» вертикальные профили горизонтальной составляющей скорости ветра, построенные по данным рис. 12.9, a для моментов времени t_1 , t_2 и t_3 , отмеченных на этом рисунке.

Дистанционные волновые методы измерения турбулентности открывают новые возможности ее анализа, которые с избытком компенсируют некоторые существенные ограничения этих методов. В качестве примера можно привести использование лазерного доплеровского локатора для измерения скорости ветра на расстоянии, превышающем один километр, правда, только в ночное время (Бенедетти-Микельанджели и др. [19]).

12.2.4. Другие методы измерений

12.2.4.1. Пульсации количества движения. Прежде чем перейти к обсуждению исследований турбулентных течений около препятствий, следует упомянуть некоторые другие методы измерений характеристик турбулентности и турбулентных процессов. Во многих случаях необходимо иметь возможность локального измерения быстропеременных процессов. Так же часто необходимо измерять перенос теплоты, количества движения, водяных паров, аэрозолей и частиц вследствие турбулентных пульсаций. Нагретые нити и пленки оказались весьма полезными для обеих целей (Вайлер и Берлинг [20]), хотя часто возникают трудности из-за их разрушения в потоке и изменения тарировочных характеристик. Вместо них можно применять свободные от этих недостатков анемометры с тензометром, в которых для измерения ветровых нагрузок используется сферическая головка, связанная с тензодатчиком [21—23].

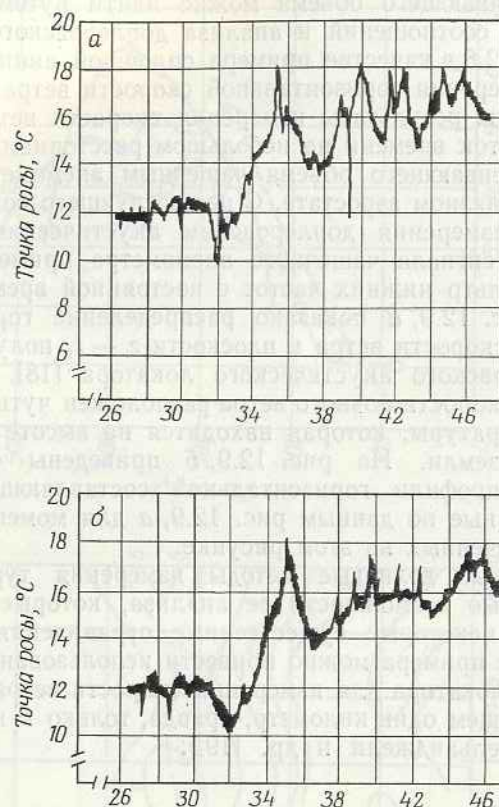


Рис. 12.10. Сравнение двух методов измерения атмосферной влажности [44].
 а — малоинерционный лаймановский α -гигрометр; б — более инерционный конденсационный гигрометр, у которого лучше известна абсолютная тарировка.

12.2.4.2. Пульсации концентрации водяных паров. При измерении турбулентного переноса водяных паров $\overline{w'Q'}$ с приемлемым разрешением во времени ограничивающим фактором является измерение концентрации водяных паров. Лаймановский α -гигрометр имеет постоянную времени порядка 10 мс. Несколько большую инерционность, но лучшую абсолютную точность имеет конденсационный гигрометр. Результаты измерения этими приборами сравниваются на рис. 12.10 (Бак [44]). Гигрометр также является полезным прибором для измерения пульсаций. Другим малоинерционным прибором является микроволновый рефрактометр, который чувствителен к содержанию водяных паров, а также других примесей, таких, как пыль.

12.2.4.3. Пульсации температуры. Быстрые изменения температуры можно измерить термометром сопротивления с очень тонкой нитью (до 60 Гц), акустическим термометром (до 1000 Гц) или с помощью нескольких нагретых до различной температуры нитей (до 10 кГц). Сравнение результатов измерений турбулентных пульсаций теплового потока вблизи поверхности земли всеми тремя методами выполнено Бузингером и др. [24].

12.3. САМОЛЕТНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ

12.3.1. Введение

Использование самолетных методов измерения атмосферной турбулентности важно по двум причинам. Во-первых, во многих случаях необходимо производить измерения локальными динамическими методами, исходя из требований чувствительности, быстродействия, пространственного разрешения, а иногда из-за физической природы измеряемой величины. Во-вторых, явления, которые необходимо наблюдать, часто имеют большую геометрическую протяженность и/или происходят отчасти непредсказуемо, а средние значения изменяются во времени (значительный тренд), так что требуется быстро движущаяся во всех трех измерениях платформа, положение которой в пространстве всегда точно известно. Наиболее подходящей платформой для приборов в случае локальных, а иногда и дистанционных измерений оказались пилотируемые многомоторные самолеты.

12.3.2. Простые методы невысокой точности

Некоторые простые, довольно грубые методы измерений продолжают применяться и в настоящее время. Характеристики вертикальных воздушных потоков с длинами волн от 200 м до 1 км и скоростями более 2 м/с можно определять, используя самолет как измерительный прибор. Параметрами, которые используются для определения турбулентности, обычно являются: 1) масса и аэродинамические моменты самолета, 2) давление в двигательной установке, 3) приборная скорость самолета, 4) высота и 5) скорость набора высоты по показаниям негерметичного барометра анероидного типа (измеритель dp/dt) (см. разд. «Вариометры» в работе Миддлтона и Спилхауза [25]). Предварительно производится калибровка самолета-измерителя (при пренебрежимо малых вертикальных воздушных потоках) путем регулирования давления в двигательной установке таким образом, чтобы обеспечить заданные скорости набора высоты. При измерении турбулентности давление в двигателе и скорость самолета поддерживаются постоянными.

ными, а скорость набора высоты определяет вертикальную скорость воздушного потока.

Составляющая пульсационной скорости вдоль оси трубки Пито самолета может быть легко получена и проанализирована, если известна передаточная функция системы измерения скорости самолета. Мак-Креди [26, 45] пропускал основной сигнал $\bar{u}^2$ в инерционном интервале через фильтр и аналоговое устройство, чтобы получить выходной сигнал, пропорциональный скорости диссипации в степени $1/3$ в соответствии с теорией Колмогорова. Этот выходной сигнал рассматривается как универсальный показатель интенсивности турбулентности.

12.3.3. Методы повышенной точности

Если требуются более точные измерения турбулентности с использованием самолета или если нужно знать ортогональные составляющие измеряемых величин в широком диапазоне масштабов, скажем от 4 м до 10 км, то необходимо ввести опорную инерциальную систему координат для определения угловой ориентации относительно земли. Перемещение датчиков относительно земли может быть определено с помощью ЭВМ, если вдоль каждого координатного направления опорной инерциальной системы координат, реализованной инерциальной платформой, ориентирован акселерометр для измерения соответствующего ускорения. Один трехстепенный гироскоп и вертикальный акселерометр вместе с доплеровской навигационной системой или без нее представляют собой простейшую систему этого типа (Даттон и Леншов [27], Уорнер и Телфорд [28]). Интегрирование ускорений $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ дает значения x и y с хорошей точностью и достаточно точные значения x , y . Вертикальная составляющая скорости $\dot{z}$ обычно мала и ее медленное изменение приводит к необходимости корректировать z по показаниям барометрического высотомера, за исключением тех случаев, когда промежуток времени исследований очень мал. Вопросы применения инерциальной платформы обсуждаются в работах Келли [29], Леншова [30] и Лилли и Леншова [1].

Система уравнений для определения скорости ветра по измерениям трубкой Пито или термоанемометром и флюгером, устанавливаемым на носовой штанге самолета, приведена в работах Эксфорда [31], Даттона [32] и Леншова [30]. Ошибки по отношению к начальной выставке платформы, накапливающиеся после 6 ч полета, составляют $\sim 2 \div 6$ км в горизонтальной координате и $1 \div 1,5$ м/с в скорости ветра. Для коррекции этих отклонений использовались независимые системы измерения, которые имеют значительные кратковременные ошибки, но в которых проблема долговременного дрейфа незначительна.

Измерение температуры окружающей среды с помощью самолета затруднительно, так как необходимо иметь малоинерционные датчики, которые могли бы работать в облаках или в условиях дождя. Необходимо исключить влияние испарения и возможность повреждения датчика при соударении с каплями, следовательно, необходимо предусмотреть защиту датчика от этих воздействий. Чаще всего с этой целью используются термометры с экранами, обеспечивающими торможение или завихрение потока. Основным недостатком применения экранов состоит в увеличении постоянной времени термометра, хотя наряду с этим возникают и другие погрешности в температуре. Роди и Спайрс-Дюран [33], Маккарти [34] и Ачесон [35] проанализировали некоторые из этих ошибок. Постоянная времени для термометра с экраном имеет порядок нескольких секунд, тогда как стандартный проволоочный термометр сопротивления без экрана имеет постоянную времени меньше 0,1 с.

Литература по метеорологии свидетельствует о неуклонном возрастании числа исследований турбулентности самолетными методами. В большинстве случаев результаты таких исследований получают с помощью хорошо оборудованных летающих лабораторий. Однако при решении ряда конкретных задач удалось получить очень хорошие результаты, используя значительно более простое оборудование.

12.3.4. Обработка результатов измерений и анализ погрешностей

Некоторые ошибки системы измерений трехмерной турбулентной скорости анализируются в работе Брауна и др. [37], а перечень оборудования летающей лаборатории и методы обработки данных приведены в работах Фридмана и др. [38, 39]. Показано, что могут быть измерены значения скорости до 20 см/с. Минимальное разрешаемое значение длины волны определяется колебаниями выносной штанги и составляет около 4 м. Средние по большому промежутку времени (от 30 мин до 6 ч) имеют ошибки, которые частично можно устранить при последующем анализе данных.

Более подробно самолетные методы измерений описываются в материалах симпозиума по дистанционным самолетным методам измерений [36].

12.4. САМОЛЕТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ВОЗДУШНЫХ ПОТОКАХ С ПОДВЕТРЕННОЙ СТОРОНЫ ГОРНОГО ХРЕБТА

В 1972 году автор проводил измерение нисходящих воздушных потоков и турбулентности на хорошо оборудованной летающей лаборатории «Буффало» (NCAR [40]), принадлежащей Националь-

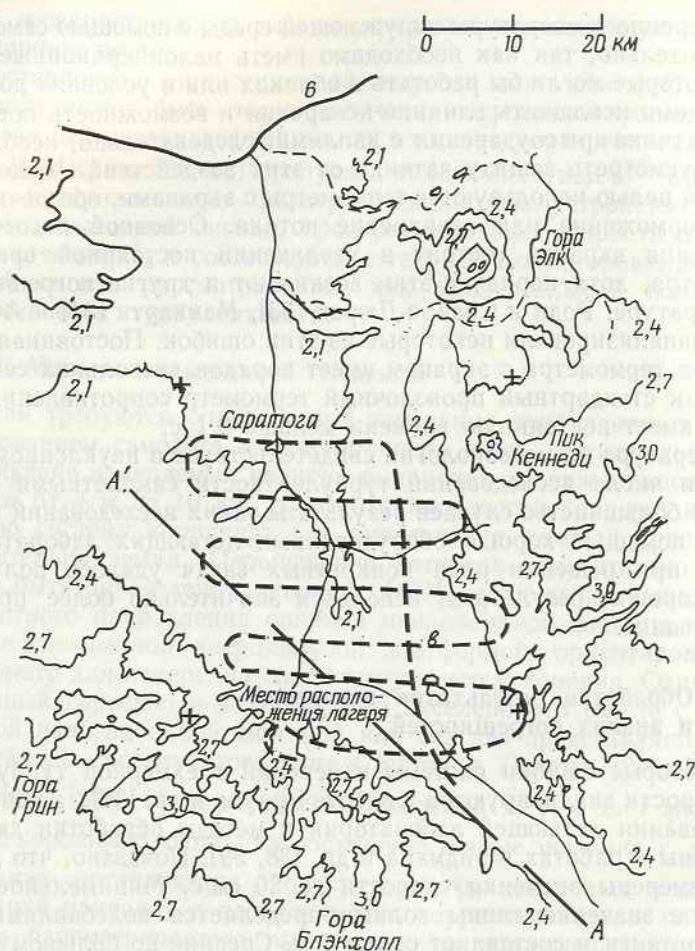


Рис. 12.11. Карта местности долины Саратога к западу от горного хребта Сьерра-Мадре и к востоку от хребта Медсин-Бау. Сплошные контуры показывают высоту в км.

ному центру атмосферных исследований, в долине Саратога с подветренной стороны горного хребта Сьерра-Мадре в шт. Вайоминг. Цель исследования состояла в определении возможности того, что турбулентность восходящих потоков и скачки в содержании влаги в воздушных потоках в долине, возникающих при атмосферном обтекании горного хребта Сьерра-Мадре, могут перенести сухой нагретый воздух долины вверх, к облакам, дающим осадки в виде снега с подветренной стороны горного хребта Медсин-Бау. На

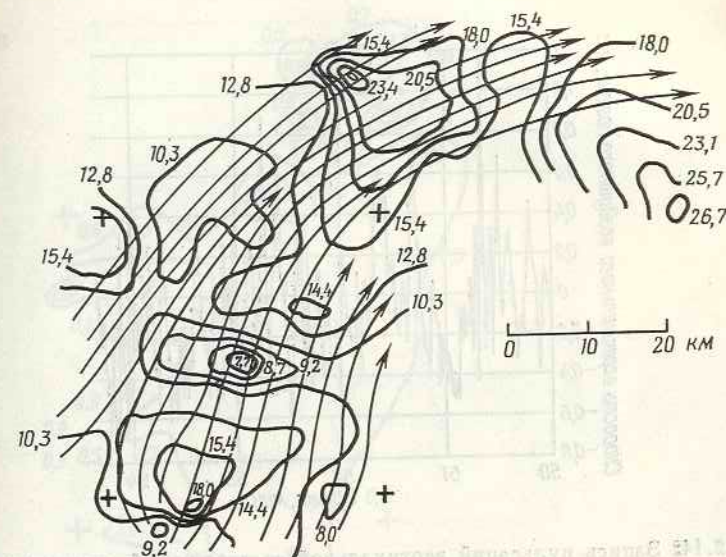


Рис. 12.12. Линии тока и изотакхи (м/с) поля скорости ветра на высоте 2590 м над уровнем моря (около 300 м над дном долины).

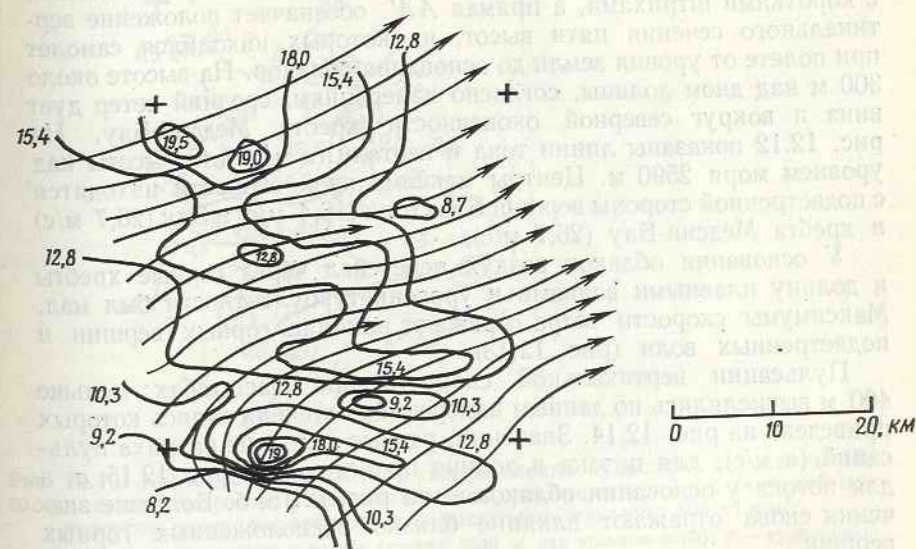


Рис. 12.13. Линии тока и изотакхи (м/с) поля скорости ветра у основания облаков (на высоте около 760 м над дном долины).

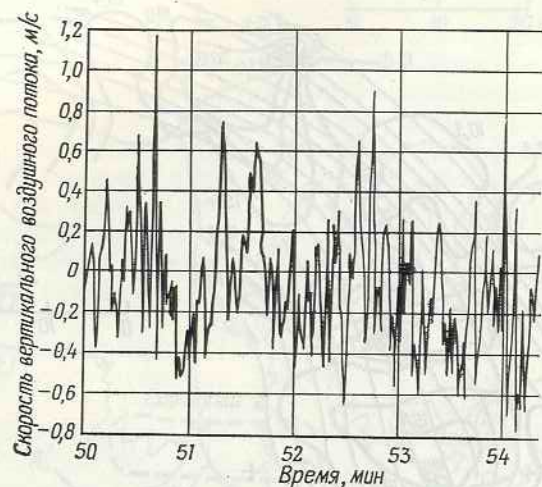


Рис. 12.14. Запись пульсаций вертикальной составляющей скорости ветра, измеренной летающей лабораторией.

рис. 12.11 изображена карта местности с двумя хребтами и долиной. Трасса полета самолета под облаками показана кривой линией с короткими штрихами, а прямая AA' обозначает положение вертикального сечения пяти высот, на которых находился самолет при полете от уровня земли до основания облаков. На высоте около 300 м над дном долины, согласно измерениям, средний ветер дует вниз и вокруг северной оконечности хребта Медсин-Бау. На рис. 12.12 показаны линии тока и изотакхи (в м/с) для высоты над уровнем моря 2590 м. Центры максимальной скорости находятся с подветренной стороны вершин Блэкхолл (16,4 м/с) и Элк (26,7 м/с) и хребта Медсин-Бау (26,7 м/с).

У основания облаков воздух перетекал через горные хребты и долину плавными волнами и уровень турбулентности был мал. Максимумы скорости ветра отражают влияние горных вершин и подветренных волн (рис. 12.13).

Пульсации вертикальной скорости при масштабах меньше 400 м вычислялись по данным измерений, типичная запись которых приведена на рис. 12.14. Значения, равные половине размаха пульсаций (в м/с), для потока в долине приведены на рис. 12.15, а, а для потока у основания облаков — на рис. 12.15, б. Большие значения снова отражают влияние близко расположенных горных вершин.

Наибольшая величина интенсивности турбулентности u'/U составляла примерно 0,09 у горы Элк и 0,06 у северной оконечности

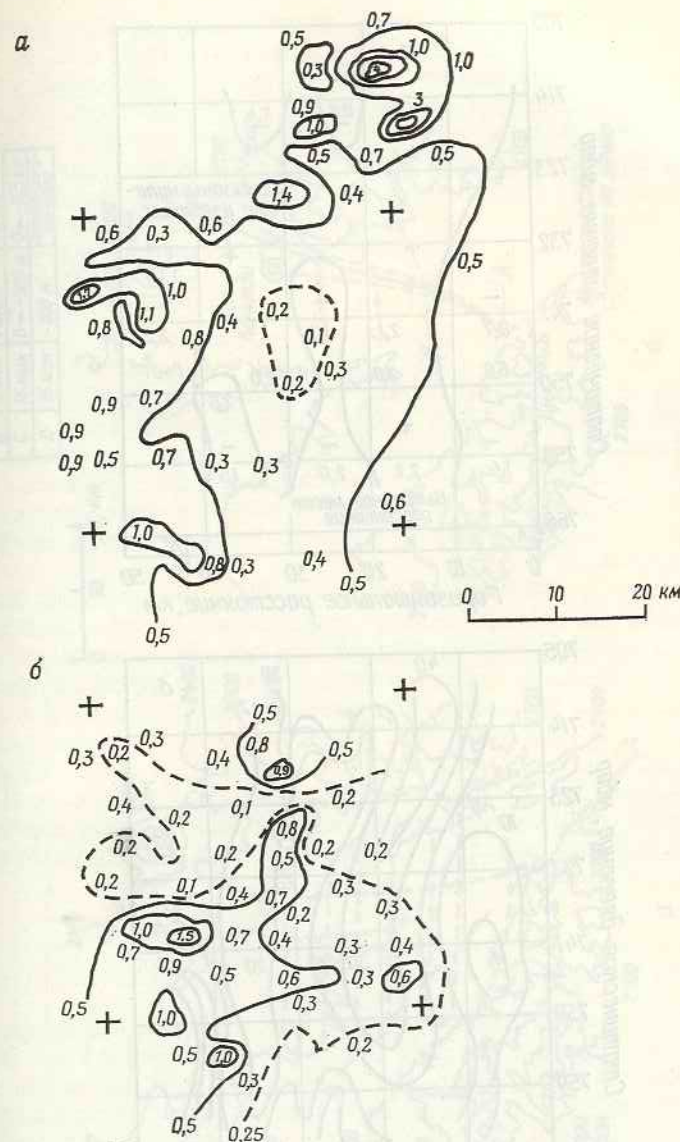


Рис. 12.15. Карты горизонтального распределения пульсаций вертикальной составляющей скорости, рассчитанных как средние от крайних значений на коротком интервале времени (для масштабов, меньших 400 м) в м/с. а — турбулентные пульсации в долине (высота 2590 м над уровнем моря); б — турбулентные пульсации у основания облаков.

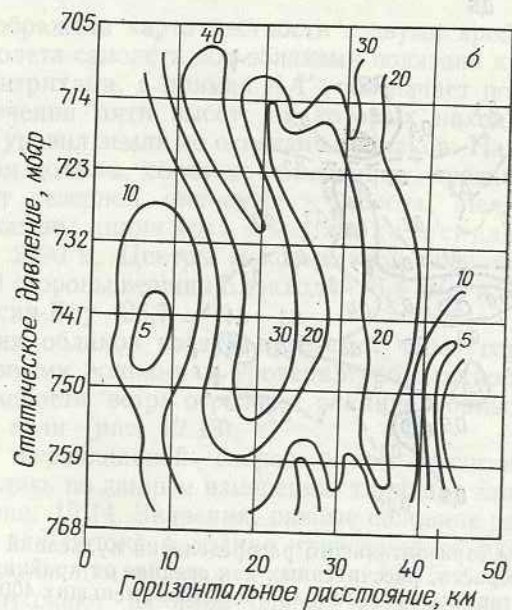
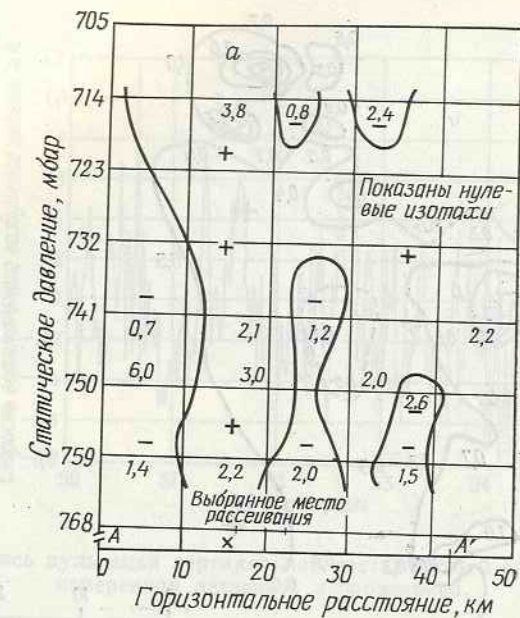


Рис. 12.16. Направленная вверх (а) и горизонтальная (б) скорости воздушного потока в вертикальном сечении А—А' на рис. 12.11 (м/с).

Δt	Высота полета	Ширина
A	1,7 мин +150 м	не вычисляется
B	15 мин +500 м	1,5 км
C	15 мин 0 → -300 м	0 → -0,5 км
D	15 мин -100 м	предположи- мо 0

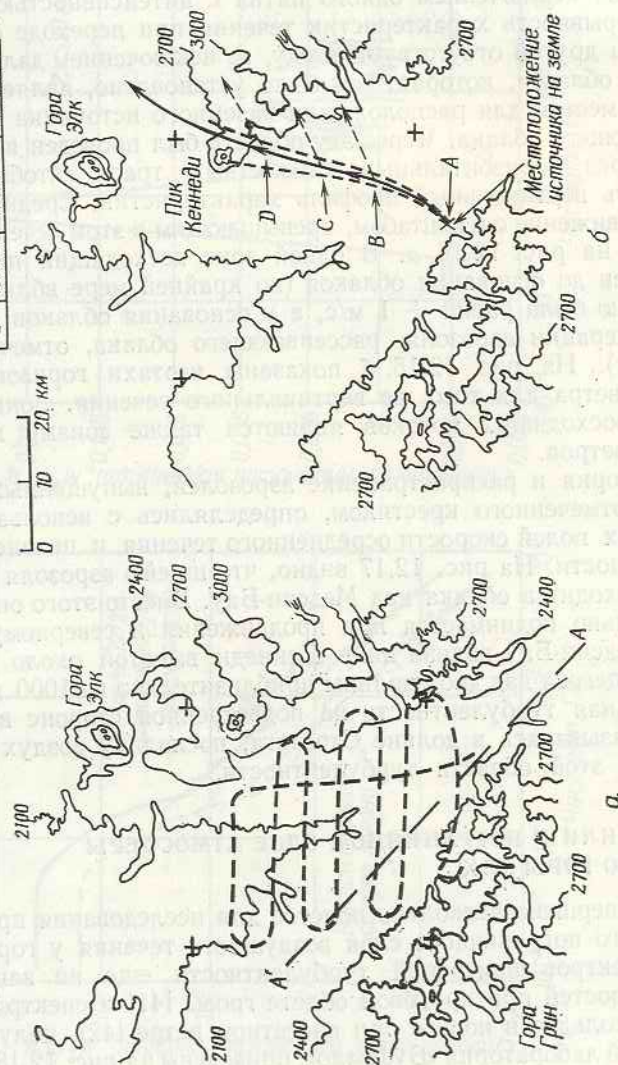


Рис. 12.17. Карта местности долины Саратога, на которой показана полученная расчетным путем геометрия шлейфа аэрозоля, выпущенного в выбранной точке на поверхности долины. Расчеты проводились по простой модели с использованием измеренных значений средней скорости и пульсаций ветра. а — основная карта местности (такая же, как на рис. 12.11); б — облако аэрозоля; штриховыми кривыми показаны границы зоны поперечного распространения аэрозоля от основной траектории вследствие диффузии; штриховыми стрелками показаны боковые выбросы в верхней части шлейфа аэрозоля у основания атмосферных облаков.

хребта Сьерра-Мадре. У южной оконечности хребта интенсивность была около 0,03, а в центре долины — около 0,01. У основания облаков интенсивность турбулентности составляла от 0,01 до 0,02, за исключением одного пятна с интенсивностью 0,04.

Непрерывность характеристик течения при переходе от одного уровня на другой отсутствует всюду, за исключением дальней юго-западной области, которая, как было установлено, является оптимальным местом для расположения наземного источника аэрозоля, рассеивающего облака. Через эту область был проведен вертикальный разрез горизонтальных самолетных трасс, чтобы лучше определить вертикальный профиль характеристик. Среднее вертикальное движение с масштабом, превышающим в этом сечении 1 км, показано на рис. 12.16, а. В одной зоне восходящий поток был непрерывен до основания облаков (по крайней мере вблизи земли величина w была равна +1 м/с, а у основания облаков +4 м/с). Место генерации аэрозоля, рассеивающего облака, отмечено крестиком (х). На рис. 12.16, б показаны изотакхи горизонтальной скорости ветра для того же вертикального сечения. Зоны непрерывных восходящих потоков являются также зонами наиболее сильных ветров.

Траектория и распространение аэрозолей, выпущенных из источника, отмеченного крестиком, определялись с использованием трехмерных полей скорости осредненного течения и интенсивности турбулентности. На рис. 12.17 видно, что шлейф аэрозоля практически не входит в облака над Медсин-Бау. Вместо этого он только незначительно поднимается при продвижении к северному концу хребта Медсин-Бау вблизи пика Кеннеди высотой около 3300 м, возвышающегося над дном долины приблизительно на 1000 м. Даже очень сильная турбулентность на подветренной стороне вершины Элк не сказывалась в долине Саратога, поскольку воздух быстро уходил из этой области турбулентности.

12.5. ПРОФИЛИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ ОКОЛО ГОРЫ ЭЛК

Было совершено несколько полетов для исследования профилей планетарного пограничного слоя воздушного течения у горы Элк. Анализ спектров измерений турбулентности еще не завершен. Спектр скоростей при круговом облете грозы [41] и спектр напряжений Рейнольдса в полете при пассатном ветре [42], полученные на летающей лаборатории «Буффало», приведены на рис. 12.18, а и б, чтобы показать диапазон измеряемых частот. Полученные при предварительной обработке поля скорости ветра для одного полета у горы Элк показывают наличие следа и циркуляционного течения на подветренной стороне и встречного потока на наветренной стороне (рис. 12.19 и 12.20).

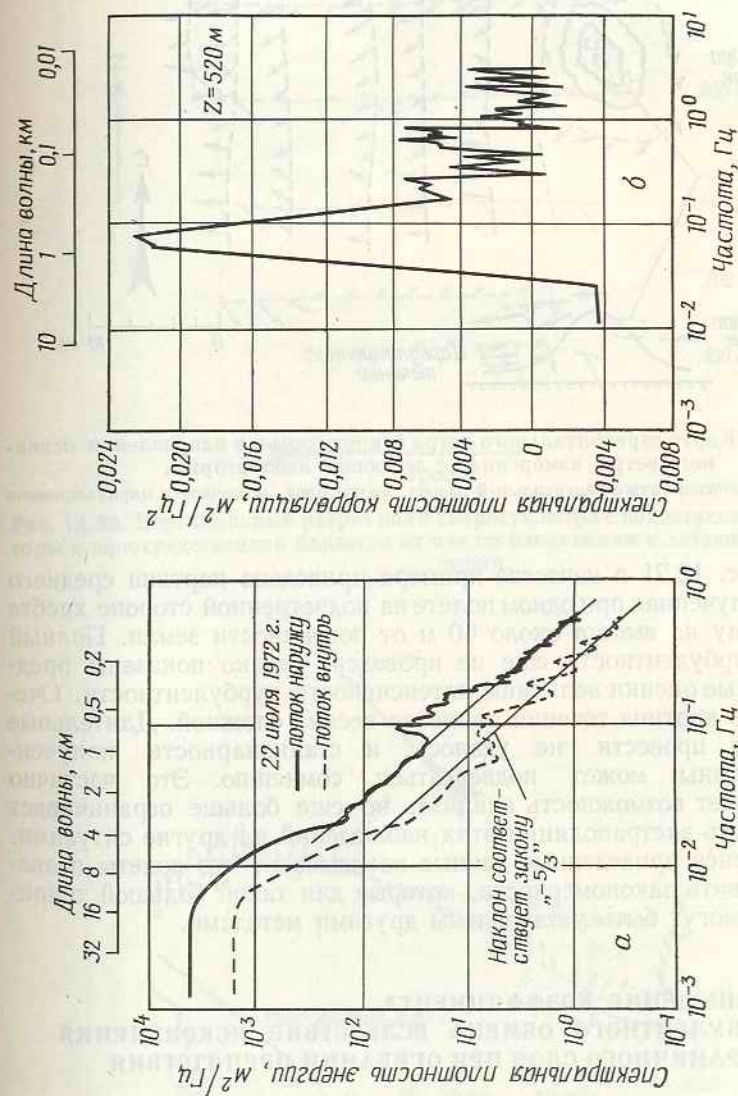


Рис. 12.18. Примеры спектров турбулентности, рассчитанных по измерениям скорости ветра, сделанных с самолета N326 D Национального центра атмосферных исследований.
а — спектр горизонтальной скорости по данным кругового облета грозы [41]; б — спектр напряжений Рейнольдса по данным полета при пассатном ветре [42].

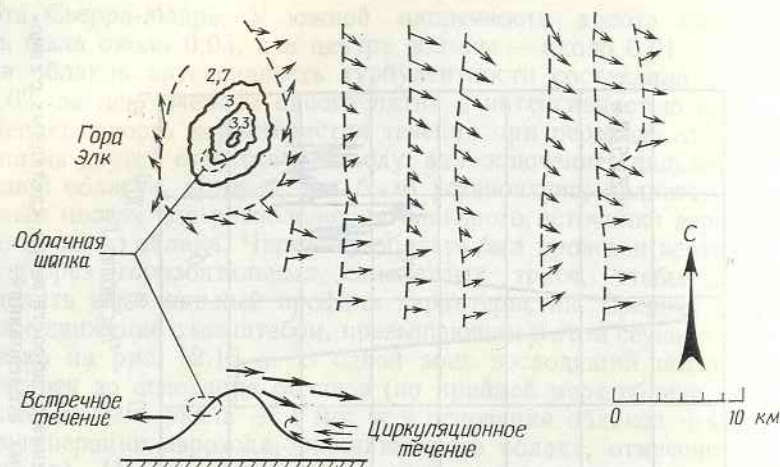


Рис. 12.19. Карта горизонтального ветра вокруг горы и в направлении основного ветра, измеренная с летающей лаборатории.

Схематично показан также вертикальный разрез. Видны след, встречное и циркуляционное течения.

На рис. 12.21 в качестве примера приведена картина среднего ветра, полученная при одном полете на подветренной стороне хребта Медсин-Бау на высоте около 60 м от поверхности земли. Полный анализ турбулентности еще не проведен, однако показаны предварительные оценки величины интенсивности турбулентности. Очевидно, что картина течения является весьма сложной. Длительные измерения провести не удалось, и стационарность полученной картины может подвергаться сомнению. Это частично ограничивает возможность анализа, но еще больше ограничивает возможность экстраполяции этих наблюдений на другие ситуации. Тем не менее приведенные данные показывают, что полеты позволяют выявить закономерности, которые для такой большой территории не могут быть установлены другими методами.

12.6. УМЕНЬШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА ВСЛЕДСТВИЕ ИСКРIVЛЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ОГИБАНИИ ПРЕПЯТСТВИЯ

Данные полетов в пограничном слое атмосферы вблизи горы Элк указывают на еще один интересный факт — уменьшение коэффициента турбулентного обмена приблизительно на 20% при огибании воздушным потоком наветренного склона горы (линии тока являются вогнутыми). На рис. 12.22 приведены профили K в $\text{м}^2/\text{с}$,

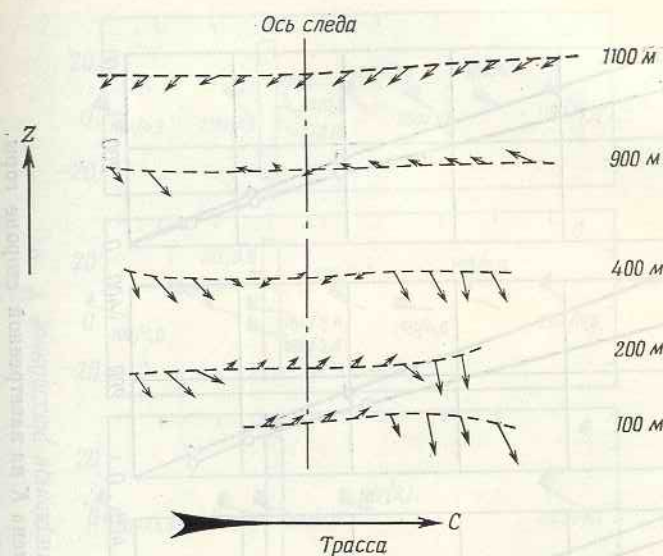


Рис. 12.20. Вертикальный разрез поля скорости ветра с подветренной стороны горы в непосредственной близости от нее по измерениям с летающей лаборатории.

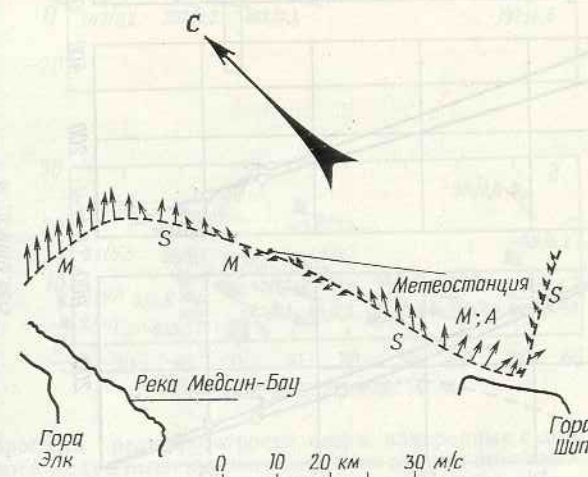


Рис. 12.21. Среднее значение горизонтальной составляющей скорости ветра на высоте 60 м над землей в ближней подветренной зоне горного хребта по измерениям с самолета.

Турбулентность характеризуется качественно: S — отсутствует, M — умеренная, A — сильная. Анализ результатов измерений еще не завершен.

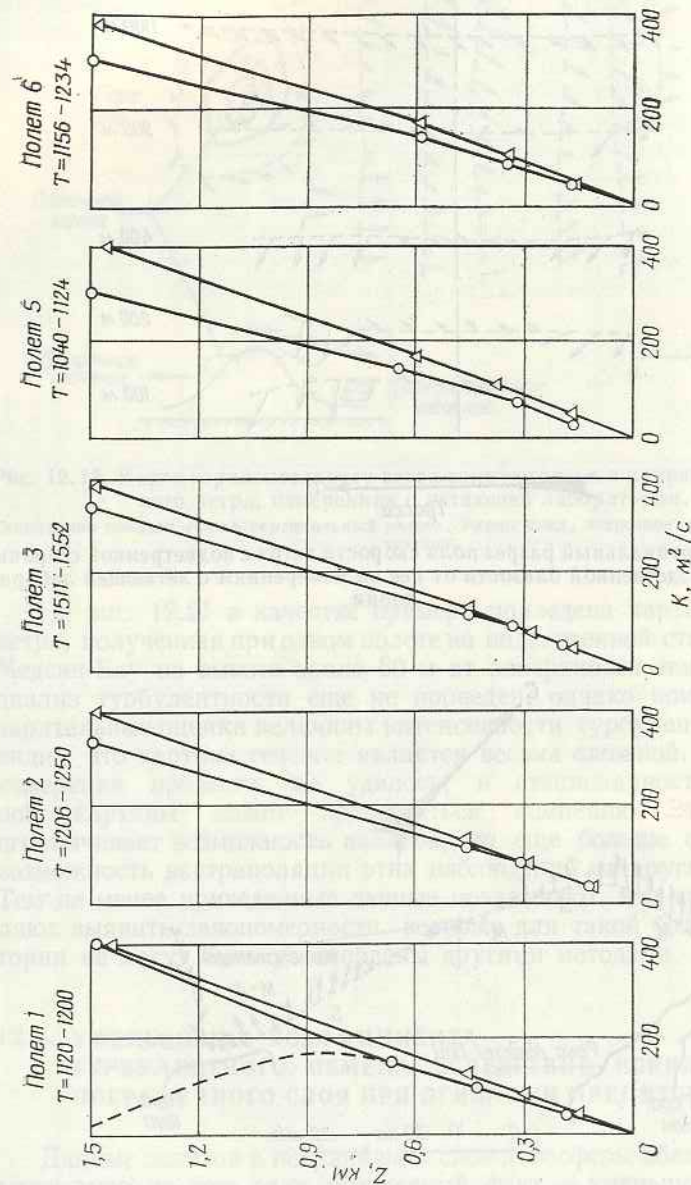


Рис. 12.22. Профили коэффициента турбулентного обмена K на наветренной стороне горы. Метод расчета коэффициента K по данным самолетных измерений пульсаций скорости ветра объясняется в тексте. Штриховая линия показывает, как изменяется кривые, если в расчете учесть высоту инверсии. Δ — измерения вверх по потоку; $\circ$ — измерения вниз по потоку.

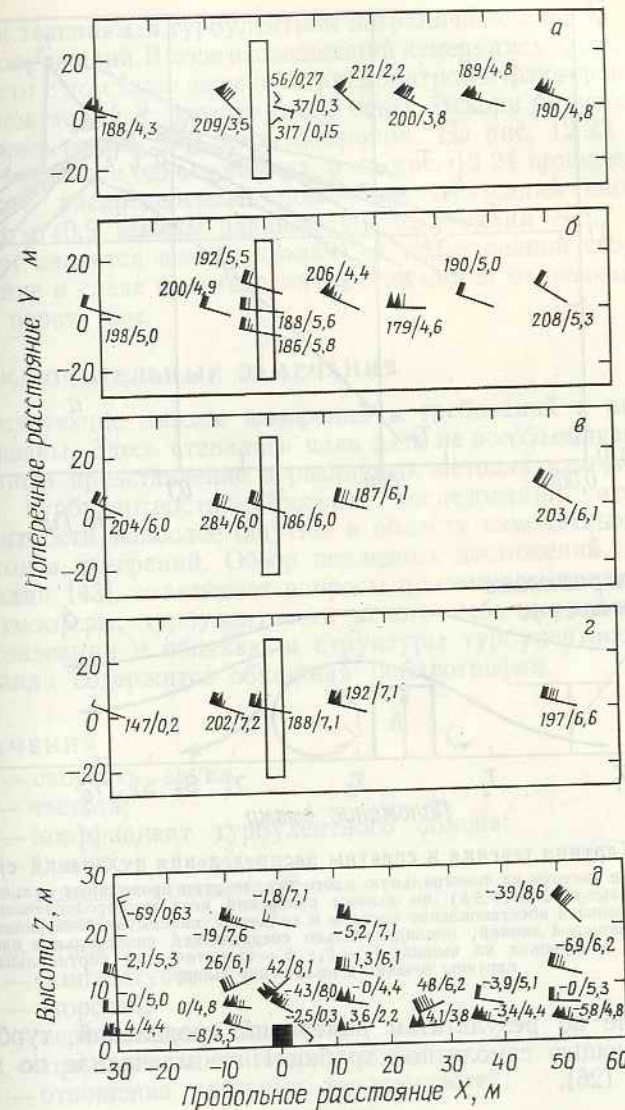


Рис. 12.23. Профили средней скорости ветра, измеренные с помощью метеорологических вышек, около длинного здания высотой h . а, б, в, г — диаграммы для высот над землей 0,2 м, 1,8 м, 3,6 м и 6,5 м соответственно; д — вертикальный разрез, показывающий мгновенную (трехмерную) скорость и профиль ветра. Числа через косую линию обозначают (направление порывов ветра) / (скорость ветра в м/с). Стрелки указывают направление порывов ветра.

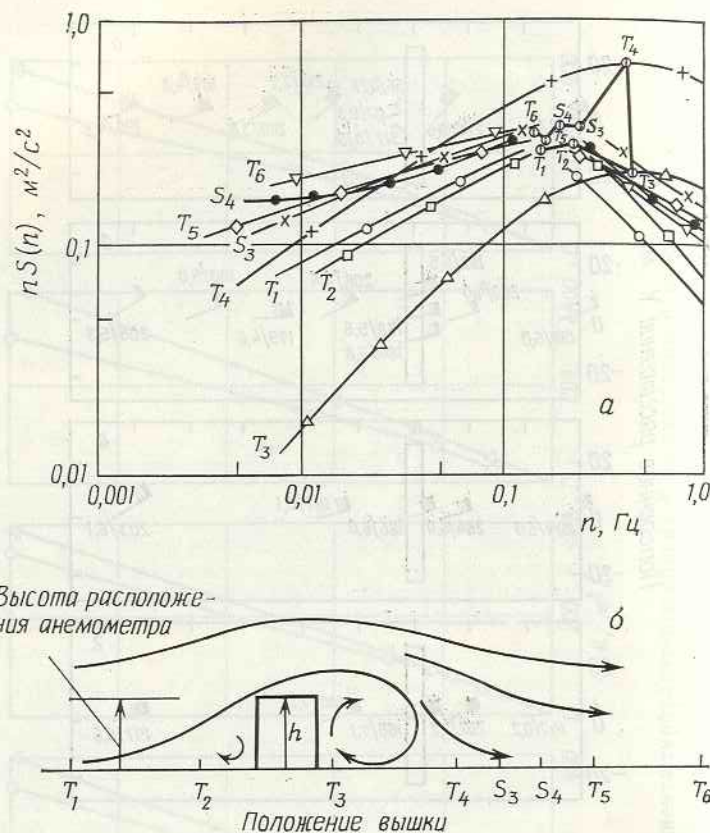


Рис. 12.24. Картина течения и спектры распределения пульсаций скорости. а — произведение частоты на спектральную плотность энергии продольных пульсаций скорости ветра на высоте 3 м (0,9 h) по данным измерений всех метеорологических вышек T_1 — T_6 . Возмущение и восстановление частоты и величины максимума спектральной плотности показано ломаной линией, последовательно соединяющей спектральные максимумы, полученные при измерениях на вышках T_1 — T_6 ; б — схематический вертикальный разрез картины течения и положение вышек.

рассчитанные по результатам измерений продольной турбулентности с помощью самолетной трубки Пито и анализа по методу Мак-Креди [26].

12.7. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ВОЗДУШНЫЕ ПОТОКИ ОКОЛО ЗДАНИЙ

Важные исследования турбулентности были предприняты Институтом космических исследований Университета шт. Теннесси совместно с Центром космических полетов NASA в Хантсвилле при финансовой поддержке Национального научного фонда. Они от-

носятся к течениям в турбулентном пограничном слое вблизи двумерных сооружений. В ходе исследований измерялись трехмерные поля скорости с помощью чашечных анемометров и флюгеров и крылатых анемометров с вертикальной осью. Вскоре будут опубликованы первые результаты этих измерений. На рис. 12.23 показаны картины ветра для одного случая, а на рис. 12.24 приведены спектры осевого распределения продольных пульсаций скорости на уровне 3 м (0,9 высоты здания). На расстоянии $\sim 8,7$ калибров (калибром является высота здания) от подветренной стороны здания течение в следе практически не отличается от невозмущенного течения перед ним.

12.8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Существующие методы измерений и требований к ним весьма разнообразны. Здесь ставилась цель дать не всеобъемлющее описание, а лишь представление о различных методах измерения атмосферной турбулентности. Прогресс исследований атмосферной турбулентности наиболее ощутим в области самолетных и волновых методов измерений. Обзор последних достижений, составленный Лилли [43], охватывает вопросы приземного и пограничного слоев атмосферы, турбулентности ясного неба и гравитационных волн, конвекции в облаках и структуры турбулентности. В работе Лилли содержится обширная библиография.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

c	— скорость звука;
f	— частота;
k	— коэффициент турбулентного обмена;
L	— длина;
R	— газовая постоянная;
t	— время;
s	— ветер;
T	— температура;
V	— скорость;
w	— вертикальная скорость;
x, y, z	— прямоугольные координаты;
γ	— отношение удельных теплоемкостей;
$\dot{}$	— производная по времени;
$\ddot{}$	— вторая производная по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lilly D. K., Lenschow D. H., Aircraft measurements of the atmospheric mesoscales using an inertial reference system, *Facilities for Atmospheric Research*, 19, National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, 1971, p. 2—8.

2. Starr V., Physics of Negative Viscosity Phenomena, McGraw-Hill Book Co., New York, 1968. [Имеется перевод: Старр В., Физика явлений с отрицательной вязкостью. — М.: Мир, 1971.]
3. Gill G. C., Hexter P. L., Some instrumentation definition for use by meteorologists and engineers, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **53**, 846—851 (1972).
4. Mazzarella D. A., An inventory of specifications for wind measuring instruments, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **53**, 860—871 (1972).
5. MacCready P. B., Dynamic response characteristics of meteorological sensors, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **46**, 533—538 (1965).
6. Gill G. C., Olsson L. E., Sela J., Suda M., Accuracy of wind measurements on towers or stacks, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **48**, 665—674 (1967).
7. Carter J. K., The meteorologically instrumented WKY-TV tower facility, report No. NOAA TM ERLTM-NSSL-50, National Severe Storms Laboratory, Norman, Oklahoma, 1970.
8. Cermak H. E., Horn J. D., Tower shadow effect, *J. Geophys. Res.*, **73**, 1869—1876 (1968).
9. Deacon E. L., The levelling error in Reynolds stress measurement, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **49**, 836 (1968).
10. Pond S., Some effects of buoy motion on measurement of wind speed and stress, *J. Geophys. Res.*, **73**, 507—512 (1968).
11. Kraus E. B., What do we know about the sea-surface stress? *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **49**, 247—253 (1968).
12. Kraus E. B., Reply to Deacon, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **49**, 836 (1968), (см. [9]).
13. Dyer A. J., Hicks B. B., Sitaraman V., Minimizing the levelling error in Reynolds stress measurement by filtering *J. Appl. Meteorol.*, **9**, 532—534 (1970).
14. Acheson D. T., Response of cup and propeller rotors and wind direction vanes to turbulent wind fields, *Meteorol. Monogr.*, **11**, 252—261 (1970).
15. Moses H. et al., Meteorological instruments for use in the atomic energy industry, Meteorology and Atomic Energy, U. S. Atomic Energy Commission, 1968, Chap. 6, p. 257—298.
16. Kelton G., Bricout P., Wind velocity measurements using sonic techniques, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **45**, 571—580 (1964).
17. Beran D. M., Little C. G., Willmarth B. C., Acoustic Doppler measurements of vertical velocities in the atmosphere, *Nature*, **230**, 160—162 (1971).
18. Beran D. W., Clifford S. F., Acoustic Doppler measurement of the total wind vector, Second Symposium on Meteorological Observations and Instruments, American Meteorological Society, 1972.
19. Benedetti-Michelangeli G., Congeduti F., Fiocco G., Measurement of aerosol motion and wind velocity in the lower troposphere by Doppler optical radar, *J. Atmos. Sci.*, **29**, 906—910 (1972).
20. Weiler H. S., Burling R. W., Direct measurements of stress and spectra of turbulence in the boundary layer over the sea, *J. Atmos. Sci.*, **24**, 653—664 (1967).
21. Pond S. et al., Spectra of velocity and temperature fluctuations in the atmospheric boundary layer over the sea, *J. Atmos. Sci.*, **23**, 376—386 (1966).
22. Wesely M. L., et al., Three-dimensional pressure-sphere anemometer system, *J. Appl. Meteorol.*, **9**, 379—385 (1970).
23. Thurtell G. W. et al., Eddy correlation measurements of sensible heat flux near the earth's surface, *J. Appl. Meteorol.*, **9**, 379—385 (1970).
24. Businger J. A., Miyake M., Dyer A. J., Bradley E. F., On the direct de-

- termination of the turbulent heat flux near the ground, *J. Appl. Meteorol.*, **6**, 1025—1032 (1967).
25. Middleton W. E. K., Spilhaus A. F., Meteorological Instruments, University of Toronto Press (1953), p. 53—56.
26. MacCready P. B., Standardization of gustiness values from aircraft, *J. Appl. Meteorol.*, **3**, 439—449 (1964).
27. Dutton J. A., Lenschow D. H., An airborne measuring system for micro-meteorological studies, Annual Report, Contract № DA-36-039-SC-80282, Department of Meteorology, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, 1963.
- 28*. Warner J., Telford J. W., On the measurement from an aircraft of buoyancy and vertical air velocity in cloud, *J. Atmos. Sci.*, **19**, 415—420 (1962).
29. Kelly N. D., Meteorological uses of inertial navigation, *Atmospheric Technology*, **1**, National Center for Atmospheric Research, 37—39, 1973.
30. Lenschow D. H., The measurement of air velocity and temperature using the NCAR Buffalo aircraft measuring system, NCAR Technical Note, № NCAR-TN/EDD-4, National Center for Atmospheric Research, 1972, p. 39.
31. Axford D. N., On the accuracy of wind measurements using an inertial platform in an aircraft, and an example of a measurement of the vertical mesostructure of the atmosphere, *J. Appl. Meteorol.*, **7**, 645—666 (1968).
32. Dutton J. A., Clear-air turbulence, aviation and atmospheric science, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **9**, 613—657 (1971).
33. Rodi A. R., Spyers-Duran P. A., Analysis of time response of airborne temperature sensors, *J. Appl. Meteorol.*, **11**, 554—556 (1973).
34. McCarthy J., A method for correcting airborne temperature data for sensor response time, *J. Appl. Meteorol.*, **12**, 211—214 (1973).
35. Acheson D. T., Comments on «A method for correcting airborne temperature data for sensor response time», *J. Appl. Meteorol.*, **12**, 1089—1090 (1973).
36. NCAR, Instrumenting NCAR's «Buffalo» aircraft, Facilities for Atmospheric Research, № 8, National Center for Atmospheric Research, 1969, p. 7—10.
37. Brown W. J., McFadden J. O., Hason H. J., Travis C. W., Analysis of the Research Flight Facility gust probe system, *J. Appl. Meteorol.*, **13**, 156—167 (1974).
38. Friedman H. A., et al., ESSA Research Flight Facility aircraft participation on the Barbados oceanographic and meteorological experiment, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, **51**, 822—834 (1970).
39. Friedman H. H., et al., The ESSA Research Flight Facility: Data processing procedures, ESSA Technical Report № ERL 132-RFF 2, Miami, Florida, 1969, p. 64.
40. NCAR, Instrumenting NCAR's «Buffalo» aircraft, Facilities for Atmospheric Research, № 8, National Center for Atmospheric Research, 1969, p. 9—12.
- 41*. Foote G. B., Fankhauser J. C., Airflow and Moisture budget beneath a northeast Colorado hail storm, *J. Appl. Meteorol.*, **12**, 1330—1353 (1973).
42. Pennell W. T., LeMone M. A., An experimental study of turbulence structure in the fair-weather trade wind boundary layer, *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1308—1323 (1974).
43. Lilly D. K., Progress in research on atmospheric turbulence, International Union of Geodesy and Geophysics 1971, p. 332—341.
44. Buck A. L., Development of an improved Lyman-alpha hygrometer, At-

- mospheric Technology, № 2, National Center for Atmospheric Research Boulder, 1973, p. 43—46.
45. MacCready P. B., Jr., An applications memorandum for the MRI universal indicated turbulence system, report № MRI 70 M-917, Meteorological Research Inc., Altadena, California, 1970, p. 15.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- В работах, отмеченных звездочками, описываются самолетные измерения с использованием инерциальных платформ, имеющих менее трех степеней свободы.
- * Lilly D. K., Lester P. F., Waves and turbulence in the stratosphere, *J. Atmos. Sci.*, 31, 800—812 (1974).
- * Waco D. E., A statistical analysis of wind and temperature variables associated with high altitude clear air turbulence (HICAT), *J. Appl. Meteorol.*, 9, 300—309 (1970).
- * Prophet D. T., Vertical extent of turbulence in clear air above the tops of thunderstorms, *J. Appl. Meteorol.*, 9, 320—321 (1970).
- * Robinson F. L., Konrad T. G., A comparison of the turbulent fluctuations in clear air convection measured simultaneously by aircraft and Doppler radar, *J. Appl. Meteorol.*, 13, 481—487 (1974).
- * Lilly D. K., Waco D. E., Adelfang S. I., Stratospheric mixing estimated from high-altitude turbulence measurements, *J. Appl. Meteorol.*, 13, 488—493 (1974).
- Chiu W.-C., Crutcher H. L., The spectrums of angular momentum transfer in the atmosphere, *J. Geophys. Res.*, 71, 1017—1032 (1966).
- * Sheih C. M., Tennekes H., Lumley J. L., Airborn hot-wire measurements of the small-scale structure of atmospheric turbulence, *Phys. Fluids.*, 14, 201—215 (1971).
- Horst T. W., Corrections for response errors in a three-component propeller anemometer, *J. Appl. Meteorol.*, 12, 716—725 (1973).

Оптические и акустические методы измерения

У. КЛИФФ¹⁾

13.1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы особое внимание уделялось развитию методов дистанционного измерения скорости ограниченных и свободных движений жидкости (таких, как атмосферные и океанические течения, течения в каналах и аэродинамических трубах, крови в системе кровообращения и др.). В этой главе будут рассмотрены лазерный и акустический доплеровские методы измерения. Оба метода основаны на эффекте Доплера. Эффект Доплера заключается в изменении частоты излучения, достигающего приемника, когда источник излучения и приемник движутся один относительно другого. В лазерных и акустических доплеровских системах измерения скорости энергия излучения от источника передается к движущемуся рассеивающему объему (трассирующей частице), который сам становится источником, от которого излучение попадает на приемник. Скорость движения этих источников рассеянного излучения измеряется и, следовательно, точность измерения скорости доплеровскими системами зависит от того, насколько точно скорость движущихся центров рассеяния совпадает с истинной скоростью движения среды. Значительные усилия для развития лазерных и акустических доплеровских систем предпринимаются с 1960 года [1—3]. В настоящей главе не прослеживаются последовательные этапы разработки этих систем, а описываются методы, которые используются в настоящее время, и результаты, полученные с их помощью.

13.2. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ И ПРЕДПОСЫЛКИ

Использование доплеровских систем измерения скорости основано на том факте, что излучение [звуковые или электромагнитные (лазер) волны], проходя через среду, рассеивается находящи-

¹⁾ W. C. Cliff, National Aeronautics and Space Administration, George C. Marshall Space Flight Center, Huntsville, Alabama 35812.

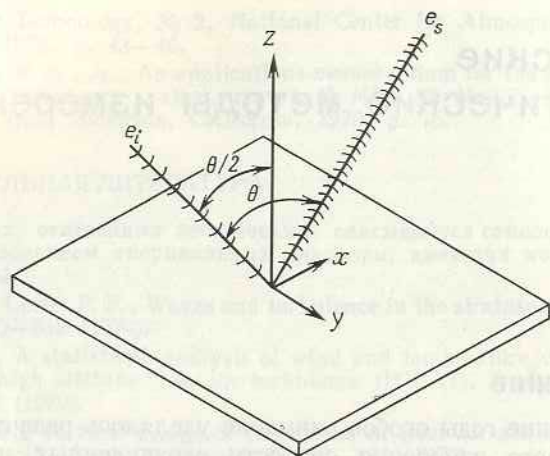


Рис. 13.1. Принципиальная схема работы однокомпонентной доплеровской системы.

Плоскость, проведенная через прямые, вдоль которых распространяется падающее и рассеянное излучение, перпендикулярна плоскости x, y .

мися в ней трассирующими частицами. (В случае лазерных доплеровских систем рассеяние происходит на частицах, взвешенных в среде. В случае акустических доплеровских систем рассеяние может происходить вследствие существования в среде градиентов температуры или скорости.) Рассеянное излучение несет информацию о скорости трассирующих частиц, на которых происходит рассеяние.

Эта информация проявляется в сдвиге частоты излучения, падающего на трассирующую частицу. Величина сдвига частоты Δf , т. е. разности между частотой излучения, падающего на частицу, и частотой рассеянного излучения, попадающего на приемник, называется доплеровским сдвигом, или доплеровской частотой, и описывается формулой

$$\Delta f = (\bar{V}n/\lambda)(\bar{e}_s - \bar{e}_i), \quad (13.1)$$

где $\bar{V}$ — вектор скорости частицы, λ — длина волны источника излучения, $\bar{e}_s$ — единичный вектор, направленный от рассеивающей частицы к приемнику, а $\bar{e}_i$ — единичный вектор, направленный от источника к рассеивающей частице. Во всех рассматриваемых случаях показатель преломления среды n принимался равным единице и поэтому в дальнейшем изложении в формулах отсутствует.

Из формулы (13.1) следует, что простая (однокомпонентная) доплеровская система позволяет измерить составляющую скорости, направленную вдоль вектора, делящего пополам угол между направлениями падающего и рассеянного излучения. На рис. 13.1 дано схематическое изображение простой доплеровской системы.

На этом рисунке оси координат ориентированы таким образом, что составляющая скорости, измеряемая системой, направлена вдоль оси z . Поэтому любое движение в плоскости x, y не обнаруживается такой доплеровской системой. Однако использование нескольких доплеровских систем позволяет производить измерение двух- и трехмерного вектора скорости.

Рис. 13.2 иллюстрирует принцип работы однокомпонентной доплеровской системы. Здесь также измеряется составляющая скорости, параллельная биссектрисе угла между направлениями падающего и рассеянного излучения. В обозначениях, использованных на рис. 13.2, формула (13.1) имеет вид

$$\Delta f = \frac{\bar{V} \cos \beta}{\lambda} 2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad (13.2)$$

где β — угол между вектором мгновенной скорости и биссектрисой угла θ , θ — угол между направлениями падающего и рассеянного излучения.

Через измеряемую скорость V_m формулу (13.2) можно записать так:

$$V_m = \bar{V} \cos \beta = \frac{\lambda \Delta f}{2 \sin (\theta/2)}. \quad (13.3)$$

Если измерять обратное рассеяние (т. е. измерять излучение, рассеянное вдоль направления падающего излучения, $\theta = 180^\circ$), то формула (13.3) примет вид

$$V_m = \frac{1}{2} \lambda \Delta f \text{ при } \theta = 180^\circ. \quad (13.4)$$

Формулы (13.1) ÷ (13.4) являются основными соотношениями для однокомпонентной доплеровской системы. Как будет показано ниже, три однокомпонентные доплеровские системы позволяют непосредственно измерять трехмерное поле скорости.

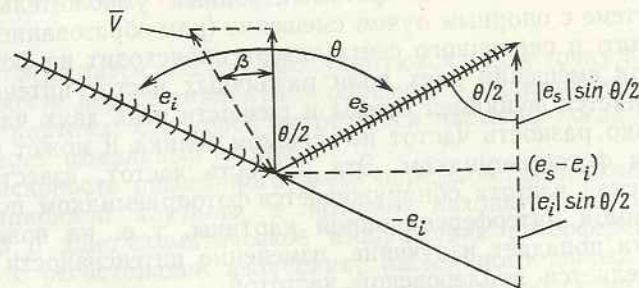


Рис. 13.2. Принцип работы однокомпонентной доплеровской системы. Регистрируется только составляющая скорости $V \cos \beta$, параллельная $(\bar{e}_s - \bar{e}_i)$.

13.3. ЛАЗЕРНЫЕ ДОПЛЕРОВСКИЕ МЕТОДЫ

Лазерный измеритель скорости, обычно называемый лазерным доплеровским измерителем скорости (ЛДИС), позволяет определять доплеровский сдвиг частоты света лазера, вызванный движением частиц, рассеивающих свет. Величина сдвига зависит от длины волны света, направления рассеянного света и скорости рассеивающих частиц. Формулы (13.1) ÷ (13.4) дают величину доплеровского сдвига как функцию длины волны, направления и скорости траексирующей частицы. В эксперименте длина волны лазера и направление рассеянного излучения известны. Зная длину волны лазера и геометрию системы и измеряя доплеровский сдвиг частоты, можно вычислить скорость источников рассеянного света. В случае использования ЛДИС источниками рассеянного света обычно являются частицы, движущиеся вместе со средой. Таким образом, скорость частиц связана со скоростью потока, в котором взвешены частицы. Если частицы очень маленькие, то обычно считают, что они движутся со скоростью потока.

Обычно для измерения доплеровского сдвига частоты применяют один из двух способов: 1) смешивают рассеянный и первичный свет лазера на фотоприемнике или 2) расщепляют первичный луч лазера, а затем направляют лучи таким образом, чтобы они пересеклись, причем образуется интерференционная картина в пространстве, а рассеянный свет при прохождении через нее частицы регистрируется фотоприемником. Система, в которой рассеянный и первичный свет лазера смешиваются на фотоприемнике, называется системой с опорным лучом или системой гетеродинного типа. На рис. 13.3, а показана система с опорным лучом и регистрацией излучения, рассеянного вперед [4]. Отметим, что оптические системы лазера и приемника излучения настроены таким образом, чтобы на фотоприемник попадал только свет, рассеянный частицами, находящимися в фокальной плоскости. На рис. 13.3, а фотоприемником является фотоэлектронный умножитель (ФЭУ).

В системе с опорным лучом смешение (или образование биений) рассеянного и первичного света лазера происходит на фотоприемнике. При смешении двух волн различных частот интенсивность света является функцией суммы и разности этих двух частот. Из них только разность частот не слишком велика и может быть обнаружена фотоприемником. Эта разность частот, известная как доплеровская частота, обнаруживается фотоприемником по движению видимой интерференционной картины, т. е. на поверхность приемника попадает излучение, изменение интенсивности которого определяется доплеровской частотой.

В двухлучевой схеме¹⁾ первичный лазерный луч расщепляется,

¹⁾ В отечественной литературе используется также термин «дифференциальная схема ЛДИС». — Прим. перев.

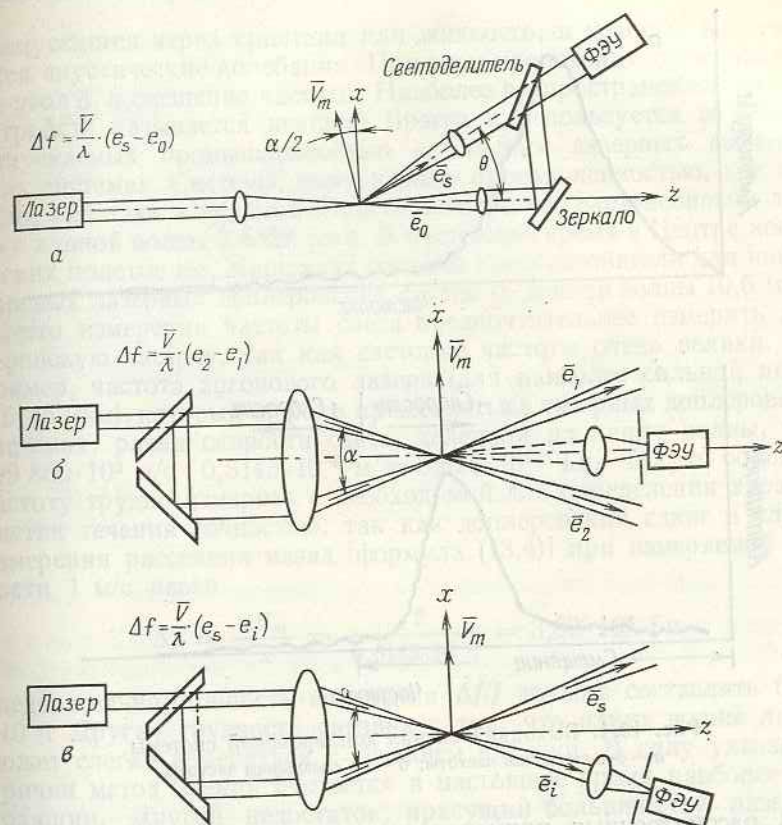


Рис. 13.3. Схемы лазерных доплеровских систем измерения скорости. а — схема с опорным лучом и рассеянием вперед; б — двухлучевая схема с рассеянием вперед; в — двухлучевая схема с опорным лучом.

разделяется, а затем оба луча фокусируются в одну точку пространства. В месте пересечения лучей образуется видимая интерференционная картина, с которой встречается частица, когда она проходит через фокальный объем.

Интенсивность рассеянного света определяется той частью интерференционной картины, в которой находится частица. На рис. 13.3, б дано схематическое изображение интерференционной системы с регистрацией излучения, рассеянного вперед. Оптическая система приемника излучения в двухлучевой схеме сфокусирована на объеме, в котором два луча пересекаться. На рис. 13.3, в дано схематическое изображение двухлучевой схемы с опорным лучом.

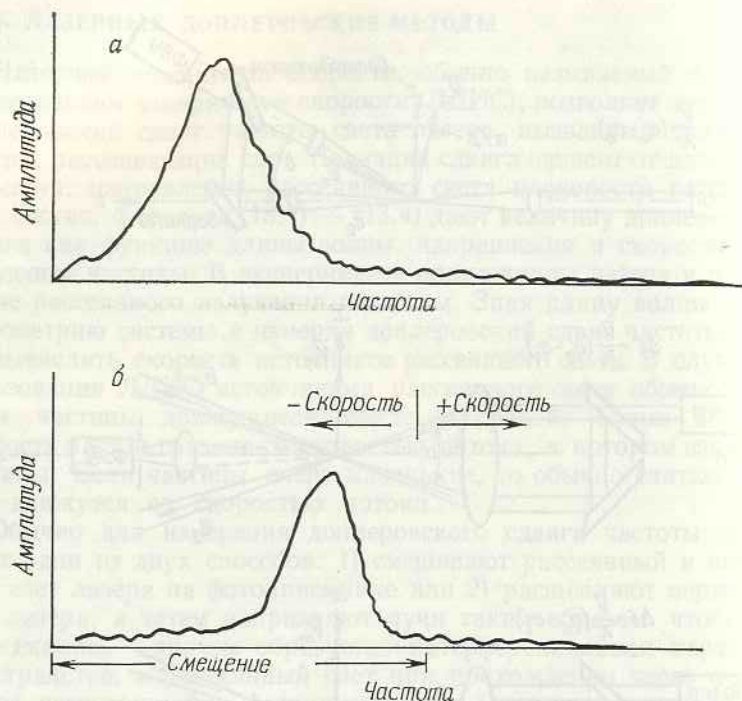


Рис. 13.4. Выходной сигнал доплеровской системы.
а — без смещения частоты; б — со смещением частоты.

В рассмотренных примерах для получения разности частот, связанной со скоростью частицы, смешивались два сигнала. Следует отметить, что при описанной выше схеме смещения сигналов существует неопределенность в направлении движения частицы, равная 180° . Другими словами, разность частот рассеянного и первичного лазерного излучения будет одинаковой для прямого и обратного (отличающегося на 180°) направлений движения частицы. Однако эту неопределенность в направлении можно устранить путем смещения частоты гетеродина (первичного лазерного источника света). Смещение частоты гетеродина приводит к появлению сдвига (доплеровского) частоты от неподвижной частицы, равного по величине смещению частоты гетеродина. Рис. 13.4 иллюстрирует влияние смещения частоты первичного лазерного светового пучка. Смещение частоты можно осуществить несколькими методами, например рассеивая излучение гетеродина (первичного лазерного света) на мишени, движущейся с постоянной скоростью, или изменяя частоту гетеродина с помощью акустооптического преобразователя. Последний метод более удобен. По этому методу сигнал гетеродина

пропускается через кристалл или жидкость, в которых возбуждаются акустические колебания. При этом происходит сдвиг по фазе на угол δ и смещение частоты. Наиболее распространенное из этих устройств называется ячейкой Брэгга и используется во многих выпускаемых промышленностью небольших лазерных доплеровских системах. Системы, выпускаемые промышленностью, как правило, работают в видимой области спектра на гелий-неоновом лазере с длиной волны $0,6328 \text{ мкм}$. В настоящее время в Центре космических полетов им. Маршалла созданы преобразователи для инфракрасных лазерных доплеровских систем (с длиной волны $10,6 \text{ мкм}$). Вместо измерения частоты света предпочтительнее измерять доплеровскую частоту, так как световые частоты очень велики. Например, частота аргонового лазера (для наиболее сильной линии $0,5145 \text{ мкм}$), который широко применяется в лазерных доплеровских системах, равна скорости света, деленной на длину волны, т. е. $299\,860 \cdot 10^3 \text{ м/с} : 0,5145 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 5,828 \cdot 10^{14} \text{ Гц}$. Такую большую частоту трудно измерить с необходимой для определения характеристик течения точностью, так как доплеровский сдвиг в случае измерения рассеяния назад [формула (13.4)] при измеряемой скорости 1 м/с равен

$$\Delta f = \frac{2V_m}{\lambda} = \frac{2}{0,5145 \cdot 10^{-6}} = 3,89 \cdot 10^6 \text{ Гц},$$

следовательно, точность измерения $\Delta f/f$ должна составлять $6,67 \cdot 10^{-9}$. Другая трудность связана с тем, что длина волны лазера может слегка изменяться с течением времени. В силу указанных причин метод биений считается в настоящее время наиболее подходящим. Другой недостаток, присущий большинству лазерных систем, состоит в том, что разность хода между лучом гетеродина и рассеянным лучом должна находиться в пределах длины когерентности лазера. Таким образом, свет, получаемый смешением лучей, разность хода которых больше длины когерентности лазера, не будет давать биений. Длина когерентности для гелий-неонового лазера может составлять от 20 см до нескольких километров [5]; для аргонового лазера она составляет около 10 см и может быть увеличена до 10 м путем использования эталона; для CO_2 -лазера длина когерентности достигает нескольких километров. Эталон представляет собой оптическое устройство, которое обычно помещается в полости резонатора лазера с целью стабилизации длины волны и направления поляризации света, усиливаемого и излучаемого резонатором.

В системе гетеродинного типа рассеянное излучение и излучение от гетеродина одновременно попадают (дают биения) на поверхность приемника. Если излучение гетеродина описывается выражением $\sin 2\pi f_0 t$, то рассеянное излучение можно описать выражением $\sin(2\pi f_0 t + 2\pi \Delta f_0 t + \phi)$. Выходной сигнал фотоприемни-

ка — ток i_D — пропорционален интенсивности падающего излучения, т. е.

$$i_D \sim [\sin 2\pi f_0 t + \sin (2\pi f_0 t + 2\pi \Delta f_0 t + \phi)]^2 = \\ = 4 \sin^2 \left(\frac{4\pi f_0 t + 2\pi \Delta f_0 t + \phi}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{2\pi \Delta f_0 t + \phi}{2} \right), \quad (13.5)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Однако частота света $2\pi f_0$ слишком велика, и приемник не успевает на нее реагировать; следовательно, только среднее значение первого члена в правой части будет регистрироваться приемником, и выражение (13.5) принимает вид

$$i_D \sim [1 + \cos (2\pi \Delta f_0 t + \phi)]. \quad (13.6)$$

Таким образом, единственной частотой, на которую реагирует приемник, будет Δf_0 — величина доплеровского сдвига частоты.

13.3.1. Различные схемы лазерных доплеровских систем

Выше было дано краткое описание двух схем ЛДИС: схемы гетеродинного типа (с опорным лучом) и двухлучевой схемы. В настоящем разделе это описание будет расширено и, кроме того, будут описаны сканирующие устройства, которые используются в настоящее время.

13.3.1.1. Схема ЛДИС с опорным лучом и рассеянием вперед. На рис. 13.3, а изображена схема ЛДИС с опорным лучом и регистрацией рассеянного вперед излучения. На рис. 13.5 показан другой вид этой системы. Из формулы (13.1) следует, что в системах ЛДИС зависимость от частоты является линейной. Поэтому можно показать, что в случае статистически стационарного течения однокомпонентная система ЛДИС может быть использована для получения информации о двух- и трехмерных полях скорости [4].

Метод получения информации о двух- и трехмерных течениях с помощью однокомпонентной системы ЛДИС основан на том, что статистические средние величины определяются по результатам измерения при нескольких произвольных положениях приемника в различные моменты времени. В работе [4] показано, что для получения среднего значения трехмерной величины необходимо произвести три независимых измерения; шесть измерений необходимо для получения средних значений всех перекрестных произведений (таких, как $U'V'$ и U'^2 , где U' и V' — пульсации скорости в направлении x и y соответственно); девять независимых измерений необходимо для расчета корреляций. Метод основан на том, что доплеровскую частоту можно записать в виде линейной функции трех составляющих скорости, т. е.

$$\lambda \Delta f = a_1 U(t) + b_1 V(t) + c_1 W(t), \quad (13.7)$$

где λ — длина волны лазера, Δf — доплеровская частота, a_1 , b_1 и c_1 — константы, зависящие от геометрии системы, а $U(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ — мгновенные значения составляющих скорости в направлениях x , y и z соответственно. Таким образом, в статистически стационарном течении можно делать три независимых измерения средних величин, помещая приемник в трех различных положениях, что позволяет получить три уравнения с тремя неизвестными. Этими неизвестными являются средние значения составляющих скорости $\bar{U}$, $\bar{V}$ и $\bar{W}$ в направлениях x , y и z соответственно. Нахождение моментов скорости высших порядков потребует, как отмечалось выше, большего числа независимых измерений. Однако следует иметь в виду, что чем большее количество уравнений используется, тем выше требования к точности измерений. На рис. 13.6 схематически показано, как возникает ошибка в системах ЛДИС. Приемник воспринимает излучение в некотором малом телесном угле $d\alpha$, имеющем конечную величину.

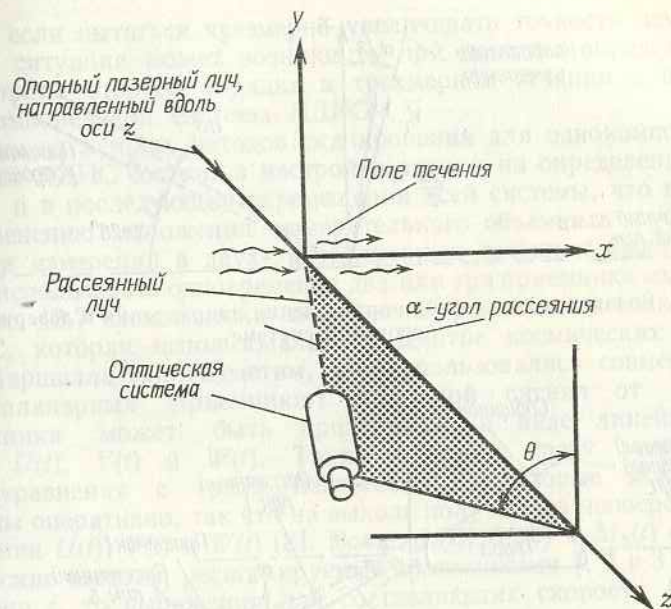


Рис. 13.5. Схема однокомпонентной лазерной доплеровской системы с опорным лучом.

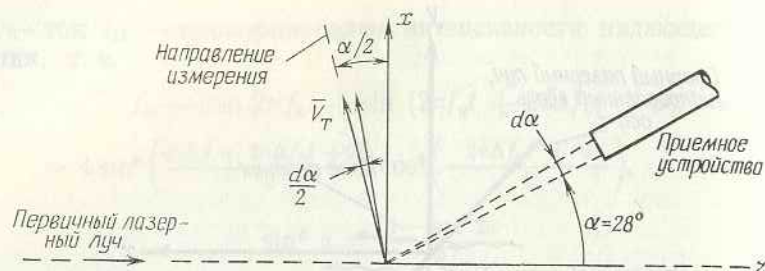


Рис. 13.6. Возникновение ошибки определения направления в лазерной доплеровской системе.

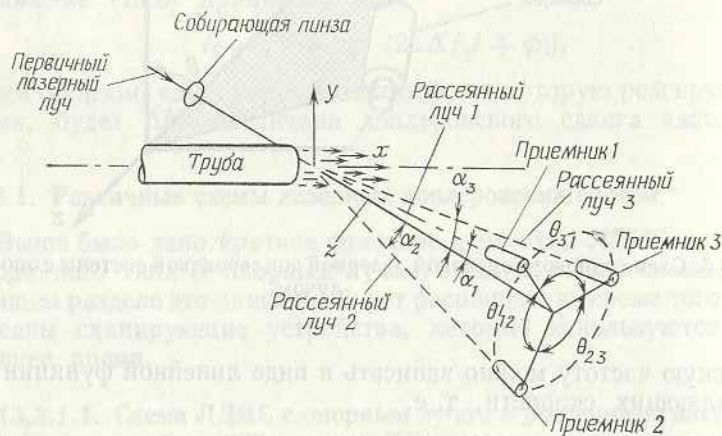


Рис. 13.7. Схематическое изображение трехкомпонентной лазерной доплеровской системы и ее расположение относительно течения в трубе.

Падающий лазерный луч лежит в плоскости x, z перпендикулярно оси симметрии трубы. Компоненты скорости U, V и W направлены вдоль осей x, y и z соответственно. Приемник 3 расположен в плоскости x, z .

ну. Это означает, что направление измерения является не линией, а конусом с центральным углом $d\alpha/2$. Эта угловая ошибка связана с эффектом неопределенности доплеровского сигнала, который обусловлен конечностью времени пребывания частицы в поле зрения приемника [6]. Джордж и Ламли [6] указывают, что другими источниками ошибок, возникающих в доплеровских системах, являются градиенты средней и пульсационной скоростей, а также обычный электронный шум. Следует отметить, что в любой системе с конечным измерительным объемом возникают ошибки из-за существования градиентов и флуктуаций в объеме, а также из-за электронного шума. Эти ошибки могут стать замет-

ными, если пытаться чрезмерно увеличивать точность измерений. Такая ситуация может возникнуть при попытке определить все корреляции второго порядка в трехмерном течении с помощью однокомпонентной системы ЛДИС.

Один из лучших методов сканирования для однокомпонентной системы ЛДИС состоит в настройке оптики на определенный диапазон и в последующем перемещении всей системы, что приводит к изменению положения измерительного объема.

Для измерений в двух- и трехмерных течениях было предложено использовать одновременно два или три приемника излучения. На рис. 13.7 схематически изображена трехкомпонентная система ЛДИС, которая использовалась в Центре космических полетов им. Маршалла [7]. (Отметим, что использовались совместно три некопланарных приемника.) Выходной сигнал от каждого приемника может быть представлен в виде линейной функции $U(t)$, $V(t)$ и $W(t)$. Таким образом, сразу получаются три уравнения с тремя неизвестными, которые могут быть решены оперативно, так что на выходе получают непосредственно значения $U(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ [8]. Если $\Delta f_1(t)$, $\Delta f_2(t)$ и $\Delta f_3(t)$ есть доплеровские частоты, регистрируемые приемниками 1, 2 и 3 в момент времени t , то выражения для составляющих скорости $U(t)$, $V(t)$ и $W(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(t) &= A_1 \Delta f_1(t) + A_2 \Delta f_2(t) + A_3 \Delta f_3(t), \\ V(t) &= B_1 \Delta f_1(t) + B_2 \Delta f_2(t) + B_3 \Delta f_3(t), \\ W(t) &= C_1 \Delta f_1(t) + C_2 \Delta f_2(t) + C_3 \Delta f_3(t), \end{aligned} \quad (13.8)$$

где A_i , B_i и C_i — коэффициенты, связывающие компоненты скорости с соответствующими доплеровскими сдвигами частоты. На рис. 13.8 приведена электронная блок-схема, преобразующая доплеровские сдвиги частоты в компоненты скорости U , V и W и одновременно осуществляющая сравнение величины U , измеренной ЛДИС, с ее величиной, измеренной термоанемометром. На рис. 13.9 показаны осциллографические записи U -составляющей скорости, полученные с помощью термоанемометра и трехкомпонентной системы ЛДИС, описанной выше. В этих экспериментах использовался аргонный лазер с длиной волны 0,5145 мкм.

Измерения проводились в полностью развитом течении на выходе из трубы. Сканирование осуществлялось путем перемещения всей системы ЛДИС; таким образом, фокальный рассеивающий объем наводился на нужную точку пространства. Результаты экспериментов приводятся в работе [7]. Они находятся в превосходном согласии с данными, полученными традиционными методами. Трехкомпонентная система ЛДИС имеет преимущество перед обычными однокомпонентными системами в том, что она дает на выходе

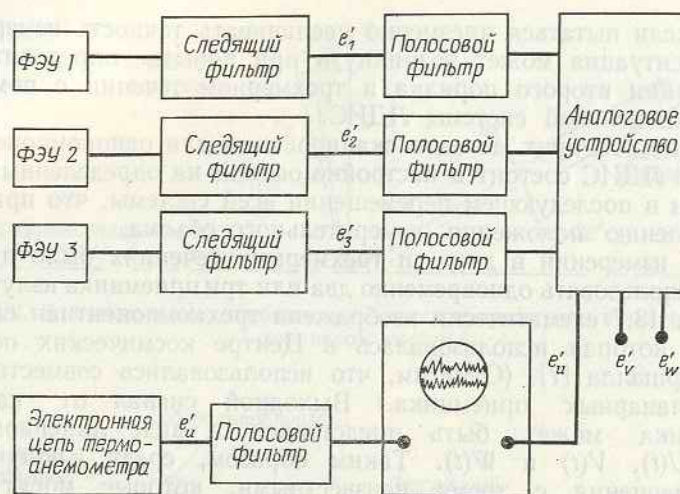


Рис. 13.8. Электронная блок-схема сравнения сигналов ЛДИС и термоанометра.

e'_i — напряжение, соответствующее i -й величине.

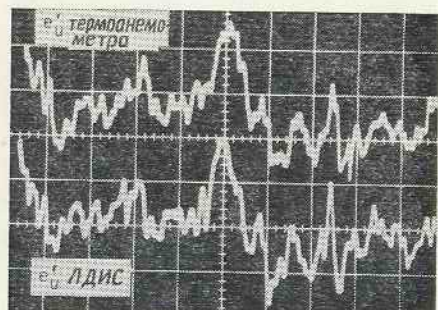


Рис. 13.9. Сравнение результатов измерений при помощи ЛДИС и термоанометра составляющей скорости U .

e'_U — напряжение, соответствующее измеряемой величине U .

трехмерное поле скорости в фокальном объеме. В этом эксперименте фокальный объем имел приблизительно 0,08 мм в диаметре и около 0,27 мм в длину [7]. Эти размеры близки к тем, которые занимает нить термоанометра. На рис. 13.10 приведен отрезок записи трех составляющих скорости для ЛДИС, а также выходного сигнала термоанометра. Нагретая нить располагалась приблизительно на 1 мм ниже измерительного объема лазерной системы.

13.3.1.2. Лазерная система гетеродинного типа (работающая в непрерывном режиме) с регистрацией излучения, рассеянного назад.

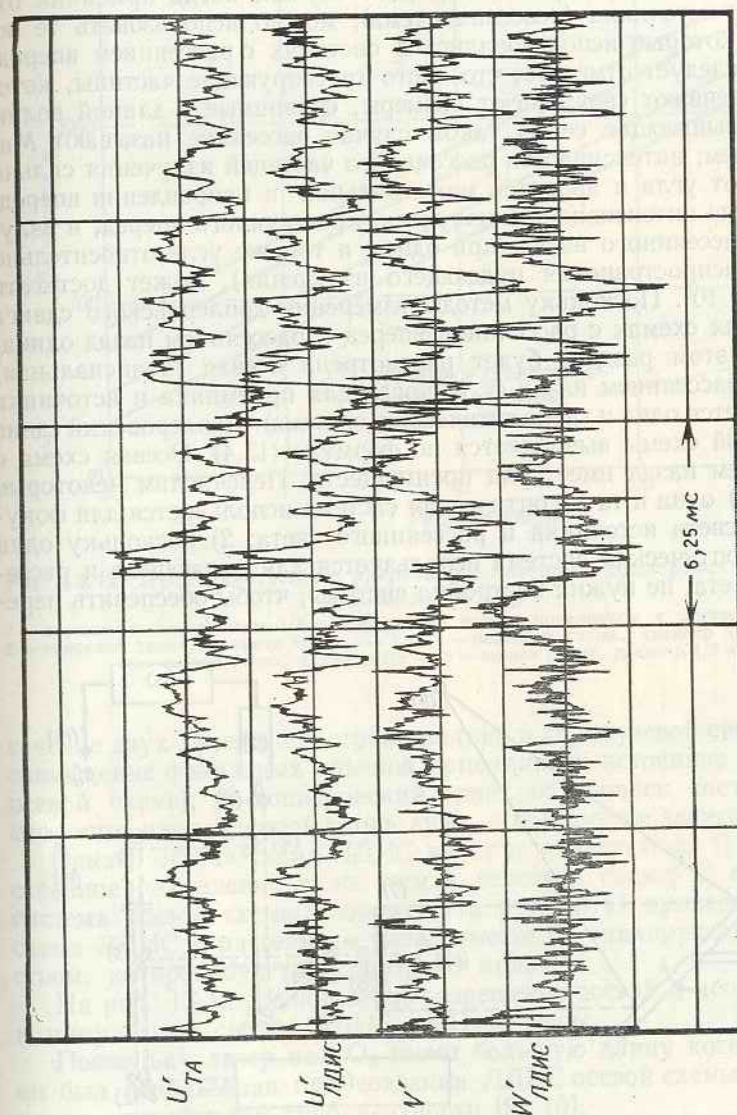


Рис. 13.10. Синхронная запись турбулентных пульсаций на оси трубы, измеренных термоанометром и ЛДИС.

Число Рейнольдса потока в трубе $0,15 \cdot 10^6$; полоса пропускания фильтра от 4 Гц до 10 кГц.

Величина доплеровского сдвига частоты для рассеяния назад дается формулами (13.1) ÷ (13.4). Для случая, когда приемник отделен от источника (неосевая схема), можно использовать те же методы, которые использовались в системах с рассеянием вперед. Однако следует отметить, что часто трассирующие частицы, которые рассеивают свет, имеют размеры, сравнимые с длиной волны или превышающие ее. В таком случае рассеяние называют Ми-рассеянием; интенсивность рассеянного частицей излучения сильно зависит от угла и является максимальной в направлении вперед. Отношение интенсивностей излучения, рассеянного вперед, и излучения, рассеянного назад (при одном и том же угле относительно линии распространения падающего излучения), может достигать значения 10^3 . Поскольку методы измерения доплеровского сдвига в неосевых схемах с рассеянием вперед и рассеянием назад одинаковы, в этом разделе будет рассмотрена осевая (коаксиальная) схема с рассеянием назад (т. е. когда для приемника и источника используется одна и та же оптическая система). Доплеровский сдвиг для осевой схемы вычисляется по формуле (13.4). Осевая схема с рассеянием назад имеет ряд преимуществ. Перечислим некоторые из них: 1) одна и та же оптическая система используется для фокусировки света источника и рассеянного света; 2) поскольку одна и та же оптическая система используется для падающего и рассеянного света, не нужна настройка системы, чтобы обеспечить пере-

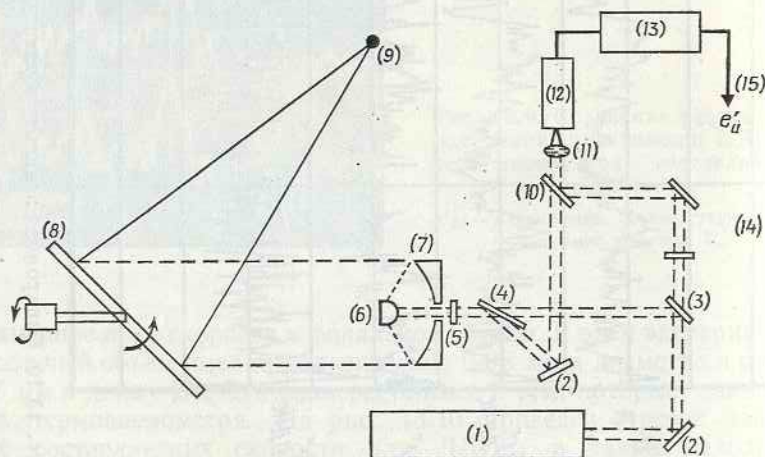


Рис. 13.11. Осевая схема лазерной доплеровской системы.

1 — лазер на CO_2 ; 2 — зеркало с лицевой отражающей поверхностью; 3 — светодетектор из Ge; 4 — пластина Брюстера из Ge; 5 — четвертьволновая пластина; 6 — вспомогательное зеркало; 7 — основное зеркало; 8 — направляющее зеркало; 9 — фокальный объем; 10 — полупрозрачное зеркало из Ge для сложения пучков; 11 — собирающая линза; 12 — приемник; 13 — следящий фильтр; 14 — полуволновая пластина из Ge; 15 — выходное напряжение, пропорциональное осевой скорости.

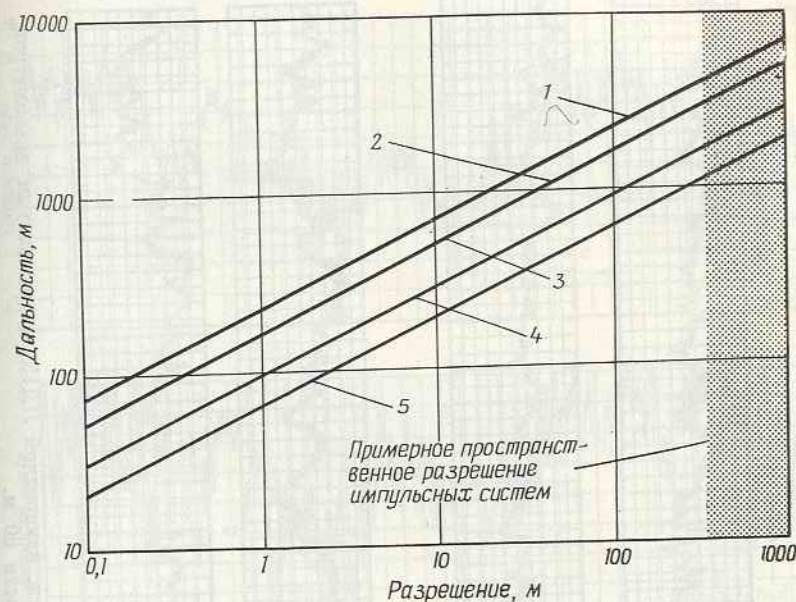


Рис. 13.12. Пространственное разрешение лазерных доплеровских систем с лазером на CO_2 .

1 — неосевая схема, диаметр $1/3$ м, расстояние между приемником и источником $l = 2$ м; 2 — неосевая схема, диаметр $1/3$ м, $l = 1$ м; 3 — неосевая схема, диаметр $1/6$ м, $l = 2$ м; 4 — осевая схема, диаметр $1/2$ м; 5 — осевая схема, диаметр $1/3$ м.

сечение двух лучей в пространстве (как в двухлучевой системе) или совмещение фокальных объемов приемника и источника (как в неосевой схеме); 3) доплеровский сдвиг обусловлен составляющей скорости, направленной вдоль луча, и поэтому не зависит от угла.

Однако осевая схема ЛДИС имеет и недостатки: 1) пространственное разрешение хуже, чем в неосевой схеме; 2) оптическая система осевой схемы сложнее. На рис. 13.11 приведена осевая схема ЛДИС с рассеянием назад вместе со сканирующим устройством, которое будет рассмотрено ниже.

На рис. 13.12 сравнивается разрешение осевой и неосевой схем и импульсных систем ЛДИС с CO_2 -лазером.

Поскольку лазер на CO_2 имеет большую длину когерентности, он был использован при создании ЛДИС осевой схемы для измерения атмосферной турбулентности [9, 10].

На рис. 13.13 и 13.14 сравниваются записи скорости атмосферных течений, полученные с помощью осевой схемы ЛДИС с CO_2 -лазером и крыльчатого анемометра при дальности 60 и 200 м. Следует отметить, что измерительный объем осевой схемы ЛДИС на

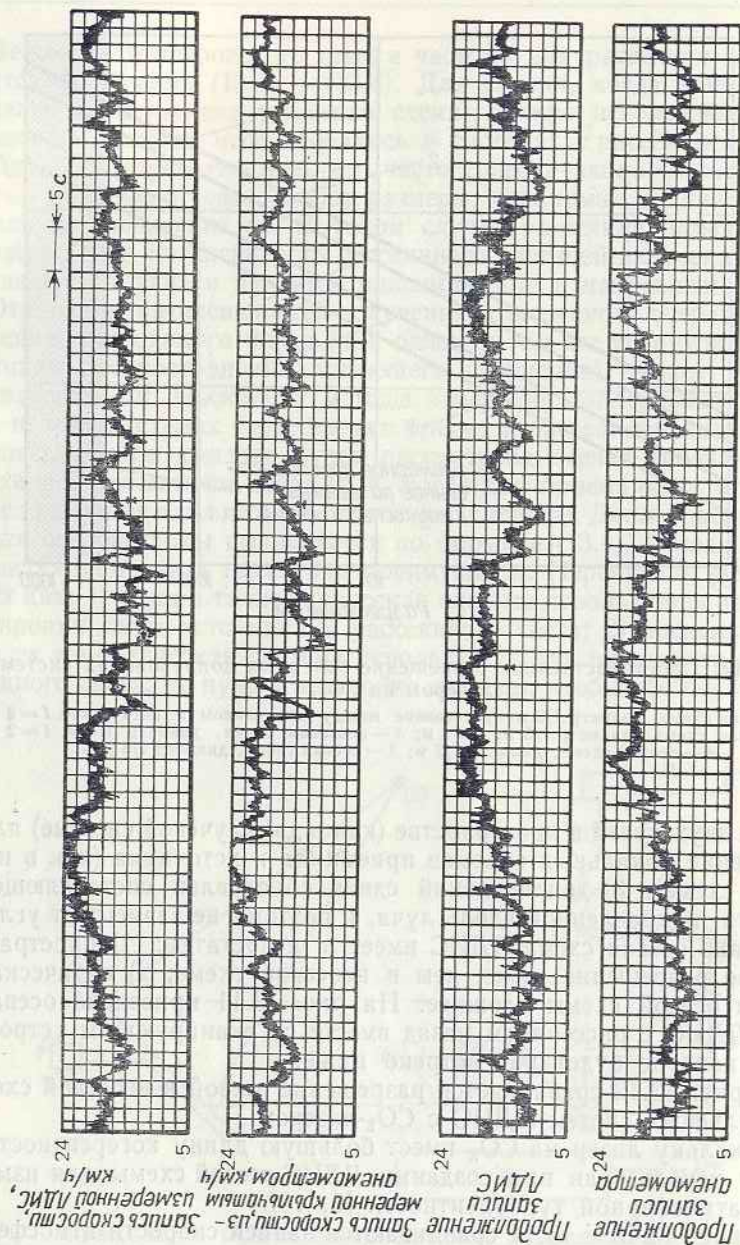


Рис. 13.13. Сравнение записей радиальной скорости, измеренной ЛДИС и крыльчатым анемометром, при дальности 60 м.

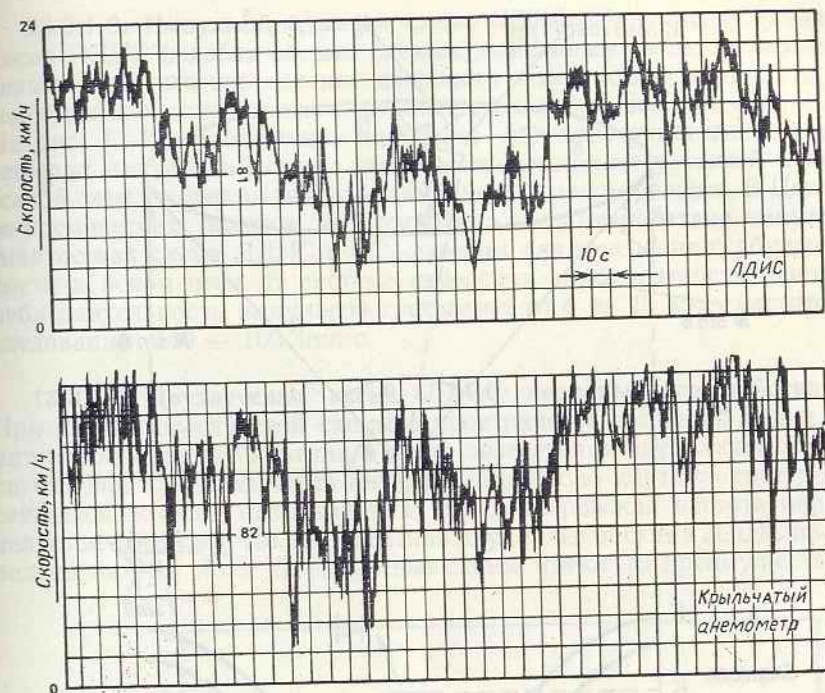


Рис. 13.14. Сравнение записей радиальной скорости, измеренной ЛДИС и крыльчатым анемометром, при дальности 200 м.

СО₂ и крыльчатого анемометра, вообще говоря, различен. Анемометром и ЛДИС измерялись те же самые составляющие скорости ветра.

Поскольку в осевой схеме измеряется только осевая составляющая скорости, для измерения трехмерного поля скорости в данном фокальном объеме можно использовать три такие системы, аналогично тому, как это было сделано в описанной выше системе с рассеянием вперед и тремя приемниками излучения.

Другой разновидностью осевой схемы ЛДИС с СО₂-лазером, которая использовалась в Центре космических полетов им. Маршалла, является схема с коническим сканированием [9, 10]. Простая электромагнитная система с конической схемой сканирования использовалась ранее в радиолокации [11]. На рис. 13.15 показаны схема конического сканирования и выходной сигнал углового распределения скорости (УРС) при коническом сканировании.

На рис. 13.16 сравниваются результаты измерения горизонтальной составляющей скорости ветра при помощи чашечного анемометра и ЛДИС осевой схемы с СО₂-лазером и коническим скани-

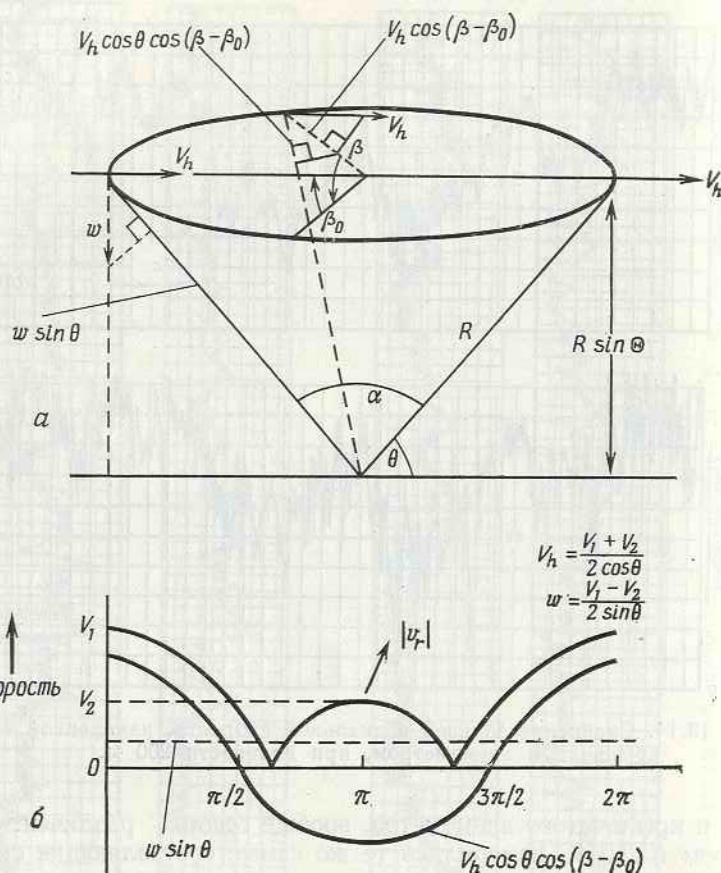


Рис. 13.15. Схема конического сканирования и выходной сигнал УРС.
а — схема конического сканирования; б — зависимость измеряемой составляющей скорости от азимутального угла (УРС).

рованием. Схема с коническим сканированием, по-видимому, имеет большие возможности для измерения скорости атмосферных движений вблизи земли. Дальность измерений такой системы может достигать 500 м. Изменение положения фокального объема осуществляется перемещением вспомогательного зеркала. Изменение положения фокального объема от 20 до 300 м можно легко осуществить менее чем за 1 с. В настоящее время в Центре космических полетов им. Маршалла используется осевая схема ЛДИС с CO_2 -лазером со сканированием по дальности и высоте при проведении измерений в атмосфере (в частности, положения самолетного вихревого следа, полей ветра и смерчей).

13.3.1.3. Импульсная осевая схема ЛДИС. Импульсная осевая схема ЛДИС подобна осевым схемам, описанным выше, за исключением того, что определение дальности в ней осуществляется путем стробирования отраженного сигнала с доплеровским сдвигом. На рис. 13.12 приближенно показано, где пространственное разрешение импульсной схемы становится лучше, чем у осевой и неосевой схем с лазером, работающим в непрерывном режиме. В Центре космических полетов им. Маршалла была разработана импульсная осевая схема ЛДИС с CO_2 -лазером для измерения турбулентности в ясном небе. В системе измерения турбулентности ясного неба длительность импульсов составляет от 4 до 10 мкс с частотой следования $140 \div 160$ имп/с.

13.3.1.4. Двухлучевая схема ЛДИС непрерывного действия. При работе двухлучевой схемы в пространстве создается видимая интерференционная картина в месте пересечения двух лучей. Когда частица проходит через интерференционную картину, свет рассеивается во всех направлениях; его доплеровская частота определяется формулой (13.1). Типичная двухлучевая схема ЛДИС приведена на рис. 13.3. Двухлучевые схемы имеют то преимущество,

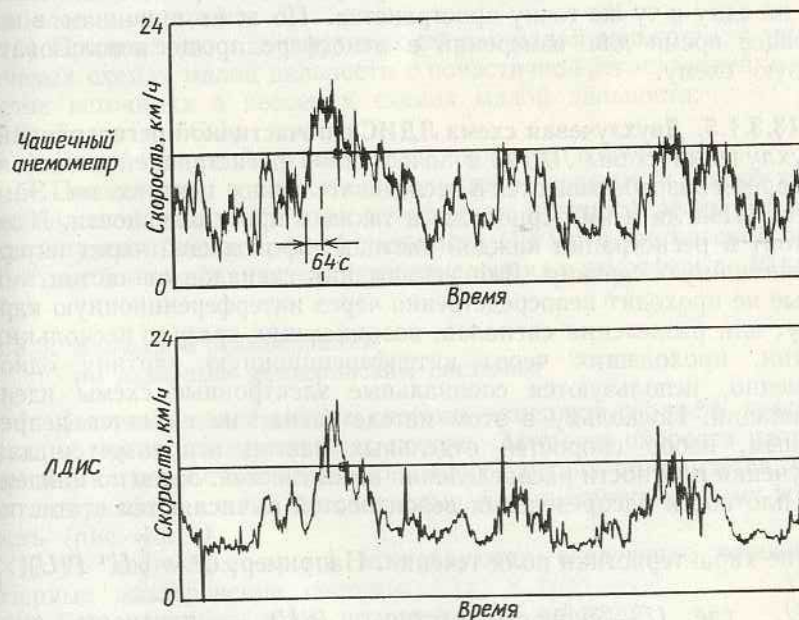


Рис. 13.16. Сравнение горизонтальной скорости ветра, измеренной чашечным анемометром и ЛДИС с CO_2 -лазером осевой схемы и коническим сканированием на высоте 21 м от земли (угол при вершине конуса 90°).

что, когда лучи пересекаются, доплеровская частота может быть измерена из любой точки пространства, т. е. доплеровский сдвиг является функцией угла пересечения лучей. Однако следует отметить, что интенсивность рассеянного излучения и, следовательно, интенсивность излучения, воспринимаемого фотоприемником, могут очень сильно зависеть от пространственного положения приемника. Вообще говоря, рассеяние вперед значительно сильнее рассеяния назад, как следует из теории Ми-рассеяния. Другое преимущество двухлучевой системы состоит в том, что она позволяет непосредственно измерить поперечную составляющую скорости, тогда как в осевой схеме измеряется осевая составляющая. Эти системы обычно используются в лабораторных условиях, когда расстояния от лазера до точки пересечения лучей (области интерференции) малы (как правило, не превышают 2 м). Один из недостатков этой системы заключается в том, что при увеличении дальности становится все труднее настроить систему, чтобы добиться действительного пересечения лучей. Кроме того, поскольку оптические пути каждого луча различны, локальный показатель преломления вдоль каждого луча может изменяться и вызывать небольшое отклонение лучей, меняющееся по времени. Аналогичные трудности возникают при попытке фокусировки приемника и лазера на одну и ту же точку пространства. По этим причинам в настоящее время для измерений в атмосфере проще использовать осевую схему.

13.3.1.5. Двухлучевая схема ЛДИС с почастичной регистрацией.

Двухлучевые схемы ЛДИС с почастичной регистрацией в настоящее время разрабатываются в исследовательских центрах им. Эймса, им. Лэнгли и им. Арнольда, а также в промышленности. Идея состоит в регистрации каждой частицы, проходящей через интерференционную картину. Для исключения сигналов от частиц, которые не проходят непосредственно через интерференционную картину, или разделения сигналов, возникающих сразу от нескольких частиц, проходящих через интерференционную картину одновременно, используются специальные электронные схемы идентификации. Поскольку в этом методе сигнал не является непрерывным, набор скоростей отдельных частиц используется для получения плотности распределения вероятностей. Затем по найденной плотности распределения вероятностей вычисляются статистические характеристики поля течения. Например, $\bar{U}^n = \int_{-\infty}^{\infty} U^n P(U) \times$

$\times dU$, где U — скорость частицы, $P(U)$ — плотность распределения вероятностей скоростей, а черта обозначает усреднение. В тех случаях, когда выходной сигнал является непрерывным, вычисляются средние по времени. Преимуществом ЛДИС с по-

частичной регистрацией при измерениях в аэродинамических трубах является то, что в поток не надо вводить частицы, поскольку в этом случае для работы системы достаточно естественной запыленности потока. В аэродинамических трубах может оказаться необходимым запыление потока для получения непрерывного сигнала от измерительного объема при использовании ЛДИС непрерывного типа. В воде или в атмосфере обычно имеется достаточно частиц для получения непрерывного сигнала от фокального объема типичной доплеровской системы.

13.3.2. Краткая характеристика лазеров, применяющихся в настоящее время в доплеровских системах измерения скорости

- 1) Гелий-неоновый лазер.
 - а) Длина волны 0,6328 мкм (видимый свет).
 - б) Применения: в двухлучевых схемах малой дальности; в двухлучевых схемах малой дальности с почастичной регистрацией.
- 2) Аргоновый лазер.
 - а) Длины волн 0,5145 и 0,4880 мкм (видимый свет). (В аргонных лазерах используются до восьми линий. Указанные линии — наиболее сильные.)
 - б) Применения: в двухлучевых схемах малой дальности; в двухлучевых схемах малой дальности с почастичной регистрацией; в качестве источника в неосевых схемах малой дальности.
- 3) Лазер на CO_2 .
 - а) Длина волны 10,6 мкм (инфракрасное излучение).
 - б) Применения: в качестве источника в неосевых и осевых схемах большой дальности (при измерениях в атмосфере до 500 м); в двухлучевой схеме средней дальности (10 м); в импульсной осевой схеме большой дальности (при измерениях в атмосфере до 10 км).

13.3.3. Выводы и рекомендации по лазерным доплеровским системам

I. Лазерные доплеровские системы измеряют скорость траассирующих частиц, взвешенных в потоке. Затем по скорости частиц определяют скорость потока. Во многих случаях принимается, что частицы движутся с той же скоростью, что и окружающая их жидкость (рис. 13.10).

II. В настоящее время используются следующие основные лазерные доплеровские системы:

- 1) Гетеродинамного типа непрерывного действия.
- 2) Гетеродинамного типа импульсного действия.
- 3) Двухлучевые непрерывного действия с непрерывным выходным сигналом.

4) Двухлучевые непрерывного действия с почастичной регистрацией.

III. Основные методы сканирования:

1) Фокусировка доплеровской системы на некоторую точку и перемещение всей системы при необходимости изменить положение фокальной точки.

2) В осевой схеме сканирование по дальности осуществляется вручную или с помощью электронной аппаратуры путем перемещения вспомогательного зеркала. В этой схеме можно осуществить кнопочное сканирование. Непрерывно изменяя угол прицеливания вместе с дальностью, можно осуществить сканирование на плоскости.

3) В осевой схеме с фокусировкой на заданную дальность используются следующие схемы сканирования:

а) *Коническое сканирование.* С помощью вращающегося зеркала фокальный объем описывает круговую траекторию в пространстве. Этот метод позволяет измерить трехмерное поле скорости на данной высоте. Изменяя фокусировку во время вращения луча, можно также осуществить спиральное коническое сканирование, которое позволяет получить профиль скорости по высоте.

б) *Двухточечное сканирование.* Зеркало качается взад и вперед, заставляя фокальный объем перемещаться между двумя заранее выбранными точками. Сумма и разность измеренных скоростей может быть использована для расчета продольной и поперечной составляющих скорости. (Пока эта схема не дала особенно хороших результатов.)

в) *Изменение фокусировки с помощью движущегося зеркала.* Зеркало устанавливается на подвижную платформу, так что оно перемещается с постоянной скоростью. Луч лазера отражается от зеркала (перед фокальным объемом). Так осуществляется перемещение фокального объема и достигается тот же эффект, как если бы система перемещалась относительно частиц. В Центре космических полетов им. Маршалла эта схема использовалась для изучения искусственного тумана в камере, принадлежащей Исследовательскому центру им. Эймса.

IV. Двухлучевые схемы часто используются при измерениях в аэродинамических трубах, где нужно знать одномерную поперечную скорость.

V. Система гетеродинного типа с рассеянием вперед и тремя приемниками применяется для измерения в реальном масштабе времени трехмерного поля скорости в турбулентном полностью развитом течении газа в трубе.

VI. Выполнено прямое сравнение скоростей, измеренных термоанемометром и лазерной доплеровской системой, которое показало хорошее совпадение результатов. Однако это не означает, что такое положение всегда должно иметь место: необходима уверенность,

что скорость трассирующей частицы не отличается от скорости среды около нее.

VII. Лазерные доплеровские системы без смещения частоты дают неопределенность в направлении 180° . Доплеровский сдвиг частоты равен абсолютному значению разности частот лазера и рассеянного излучения. Использование устройства смещения частоты позволяет определять направление движения.

VIII. Во многих случаях при измерениях в аэродинамических трубах необходимо вводить в поток частицы для получения непрерывного выходного сигнала от ЛДИС.

IX. Рекомендуется использование фильтра нижних частот для исключения высокочастотной составляющей шума.

X. Опыт применения лазерных доплеровских систем показывает, что они будут хорошим инструментом для измерения скорости. Лазерные системы имеют преимущества перед акустическими системами в отношении разрешающей способности.

13.4. АКУСТИЧЕСКИЕ ДОПЛЕРОВСКИЕ СИСТЕМЫ

Аналогично лазерным доплеровским системам, акустические доплеровские системы основаны на принципе, что излучение, падающее на движущуюся частицу, испытывает сдвиг частоты, величина которого определяется формулами (13.1) ÷ (13.4). В естественных условиях в атмосфере трассирующими частицами, рассеивающими излучение звуковых частот, являются неоднородности скорости и температуры. Таким образом, акустические доплеровские системы измеряют скорость, с которой в атмосфере происходит перемещение или конвекция градиентов скорости или температуры. В работе [12] приводится следующее выражение, описывающее рассеяние звука в сухом воздухе:

$$dG = \frac{2\pi K^4 V \cos^2 \beta d\Omega}{\left\{ \left[\frac{E(K)}{C^2} \cos^2 \frac{1}{2} \beta + \phi(K)/4T^2 \right]^{-1} \right\}}, \quad (13.9)$$

где dG — часть энергии падающей звуковой волны, рассеиваемая на неоднородностях в объеме V (рассеивающий объем) под углом β в конусе, имеющем телесный угол $d\Omega$. Спектральные интенсивности пульсаций скорости и температуры обозначены $E(K)$ и $\phi(K)$, а скорость звука и средняя температура C и T соответственно. Формула (13.9) показывает, что интенсивность звуковой волны, рассеянной на неоднородностях скорости, зависит от угла рассеяния $\beta = 180^\circ - \theta$ и полуугла рассеяния $\beta/2$. Последнее показывает, что при рассеянии на неоднородностях скорости интенсивность излучения, рассеянного назад ($\theta = 0$), равна нулю. Основываясь на том факте, что рассеянное назад излучение не несет информации о неоднородностях скорости, Беран указывает, что при

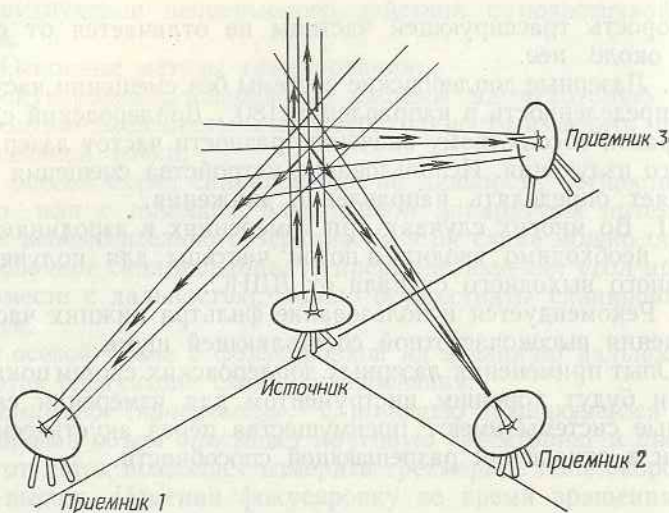


Рис. 13.17. Схема трехкомпонентной акустической доплеровской системы непрерывного действия.

работе акустической доплеровской системы в режиме рассеяния назад в отдельных областях атмосферы градиенты температуры могут оказаться недостаточно большими для получения заметного рассеяния.

13.4.1. Описание существующих систем

Акустические доплеровские системы можно разбить на два класса: импульсного и непрерывного действия.

13.4.1.1. Системы непрерывного действия. В акустических системах непрерывного действия, как следует из самого названия, применяется источник, работающий в непрерывном режиме. При использовании такого источника желательно путем фокусировки системы выделить некоторый измерительный объем подобно тому, как это делается в лазерных доплеровских системах. Такая фокусировка предположительно может быть осуществлена путем фокусировки излучателя и приемника или просто фокусировкой приемника на какую-либо часть излучаемого пучка. Реализация осевой (рассеяние назад) схемы акустической доплеровской системы непрерывного действия в настоящее время наталкивается на трудности, поскольку в отличие от лазерной доплеровской системы здесь нелегко разделить падающее и рассеянное излучение.

Поэтому наиболее приемлемой схемой акустической доплеровской системы непрерывного действия в настоящее время является неосевая схема, в которой источник и приемник пространственно разделены. Как и в лазерных доплеровских системах, для получения информации о двух- и трехмерных полях скорости нужно использовать несколько приемников. На рис. 13.17 схематически изображена трехмерная акустическая доплеровская система непрерывного действия.

Акустические доплеровские системы работают в диапазоне частот, удобном для обработки с помощью электронной аппаратуры (обычно от 400 до 4000 Гц); следовательно, в этом случае нет необходимости в применении гетеродинирования, как для лазерных доплеровских систем. Напротив, желательно измерять непосредственно частоту рассеянного излучения, что позволяет непосредственно определять направление течения. В лазерных доплеровских системах, как указывалось выше, при смещении рассеянного излучения с излучением от источника возникают биения, частота которых не изменяется при изменении направления течения на 180° (однако, как отмечалось, применение устройства смещения частоты источника устраняет эту неопределенность). В настоящее время в акустических доплеровских системах непрерывного действия не удастся достаточно хорошо изолировать приемник, чтобы исключить влияние излучения источника на рассеянное излучение.

13.4.1.2. Акустические доплеровские системы импульсного действия. В акустических доплеровских системах импульсного действия удастся избежать вредного воздействия излучения источника, производя измерения после того, как звук от источника прошел мимо приемника. Это возможно, поскольку расстояние, проходимое рассеянной звуковой волной, больше расстояния от источника до приемника, а время прохождения рассеянного излучения до приемника больше времени прохождения излучения от источника до приемника. Схема исключения вредного влияния излучения источника показана на рис. 13.18.

Как и в случае акустической доплеровской системы непрерывного действия, в акустической доплеровской системе импульсного действия неосевая схема имеет преимущества перед осевой. Это связано с тем обстоятельством, что в осевой схеме измеряется только излучение, рассеянное на неоднородностях температуры, тогда как в неосевой схеме измеряется излучение, рассеянное на неоднородностях скорости и температуры [13—15]. Импульсная система, аналогичная изображенной на рис. 13.17, может быть использована для измерений трехмерного поля скорости. Если средняя вертикальная скорость мала, то двумерный вектор горизонтальной скорости может быть измерен с помощью только двух из некомпланарных приемников, показанных на рис. 13.17. Описанная систе-



Рис. 13.18. Схема исключения вредного влияния излучения источника путем применения импульсной акустической доплеровской системы.

ма использовалась для исследований атмосферы Бераном и Клиффордом из NOAA [16]. На рис. 13.19 (взятом из работы [16] с любезного разрешения д-ра Д. У. Берана из NOAA, Боулдер, шт. Колорадо) сравниваются скорости горизонтального ветра в атмосфере, измеренные на высоте 150 м от земной поверхности при помощи импульсной акустической доплеровской системы с двумя приемниками и привязного воздушного змея [небольшой аэростат — «Измеритель профиля пограничного слоя» (ИППС)], на котором имелись датчики для измерения горизонтального ветра. Звуковые импульсы испускались вертикально ориентированным источником. Использовались два приемника, которые образовывали прямой угол с источником. Расстояние от измерительного объема до земли определялось путем стробирования сигнала, так что только рассеянное излучение с определенной высоты над землей попадало на приемник в момент измерения. Подобное прерывание сигнала

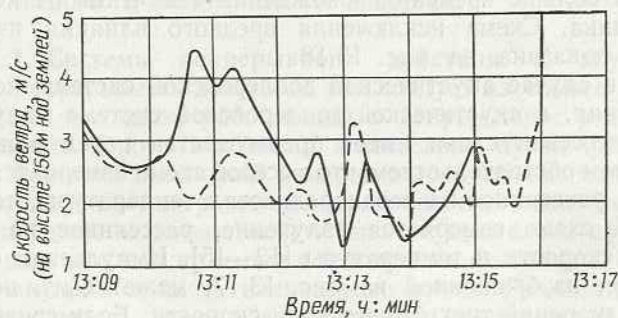


Рис. 13.19. Сравнение скорости ветра, измеренной импульсной акустической доплеровской системой и измерителем профиля пограничного слоя (ИППС). Без фильтра, задержка 48 с; — доплеровская система; — — ИППС.

позволяет использовать ненаправленный приемник, регистрирующий звук со всех направлений.

Как описывает Беран [17], в системах, применяемых в настоящее время в NOAA, используются трехметровые параболические отражатели для приемников и источников. Параболическая конфигурация используется для создания почти параллельного потока излучения. Излучаемая мощность $50 \div 60$ Вт. Планируется перейти к системе из 144 рупоров размером 4×4 м² с излучаемой мощностью $500 \div 600$ Вт. В настоящее время разрешаемый объем составляет около 30×30 м. Импульсы длительностью 0,5 с следуют каждые 8 с. Длительность импульсов может быть уменьшена, если увеличить мощность. Частота источника обычно составляет от 400 до 4000 Гц.

Исследовалась также возможность применения акустических доплеровских систем для измерения тока крови [18—20]. В этом случае рассеивающими частицами могут быть эритроциты, диаметр которых составляет ~ 10 мкм. Использовалась ультразвуковая доплеровская система для неповреждающего проникновения через кожу, мышечную ткань и стенки кровеносных сосудов. На поверхностях раздела также происходит рассеяние звука, однако, поскольку они неподвижны, сдвига частоты рассеянного излучения не происходит. Кроме эритроцитов излучение рассеивают также лейкоциты и тромбоциты. Однако, поскольку лейкоциты и тромбоциты значительно меньше эритроцитов по величине и содержание их в крови мало, они не будут давать заметный вклад в рассеянное излучение [20]. Для измерений обычно используется импульсная осевая схема. На рис. 13.20 дано ее схематическое изображение. Сравнение ожидаемой картины течения с результатами измерений ультразвуковой доплеровской системой для течения Пуазейля в трубке диаметром 7,2 мм приведено на рис. 13.21, а, а на рис. 13.21, б показан профиль скорости в артерии лошади, измеренный

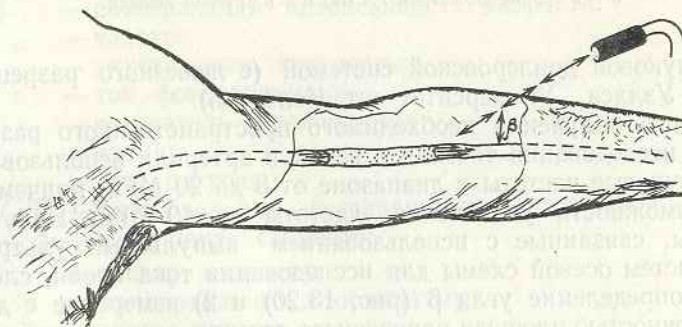


Рис. 13.20. Применение ультразвуковой доплеровской системы для исследования тока крови.

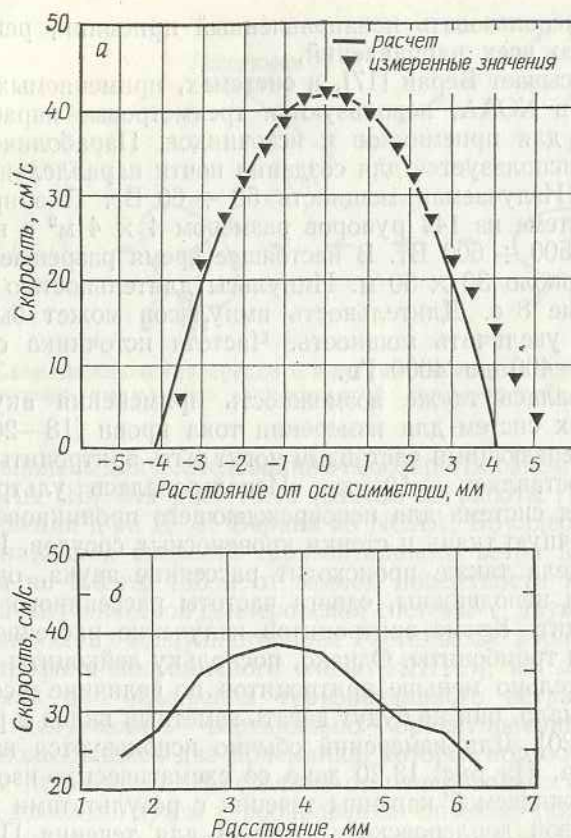


Рис. 13.21. Профили скорости, измеренные импульсной ультразвуковой доплеровской системой.

а — в трубке диаметром 7,2 мм; б — в артерии лошади.

ультразвуковой доплеровской системой (с любезного разрешения д-ра М. Уэллса, Университет шт. Колорадо).

С целью получения необходимого пространственного разрешения для исследования течения в венах и артериях использовались ультразвуковые частоты в диапазоне от 8 до 20 МГц, причем имела возможность увеличения частоты до 40 МГц. Некоторые проблемы, связанные с использованием импульсных ультразвуковых систем осевой схемы для исследования тока крови, следующие: 1) определение угла β (рис. 13.20) и 2) измерение с достаточной точностью площади поперечного сечения сосуда, чтобы можно было, зная скорость, находить расход крови. Разрешение системы может быть недостаточным по сравнению с диаметром канала.

13.4.2. Выводы и рекомендации по акустическим доплеровским системам

1) В настоящее время характеристики импульсной доплеровской системы лучше, чем системы непрерывного действия.

2) Акустические доплеровские методы перспективны для дистанционного измерения перемещения неоднородностей температуры и скорости в течениях жидкости.

3) Способность неоднородностей температуры и скорости отслеживать среднее течение жидкости является критерием, используемым для интерпретации результатов измерения акустической доплеровской системой при определении средней скорости ветра.

4) Импульсные ультразвуковые доплеровские системы в настоящее время используются для исследования кровообращения у животных. Следует ожидать, что применение акустических доплеровских систем импульсного и непрерывного действия в этой сфере исследований получит дальнейшее развитие, поскольку они дают возможность неповреждающего проникновения в мышечную ткань. Источником рассеяния, дающим доплеровский сдвиг, в этом случае является ячеистый характер течения в артериях и венах.

5) Как и в случае лазерных доплеровских систем, в акустических доплеровских системах измеряется скорость рассеивающего объема. Затем скорость рассеивающего объема рассматривается сама по себе или интерпретируется как скорость трассирующего элемента окружающей среды. Изменение и статистика скорости трассирующих частиц используются для получения информации о скорости и статистических характеристиках среды, в которой находятся трассирующие частицы.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

- а, b, c — константы;
 C — скорость звука;
 e_i — единичный вектор в направлении i ;
 $E(K)$ — спектральная интенсивность скорости;
 f — частота;
 G — акустическая мощность;
 i — ток фотоприемника;
 n — показатель преломления;
 t — время;
 T — температура;
 U, V, W — ортогональные составляющие мгновенной скорости;
 V_m — измеряемая скорость;
 $\bar{V}$ — вектор скорости;
 x, y, z — прямоугольные координаты;
 λ — длина волны;
 β, θ — углы;
 $\phi(K)$ — спектральная интенсивность пульсаций температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yeh H., Cummins H. Z., Localized fluid flow measurements with an He-Ne laser spectrometer, *Appl. Phys. Lett.*, 4, 176—178 (1964).
2. Huffaker R. M., Fuller C. E., Lawrence T. R., Application of laser Doppler velocity instrumentation to the measurement of jet turbulence, International Automotive Engineering Congress, Society of Automotive Engineers, Detroit, Michigan, paper № 690266, 1969.
3. Kelton G., Bricout P., Wind velocity measurements using sonic techniques, *Bull. Am. Meteorol. Soc.*, 45, 571—580 (1964).
4. Cliff W. C., Fuller C. E., III, Measurement capabilities of a one-dimensional LDV system, NASA report № TM X-64774, 1973.
5. Lawrence T. R., Lockheed, Huntsville, Alabama, частное сообщение, 1975.
6. George W. K., Lumley J. L., The laser-Doppler velocimeter and its application to the measurement of turbulence, *J. Fluid Mech.*, 60, 321—362 (1973).
7. Fuller C. E., III, Cliff W. C., Huffaker R. M., Three-dimensional laser Doppler velocimeter turbulence measurements in a pipe flow, NASA report № CR-129017, 1973.
8. Cliff W. C., Fuller C. E., III, Sandborn V. A., Simultaneous comparison of turbulent gas fluctuations by laser Doppler and hot wire, *AIAA, J.*, 11, 748—749 (1973). [Имеется перевод: *Ракетная техника и космонавтика*, 1973, № 5, с. 212.]
9. Cliff W. C., Huffaker R. M., Application of a single laser Doppler system to the measurement of atmospheric winds, NASA report № TM-X-64891, 1974.
10. Lawrence T. R. et al., A laser Doppler system for the remote sensing of boundary layer winds in clear air conditions, Preprints of the 16th Radar Meteorology Conference, 1975.
11. Lhermitte R. M., Atlas D., Precipitation motion by pulse Doppler radar, Proceedings of the 9th Weather Radar Conference, Boston, Massachusetts, 1961.
12. Beran D. W., Remote sensing wind and wind shear system, report № FAA-RD-74-3, Department of Transportation, Federal Aviation Administration, Washington, D. C., 20591, 1974.
13. Beran D. W., Little C. G., Willmarth B. C., Acoustic Doppler measurements of vertical velocities in the atmosphere, *Nature*, 230, 160—162 (1971).
14. Browning K. A., Beran D. W., Quigley M. J. S., Little C. G., Capabilities of radar, sonar, and lidar for measuring the structure and motion of the stably stratified atmosphere, *Boundary Layer Meteorol.*, 5, 195—200 (1973).
15. Little C. G., et al., Remote sensing of wind profiles in the boundary layer, ESSA report № ERL 168-WPL 12.
16. Beran D. W., Clifford S. F., Acoustic Doppler measurements of the total wind vector, preprints, Second Symposium on Meteorological Observations and Instruments, San Diego, California, AMS, 1972, p. 100—110.
17. Beran D. W., NOAA, Boulder, Colorado, частное сообщение, 1975.
18. Baker D. W., Pulsed ultrasonic Doppler blood flow sensing, *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, SU-17, 170—185 (1970).
19. Hestand M. B., Miller C. Z., McLeod F. D., Transcutaneous measurement of blood velocity profiles and flow, *Cardiovas. Res.*, 7, 703—712 (1973).
20. Wells M. K., Colorado State University, частное сообщение, 1975.

Моделирование турбулентности методом Монте-Карло

Г. ФИХТЛЬ, М. ПЕРЛМУТТЕР, У. ФРОСТ¹⁾

14.1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже мы рассмотрим моделирование турбулентности и, в частности, атмосферной турбулентности. Какой смысл имеет термин «моделирование»? Здесь под этим термином подразумевается генерация случайного процесса, который обладает заданными статистическими свойствами турбулентности. Эти свойства представляют собой ограниченную совокупность статистических параметров турбулентности, определяемых экспериментально или теоретически (обычно первым путем). Если модельная система генерирует случайные функции, с помощью которых при статистической обработке можно получить заданные свойства атмосферной турбулентности, то модельная система считается «хорошей». Следовательно, она может быть использована для описания характеристик турбулентности и ее взаимодействия с другими объектами, такими, как самолеты, мосты, генерируемые ветром волны на воде и т. д., при тех ограничениях, которые предписываются конечным числом рассматриваемых свойств турбулентности и основными предположениями данного метода. Модельную систему, которая генерирует случайные функции, удовлетворяющие заданным статистическим свойствам турбулентности, будем называть просто *моделью*. Термин «метод Монте-Карло» совместно с термином «моделирование» понимается в смысле Кендалла и Букленда [1], а именно как способ «построить искусственную стохастическую модель математического (или, скорее, физического. — Прим. авт.) процесса и затем использовать ее для проведения статистических экспериментов».

Описываемый здесь метод моделирования турбулентности основывается на принципах теории систем управления. Основная идея заключается в исследовании, синтезе и разработке системы с такой

¹⁾ G. H. Fichtl, Marshall Space Flight Center, Huntsville, Alabama; M. Perlmutter, W. Frost, The University of Tennessee Space Institute, Tullahoma, Tennessee 37388.

передаточной функцией, чтобы при «возбуждении» системы заданными случайными процессами типа шума на ее выходе реализовался случайный процесс, который обладает желаемыми свойствами физического процесса, подлежащего моделированию.

Методы статистического моделирования развиваются очень быстро. Они используются для решения широкого круга задач. Сюда входят задачи исследования операций, экономических систем, разреженных газов, систем управления, турбулентных течений, излучения и т. д. Целью настоящей главы является изложение подхода к моделированию, основанного на принципах теории систем управления, применительно к исследованию турбулентных течений (с особым акцентом на задачи метеорологической турбулентности).

Сначала будут излагаться различные методы генерации случайных сигналов с заданными статистическими характеристиками. Здесь будут рассматриваться как гауссовские, так и негауссовские сигналы. На основе одних и тех же концепций результаты, полученные сначала для одномерных случайных сигналов, будут распространены затем на случай двумерных сигналов. Будут приведены также иллюстративные примеры.

14.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

При моделировании работы системы управления случайный сигнал $I(t)$ типа гауссовского белого шума подается на вход системы управления с импульсной переходной функцией $h(t)$, построенной таким образом, чтобы выходной сигнал $y(t)$ имел требуемые статистические характеристики. Связь между этими величинами можно записать в виде интеграла типа свертки:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) I(t - \tau) d\tau \equiv h(t) * I(t). \quad (14.1)$$

К этому уравнению можно применить преобразование Фурье, используя взаимные преобразования

$$\hat{y}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-i\omega t} dt = FT[y(t)], \quad (14.2)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{y}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = FT^{-1}[\hat{y}(\omega)],$$

и получить

$$\hat{y}(\omega) = H(\omega) \hat{I}(\omega), \quad (14.3)$$

где передаточная функция системы

$$H(\omega) = FT[h(t)]. \quad (14.4)$$

Следовательно, можно записать

$$\langle \hat{y}(\omega) \hat{y}^*(\omega) \rangle = H(\omega) H^*(\omega) \langle \hat{I}(\omega) \hat{I}^*(\omega) \rangle, \quad (14.5)$$

где звездочкой обозначается комплексное сопряжение, а скобками $\langle \rangle$ — осреднение по ансамблю. Равенство (14.5) эквивалентно утверждению, что

$$\phi_y(\omega) = H(\omega) H^*(\omega) \phi_I(\omega), \quad (14.6)$$

где символом ϕ обозначается спектр мощности. Так как спектр мощности гауссовского белого шума является постоянной величиной, без потери общности можно положить ее равной единице и получить следующее выражение для спектра мощности выходного сигнала:

$$\phi_y(\omega) = H(\omega) H^*(\omega). \quad (14.7)$$

Функция $\phi_y(\omega)$ известна, так как спектр мощности рассматриваемого сигнала задан, и, следовательно, нужно найти такую передаточную функцию системы H , чтобы удовлетворялось соотношение (14.7).

14.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ СТАНДАРТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Один из методов определения передаточной функции системы, на выходе которой реализуется сигнал с заданным спектром, заключается в построении системы управления из стандартных элементов, как при диаграммном синтезе Боде. Этот метод использовался в работе [2], в которой решалась задача моделирования зависимости характеристик турбулентного ветра от высоты. Учитывались результаты подробных измерений скорости ветра v как функции высоты z в нижней атмосфере. Было найдено, что случайная скорость ветра может быть представлена в виде однородной функции при следующей нормировке переменных:

$$y(\zeta) = \frac{v(\zeta)}{\sigma_v(\zeta)}, \quad \zeta = \frac{z}{L_v(z)}. \quad (14.8)$$

Здесь L_v — масштаб длины и σ_v — стандартное отклонение.

Все полученные по данным для нижней атмосферы значения автокорреляционной функции, при вычислении которых вместо осреднения по ансамблю использовалось интегральное осреднение, а именно

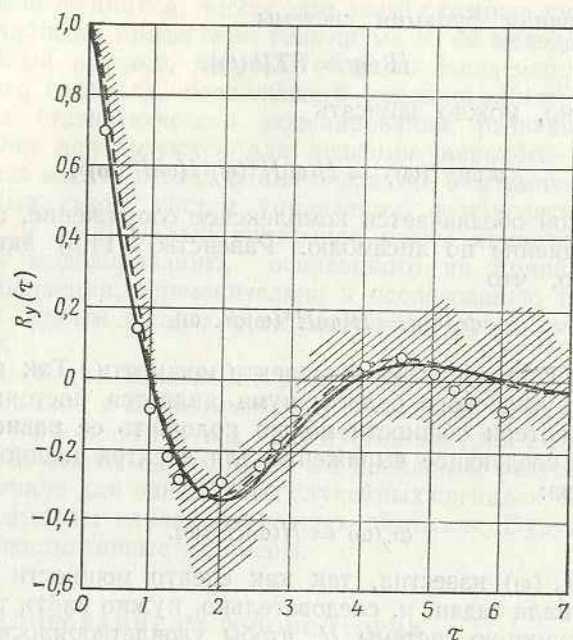


Рис. 14.1. Моделирование автокорреляционной функции.

Заштрихованная область соответствует результатам измерений в нижнем слое атмосферы. — — — эмпирическая зависимость (14.10); — — — теоретическая зависимость (14.51), $T = 0,125$ и $T = 0,1$; ○ моделирование на ЭВМ [формула (14.54)], $N = 1000$, $T = 0,125$.

$$R_y(l) = \overline{y(\zeta)y(\zeta + l)} = \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} y(\zeta')y(\zeta' + l)d\zeta', \quad (14.9)$$

попадают на рис. 14.1 в заштрихованную область и могут считаться однородными, так как они зависят только от разности высот.

14.3.1. Установление соответствия с эмпирической автокорреляционной функцией

Экспериментальная автокорреляционная функция аппроксимировалась с помощью передаточной функции системы второго порядка в виде

$$R_y(\tau) = \langle y(t)y(t + \tau) \rangle = [\exp(-D|\tau|)] [\cos(B\tau) - (D/B) \sin(B|\tau|)], \quad (14.10)$$

где B и D — эмпирические постоянные с значениями

$$B = 1,122, D = 0,539, \quad (14.11)$$

а τ — запаздывание. Зависимость для автокорреляционной функции (14.10) хорошо согласуется с экспериментальными данными (заштрихованная область на рис. 14.1).

Преобразование Фурье автокорреляционной функции дает спектр мощности ϕ_y , который (так как функция R_y четная) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi_y(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} R_y(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \\ &= \frac{4D\omega^2}{[D^2 + (B - \omega)^2][D^2 + (B + \omega)^2]}. \end{aligned} \quad (14.12)$$

14.3.2. Передаточная функция

Подобно соотношению (14.7), спектр мощности выходного сигнала теперь можно записать в виде

$$\phi_y(\omega) = H(\omega)H^*(\omega), \quad (14.13)$$

где функция H должна определяться выражением

$$H(s) = \frac{2D^{1/2}s}{(s + D - iB)(s + D + iB)}, \quad (14.14)$$

в котором $s = i\omega$. Уравнение системы управления можно записать в виде

$$y(s) = H(s)I(s), \quad (14.15)$$

где $y(s)$ — безразмерная скорость ветра с автокорреляционной функцией, определяемой выражением (14.10), а $I(s)$ — входной сигнал типа гауссовского белого шума.

14.3.3. Пространство состояний системы

Можно показать, что уравнение (14.15) является преобразованием Лапласа обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, которое в свою очередь можно преобразовать в систему дифференциальных уравнений первого порядка. Следовательно [2], систему можно определить через переменную состояния X_i , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dX_i}{dt} = a_{ij}X_j + d_i I, \quad (14.16)$$

где используется введенное Эйнштейном условие суммирования по повторяющимся индексам, не указываемое явно. В рассматриваемом случае система имеет две переменные состояния (т. е. $i, j = 1, 2$).

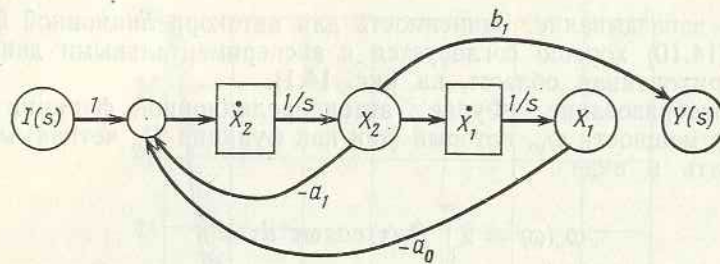


Рис. 14.2. Структурная схема системы.

Выходной сигнал описывается выражением

$$y = e_i X_i. \quad (14.17)$$

Следуя работе [2], строится структурная схема системы, как показано на рис. 14.2, где

$$b_1 = 2D^{1/2}, \quad a_1 = 2D \quad \text{и} \quad a_0 = D^2 + B^2. \quad (14.18)$$

Коэффициенты в уравнениях (14.16) и (14.17) могут быть записаны в матричной форме

$$[a_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad (14.19)$$

$$[d_i] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (14.20)$$

$$[e_i] = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \end{pmatrix}. \quad (14.21)$$

14.3.4. Система с дискретным пространством состояний

Чтобы использовать цифровые ЭВМ, уравнение состояния необходимо преобразовать в уравнение системы с дискретным временем. Один из методов решения этой задачи приводится в работе [2]. В соответствии с этим методом входной сигнал $I(t)$ пропускается через устройство задержки нулевого порядка, которое производит выборку значений сигнала через единичные отрезки времени и подерживает величину сигнала постоянной между моментами выборки (рис. 14.3). Теперь рассмотрим процедуру преобразования такой выборки в систему с дискретным временем.

Интегрируя уравнение (14.16), можно получить [2]

$$X_i(t) = \chi_{ij}(t - t_0) X_j(t_0) + \int_{t_0}^t \chi_{ij}(t - \tau) d_j I(\tau) d\tau, \quad (14.22)$$

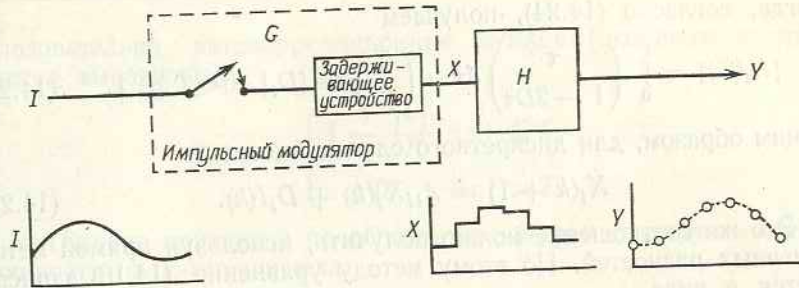


Рис. 14.3. Система управления с импульсным модулятором и задерживающим устройством.

где $\chi_{ij}(t) = \exp(a_{ij}t)$ — фундаментальная матрица системы. Так как теперь $I(k)$ — функция с дискретными значениями, постоянная на интервалах ширины T , то выражение (14.22) можно вычислить при $t = (k+1)T$ и $t_0 = kT$, получая в результате соотношение

$$X_i(k+1) = \chi_{ij}(T) X_j(k) + \Lambda_i(T) I(k), \quad (14.23)$$

где

$$\Lambda_i(T) = \int_0^T \chi_{ij}(\tau') d_j d\tau', \quad (14.24)$$

и дискретные значения аргумента обозначаются соответствующими целыми числами. Следуя обычным методам, фундаментальную матрицу можно вычислить с помощью преобразования Лапласа. Если обозначить через L операцию, соответствующую преобразованию Лапласа, то

$$L[\chi_{ij}(T)] = [s\delta_{ij} - a_{ij}]^{-1}, \quad (14.25)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$[\chi_{ij}(T)] = \begin{pmatrix} e^{-DT} \left(\cos BT + \frac{D}{B} \sin BT \right) & \frac{1}{B} e^{-DT} \sin BT \\ -\frac{a_0}{B} e^{-DT} \sin BT & e^{-DT} \left(\cos BT - \frac{D}{B} \sin BT \right) \end{pmatrix}. \quad (14.26)$$

В предельном случае малых T отсюда следует

$$[\chi_{ij}(T)] = \begin{pmatrix} 1 & T \\ -a_0 T & 1 - 2DT \end{pmatrix} = [A_{ij}], \quad 0 < T \ll 1. \quad (14.27)$$

Тогда, согласно (14.24), получаем

$$[A_i(T)] = \int_0^T \begin{pmatrix} \tau \\ 1 - 2D\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} \equiv [D_i], \quad 0 < T \ll 1. \quad (14.28)$$

Таким образом, для дискретного случая имеем

$$X_i(k+1) = A_{ij}X_j(k) + D_i I(k). \quad (14.29)$$

Это же соотношение можно получить, используя прямой метод конечных разностей. По этому методу уравнение (14.16) записывается в виде

$$\frac{X_i(k+1) - X_i(k)}{T} = a_{ij}X_j(k) + d_i I(k). \quad (14.30)$$

Теперь это соотношение можно переписать таким образом, чтобы из него снова следовало уравнение (14.29):

$$\begin{aligned} X_i(k+1) &= (Ta_{ij} + \delta_{ij})X_j(k) + Td_i I(k) = \\ &= A_{ij}X_j(k) + D_i I(k). \end{aligned} \quad (14.31)$$

14.3.5. Влияние дискретизации на автокорреляционную функцию

Чтобы получить истинную автокорреляционную функцию после дискретизации входного случайного сигнала $I(k)$, в выходной сигнал нужно ввести некоторый поправочный множитель. Это осуществляется следующим образом. Как показано на рис. 14.3, в систему было введено задерживающее устройство нулевого порядка. Следовательно, вместо непрерывного гауссовского сигнала на вход непрерывной системы поступает дискретный сигнал в виде ступенчатой функции с шириной ступенек T и высотой, описываемой гауссовским распределением. Поправку можно получить, определяя спектральную функцию дискретного входного сигнала. Автокорреляционная функция дискретного входного сигнала имеет вид

$$R_{I'}(\tau) = \langle I'(t)I'(t+\tau) \rangle_A = \sigma^2 \text{Pr}[A], \quad (14.32)$$

где $\sigma^2 = 1,0$ — дисперсия гауссовского случайного входного сигнала, а $\text{Pr}[A]$ — вероятность того, что обе точки t и $t+\tau$ входного сигнала, представляемого в дискретной форме, содержатся между временами kT и $(k+1)T$. Штрихи, так же как и целочисленные значения аргумента выше, используются для обозначения дискретных величин. Можно показать [2], что вероятность события A равна

$$\text{Pr}[A] = \begin{cases} \frac{T-|\tau|}{T}, & |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (14.33)$$

Следовательно, автокорреляционная функция входного сигнала дается выражением

$$R_{I'}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & |\tau| \leq T, \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (14.34)$$

К ней можно применить преобразование Фурье и получить спектр мощности входного сигнала

$$\phi_{I'} = H_s H_s^* \phi_I = T \left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right]^2 \approx T, \quad 0 < T \ll 1, \quad (14.35)$$

где H_s — передаточная функция задерживающего устройства нулевого порядка. Таким образом, теперь спектр выходного сигнала при дискретном входном сигнале I' определяется выражением

$$\phi_{y'} = H_s H_s^* H H^* \phi_I \approx T H H^* \approx T \phi_y \quad (14.36a)$$

и, следовательно, автокорреляционная функция дискретного сигнала имеет вид

$$R_{y'}(\tau) = T R_y(\tau). \quad (14.36b)$$

Таким образом, чтобы получить требуемый непрерывный спектр по дискретному сигналу, его нужно нормировать следующим образом:

$$y = y'/T^{1/2}. \quad (14.37)$$

14.3.6. Автокорреляционная функция дискретной системы

Автокорреляционную функцию дискретной системы можно вычислить теоретически, следуя методам, изложенным в работе [2]. Уравнение (14.29) запишем в виде

$$\begin{aligned} X_i(k+1) &= A_{ij}X_j(k) + D_i I(k), \\ X_i(k+2) &= A_{ij}X_j(k+1) + D_i I(k+1) = \\ &= A_{ik}^{(2)}X_k(k) + A_{ik}D_k I(k) + D_i I(k+1), \end{aligned} \quad (14.38)$$

где

$$A_{ik}^{(2)} = A_{ij}A_{jk}. \quad (14.39)$$

Точно так же

$$\begin{aligned} X_i(k+3) &= A_{ik}^{(3)}X_k(k) + A_{ik}^{(2)}D_k I(k) + A_{ik}D_k I(k+1) + \\ &+ D_i I(k+2) \end{aligned} \quad (14.40)$$

и в общем случае

$$X_i(k+n) = A_{im}^{(n)} X_m(k) + \sum_{r=k}^{k+n-1} A_{ij}^{(k+n-1-r)} D_j I(r), \quad (14.41)$$

где

$$A_{ij}^{(0)} D_j = D_i. \quad (14.42)$$

Полагая $k+n=v$ и учитывая, что при $k \rightarrow -\infty$ имеет место $X_m(-\infty) = 0$, получаем

$$X_i(v) = \sum_{r=-\infty}^{v-1} A_{ij}^{(v-1-r)} D_j I(r). \quad (14.43)$$

Эта формула дает рекуррентный способ определения $X_i(v)$. Полагая $m=v-1-r$, ее можно переписать в виде

$$X_i(v) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{ij}^{(m)} D_j I(v-m-1), \quad (14.44)$$

откуда следует, что если $\langle I(j) \rangle = 0$, то и $\langle X_i \rangle = 0$. Автокорреляционную функцию можно найти, используя равенство (14.44), следующим образом. Рассмотрим сначала взаимную корреляционную функцию

$$\langle I(v) X_i(v+l) \rangle = R_{IX_i}(l) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{ij}^{(m)} D_j \langle I(v) I(v+l-m-1) \rangle. \quad (14.45)$$

Так как $I(j)$ — дискретный гауссовский белый шум, то

$$\langle I(v) I(v+l-m-1) \rangle = \delta(l-m-1),$$

где

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } l-m-1 \neq 0, \\ 1, & \text{если } l-m-1 = 0. \end{cases} \quad (14.46)$$

Следовательно, соотношение (14.45) приводится к виду

$$R_{IX_i}(l) = \begin{cases} A_{ij}^{(l-1)} D_j, & \text{если } l \neq 0, \\ 0, & \text{если } l = 0. \end{cases} \quad (14.47)$$

Точно так же получаем

$$\begin{aligned} R_{X_i X_k}(l) &= \langle X_i(v) X_k(v+l) \rangle = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{ij}^{(m)} D_j \langle I(v-m-1) X_k(v+l) \rangle = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{ij}^{(m)} D_j R_{IX_k}(l+m+1), \end{aligned} \quad (14.48)$$

или

$$R_{X_i X_k}(l) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{ij}^{(m)} D_j A_{kv}^{(l+m)} D_v = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) f(m+l), \quad (14.49)$$

где $f(m) = A_{ij}^{(m)} D_j$. Выражение для автокорреляционной функции выходного сигнала $y(v)$ принимает вид

$$\begin{aligned} R_y(l) &= \frac{\langle y(v) y(v+l) \rangle}{\sigma_{y(v)}^2} = \\ &= \frac{b_1^2 \langle X_2(v) X_2(v+l) \rangle}{\sigma_{y(v)}^2} = \frac{b_1^2 R_{X_2 X_2}(l)}{\sigma_{y(v)}^2}. \end{aligned} \quad (14.50)$$

Затем, используя соотношения (14.49) и (14.47), получаем

$$\begin{aligned} R_y(l) &= \frac{1}{\sigma_{y(v)}^2} b_1^2 T^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_{22}^{(m)} A_{22}^{(m+l)} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{22}^{(m)} A_{22}^{(m+l)} / \sum_{m=0}^{\infty} (A_{22}^{(m)})^2, \end{aligned} \quad (14.51)$$

где нормирующий множитель

$$\sigma_{y(v)}^2 = \langle y^2(v) \rangle = b_1^2 R_{X_2 X_2}(0) = b_1^2 T^2 \sum_{m=0}^{\infty} (A_{22}^{(m)})^2. \quad (14.52)$$

Аналитический результат для автокорреляционной функции $R_y(l)$ дискретной системы показан на рис. 14.1 при $T = 0,125$ и $T = 0,1$ и хорошо согласуется с автокорреляционной функцией, определенной экспериментально. Следует отметить, что полученное решение не зависит от величины интервала времени T и кривые, соответствующие различным значениям T , сливаются. Дисперсия $\sigma_{y(v)}^2$ равна 0,145 при $T = 0,125$ и 0,111 при $T = 0,1$. Это означает, что система устойчива, так как дисперсия является конечной величиной. Согласно соотношению (14.366), поправочный множитель $\sigma_{y(v)}^2$ равен T ; это значение хорошо соответствует результату (14.52), который был получен при более детальном исследовании дискретной системы.

14.3.7. Реализация выходного сигнала на ЭВМ

Дискретный гауссовский белый шум можно реализовать на ЭВМ, используя стандартные программы. Подставляя полученные таким образом значения в рекуррентное соотношение для X_i [уравнение (14.29)], вычислим совокупность дискретных значений $y(k)$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Используем нормирующий множитель

$$S_y = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y^2(k) \right)^{1/2}. \quad (14.53)$$

Тогда автокорреляционную функцию можно вычислить из соотношения

$$R_y(l) = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)y(k+l) \right] / S_y^2. \quad (14.54)$$

Соответствующие результаты для временного интервала $T = 0,125$ и выборки из 1000 дискретных значений приведены на рис. 14.1 (кружки). Эти результаты хорошо согласуются с требуемой автокорреляционной функцией. Значение S_y^2 при $T = 0,125$ равно 0,142, что хорошо согласуется с теоретическим значением, равным 0,145 (разд. 14.3.6).

14.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Другой метод моделирования заключается в вычислении интеграла типа свертки методом фильтрации. Этот метод применялся в работе [3] к моделированию волн в океане. Главное преимущество этого метода по сравнению с предыдущим состоит в том, что здесь не требуется аппроксимировать спектр некоторыми комбинациями простых передаточных функций. Имеются стандартные методы построения низкочастотных, высокочастотных и полосовых цифровых фильтров, которые можно использовать для формирования желаемого спектра мощности из сигнала типа белого шума.

Как следует из (14.7), спектр мощности можно записать в виде

$$\phi(\omega) = H(\omega)H^*(\omega). \quad (14.55)$$

Передаточную функцию системы можно выразить через амплитудную $A(\omega)$ и фазовую $\theta(\omega)$ характеристики:

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)}. \quad (14.56)$$

Полагая $\theta(\omega) = 0$, получим

$$H(\omega) = A(\omega) = [\phi(\omega)]^{1/2}. \quad (14.57)$$

Тогда выходной сигнал можно представить в виде

$$\hat{y}(\omega) = [\phi(\omega)]^{1/2} \hat{I}(\omega). \quad (14.58)$$

Импульсная переходная функция определяется формулой

$$h(t) = FT^{-1}[\phi(\omega)^{1/2}], \quad (14.59)$$

а выходной сигнал записывается в виде

$$y(t) = h(t) * I(t). \quad (14.60)$$

Следовательно, генерируя гауссовский белый шум и составляя его свертку с импульсной переходной функцией, можно получить случайный сигнал с требуемым спектром мощности $\phi(\omega)$.

14.4.1. Дискретизация интеграла типа свертки

Чтобы использовать цифровые ЭВМ, интеграл типа свертки необходимо представить в дискретной форме. Такое представление осуществляется посредством пропускания входного сигнала $I(t)$ через задерживающее устройство нулевого порядка, как это описано в разд. 14.3.5. Полученный посредством дискретного выделения значений выходной сигнал обозначается через y' ; его необходимо скорректировать в соответствии с формулой (14.37).

Значение интеграла типа свертки в момент времени t_0 при наличии импульсного модулятора можно записать в виде

$$y'(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)I'(t_0 - \tau) d\tau, \quad (14.61)$$

где I' — белый шум, пропущенный через импульсный модулятор. Тогда

$$\begin{aligned} y'(t_0) = & I'(t_0) \int_{-T/2}^{+T/2} h(\tau) d\tau + I'(t_0 - T) \int_{T/2}^{3T/2} h(\tau) d\tau + \\ & + I'(t_0 - 2T) \int_{3T/2}^{5T/2} h(\tau) d\tau + I'(t_0 - 3T) \int_{5T/2}^{7T/2} h(\tau) d\tau + \\ & + \dots + I'(t_0 + T) \int_{-3T/2}^{-T/2} h(\tau) d\tau + I'(t_0 + 2T) \int_{-5T/2}^{-3T/2} h(\tau) d\tau + \dots \end{aligned} \quad (14.62)$$

Для малых T отсюда получаем выражение

$$\begin{aligned} y'(t_0) = & I'(t_0)h(0)T + I'(t_0 - T)h(T)T + I'(t_0 - 2T)h(2T)T + \\ & + I'(t_0 - 3T)h(3T)T + \dots + I'(t_0 + T)h(-T)T + \\ & + I'(t_0 + 2T)h(2T)T + \dots, \end{aligned} \quad (14.63)$$

которое можно переписать в виде

$$y'(t_0) = T \sum_{l=-N}^N I'(t_0 - lT)h(lT). \quad (14.64)$$

Опуская символ T для удобства записи [например, записывая $h(lT) = h(l)$] и полагая $t_0 = mT$, получим

$$y(m) = T \sum_{l=-N}^{+N} I(m-l)h(l), \quad (14.65)$$

где целочисленные символы в скобках снова относятся к дискретным значениям аргумента, заменяя штрихи. Введение поправки, обусловленной дискретизацией процесса, дает

$$y(m) = T^{1/2} \sum_{l=-N}^N I(m-l) h(l). \quad (14.66)$$

Это соотношение определяет цифровой фильтр $h(l)$, который характеризуется импульсной переходной функцией, вычисляемой при дискретных значениях аргумента. Умножив ее на сигнал типа гауссовского белого шума и просуммировав по l , получим m -е значение выходного сигнала. Совокупность всех $y(m)$ есть случайный выходной сигнал с заданным спектром мощности, соответствующим моделируемому процессу.

14.4.2. Теоретическое определение корреляционной функции для модельной системы

Как и прежде, представляет интерес найти статистические моменты, которые получаются при использовании метода цифровой фильтрации. Легко показать, что

$$\langle y(m) \rangle = T^{1/2} \sum_{l=-N}^N h(l) \langle I(m-l) \rangle = 0, \quad (14.67)$$

т. е. среднее значение сигнала равно нулю. Далее,

$$\begin{aligned} R_{I,y}(l) &= \langle I(m) y(m+l) \rangle = \\ &= T^{1/2} \sum_{r=-N}^{+N} h(r) \langle I(m) I(m+l-r) \rangle = T^{1/2} h(l). \end{aligned} \quad (14.68)$$

Точно так же

$$\begin{aligned} R_{yy}(\lambda) &= \langle y(l) y(l+\lambda) \rangle = \\ &= T^{1/2} \sum_{m=-N}^{+N} h(m) \langle I(l-m) y(l+\lambda) \rangle = \\ &= T \sum_{m=-N}^{+N} h(m) h(m+\lambda). \end{aligned} \quad (14.69)$$

В предельных случаях малых T и больших N это соотношение преобразуется в интеграл вида

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) h(t+\tau) dt = h(t) * h(t) = \\ &= FT^{-1} [H(\omega) H^*(\omega)] = FT^{-1} [\phi_y(\omega)]. \end{aligned} \quad (14.70)$$

Этот результат показывает, что автокорреляционная функция сигнала на выходе цифрового фильтра действительно характеризуется требуемым спектром мощности, что подтверждает применимость рассмотренной схемы моделирования.

14.5. ДИСКРЕТНЫЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Случайные сигналы можно записать в виде рядов Фурье со случайными коэффициентами. Случайные коэффициенты можно задать таким образом, чтобы статистические моменты сигнала имели заданные значения. Кроме того, развитые недавно методы быстрого преобразования Фурье позволяют быстро и эффективно выполнить преобразования сигналов от переменного времени к переменной частоте, и наоборот. С помощью этих методов можно сформировать случайный входной сигнал типа шума и затем, используя быстрое преобразование Фурье, получить фурье-спектр. Затем фурье-спектр можно умножить на соответствующую передаточную функцию и применить к полученному результату обратное преобразование, определяя искомый выходной сигнал как функцию времени. Результаты, получаемые при помощи этого метода, будут рассмотрены ниже.

14.5.1. Дискретное преобразование Фурье

Если сигнал $w(t)$ требуется проанализировать на цифровой ЭВМ, то вместо непрерывного спектра необходимо рассмотреть дискретный фурье-спектр. Если фурье-спектр $\hat{w}(f)$ локализуется в ограниченном интервале частот, так что $\hat{w}(f) \approx 0$ при $f > f_M$, то функцию $\hat{w}(f)$ можно разложить в ряд Фурье вида

$$\begin{aligned} \hat{w}(f) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-i2\pi n f / f_p}, \\ f_p &> 2f_M, \quad \frac{-f_p}{2} < f < \frac{f_p}{2}, \end{aligned} \quad (14.71)$$

где

$$C_n = \frac{1}{f_p} \int_{-f_p/2}^{+f_p/2} \hat{w}(f) e^{i2\pi n f / f_p} df. \quad (14.72)$$

Так как $\hat{w}(f) = 0$ при $f > f_M$, то получается сигнал при дискретных значениях времени $t = n/f_p$, а именно

$$C_n f_p = FT^{-1} [\hat{w}] = w_n(t = n/f_p). \quad (14.73)$$

Следовательно, если значения функции w известны при дискретных значениях времени t , то, согласно (14.71) и (14.73), можно вычислить ее дискретное преобразование Фурье $\hat{w}$ как непрерывную функцию частоты f . Затем, производя обратное непрерывное преобразование Фурье функции $\hat{w}$, получим значения функции w при всех временах. Так как, согласно предположению, $t = n/f_p = n\Delta t$, легко показать, что

$$\Delta t = \frac{1}{f_p} \leq \frac{1}{2f_M}. \quad (14.74)$$

Эта величина иногда называется интервалом Найквиста.

Рассматривая выборку из $N + 1$ значений w_n и записывая $f = k\Delta f$ и $f_p = N\Delta f$, приходим к следующему представлению равенства (14.71):

$$\hat{w}_k(k\Delta f) = \frac{1}{f_p} \sum_{n=-N/2}^{+N/2} w_n e^{-i2\pi nk/N}. \quad (14.75)$$

Так как $f_p = 1/\Delta t = N/T_p$, последнее выражение можно записать в виде

$$\frac{\hat{w}_k}{T_p} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{+N/2} w_n e^{-i2\pi nk/N}. \quad (14.76)$$

Как показано в работе [4], это представление может рассматриваться как дискретное преобразование Фурье. Тогда можно воспользоваться обратным дискретным преобразованием Фурье точно так же, как при определении фурье-спектра для разложения w_n в ряд Фурье, а именно:

$$w_n = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \left(\frac{\hat{w}_k}{T_p} \right) e^{i2\pi kn/N}. \quad (14.77)$$

Равенства (14.76) и (14.77) определяют взаимные дискретные преобразования Фурье и являются дискретной аппроксимацией взаимных непрерывных преобразований Фурье.

Таким образом, один из методов генерации случайного сигнала будет состоять в следующем: сначала генерируется дискретный случайный сигнал типа гауссовского белого шума $I_1, I_2, \dots, I_n$; затем с помощью быстрого преобразования Фурье определяется спектр мощности этого шума в виде

$$\frac{\hat{I}(f = k\Delta f)}{T_p} = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} I(t = n\Delta t) e^{-i2\pi nk/N}. \quad (14.78)$$

Используя соотношение

$$\hat{y}(f) = H(f) \hat{I}(f), \quad (14.79)$$

находим

$$\hat{y}(f = k\Delta f) = H(f = k\Delta f) \hat{I}(f = k\Delta f). \quad (14.80)$$

Таким образом, получен фурье-спектр рассматриваемого сигнала $\hat{y}$. Затем, используя обратное быстрое преобразование Фурье функции $\hat{y}$, можно определить искомый сигнал $y(n\Delta t)$.

14.5.2. Дискретные ряды Фурье со случайно выбранными коэффициентами

Другой метод, широко используемый при моделировании случайных сигналов, заключается в непосредственной генерации случайных коэффициентов дискретного ряда Фурье. Ниже описывается метод, согласно которому сначала устанавливается связь между фурье-спектром и спектром мощности, а затем показывается, что коэффициенты Фурье имеют гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией, характеризуемой спектром мощности при заданной частоте. Наконец, излагается метод выборок для коэффициентов Фурье.

14.5.3. Связь между фурье-спектром и спектром мощности

Чтобы установить связь между фурье-спектром и спектром мощности, используя метод, изложенный в работе [4], запишем следующее соотношение:

$$\Omega_{\eta\eta}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \eta(t) \eta(t + \tau) dt. \quad (14.81)$$

Применяя преобразование Фурье к этому соотношению, получим

$$FT[\Omega_{\eta\eta}(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \eta(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \eta(t + \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right] dt. \quad (14.82)$$

Следовательно,

$$FT[\Omega_{\eta\eta}(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \eta(t) \hat{\eta}(\omega) e^{-i\omega t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \hat{\eta}_T^*(\omega) \hat{\eta}_T(\omega), \quad (14.83)$$

где символ T обозначает конечный интервал времени, а $\hat{\eta}$ — фурье-спектр.

Осредняя по ансамблю это соотношение, находим, что спектр мощности $\phi(\omega)$ описывается выражением

$$\phi(\omega) = FT[R_{\eta\eta}] = FT[\langle \hat{\eta}_T^*(\omega) \hat{\eta}(\omega) \rangle] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle \hat{\eta}_T^*(\omega) \hat{\eta}(\omega) \rangle, \quad (14.84)$$

где $R_{\eta\eta}$ — автокорреляционная функция, определяемая формулой

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \langle \eta(t) \eta(t+\tau) \rangle. \quad (14.85)$$

Следовательно, спектр мощности выражается через фурье-спектр $\hat{\eta}(\omega)$, и вид искомого соотношения определен.

14.5.4. Моделирование с помощью дискретных рядов Фурье

Как показывает соотношение (14.77), приведенное в разд. 14.5.1, сигнал можно записать в виде

$$y(\tau) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2} \alpha_n e^{-i\omega_n \tau}, \quad (14.86)$$

где

$$\alpha_n = \hat{y}_n / T_p.$$

Это выражение можно переписать также как

$$y(\tau) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2} (\alpha_{R,n} + i\alpha_{I,n}) [\cos(\omega_n \tau) - i \sin(\omega_n \tau)]. \quad (14.87)$$

Поскольку y — действительная величина, мнимая часть этого выражения должна обращаться в нуль. Это условие выполняется, так как $\alpha_{R,n}$ — четная функция, а $\alpha_{I,n}$ — нечетная функция относительно значения $\omega_n = 0$. Тогда из (14.87) следует

$$y(\tau) = \sum_{n=-N/2}^{+N/2} [\alpha_{R,n} \cos(\omega_n \tau) + \alpha_{I,n} \sin(\omega_n \tau)]. \quad (14.88)$$

Произведение четных функций $\alpha_{R,n}$ и $\cos(\omega_n \tau)$ также является четной функцией. Аналогично, так как $\alpha_{I,n}$ и $\sin(\omega_n \tau)$ — нечетные функции, их произведение является четной функцией. Следовательно, последнее выражение можно переписать в виде

$$y(\tau) = \alpha_{R,0} + 2 \sum_{n=1}^{N/2} [\alpha_{R,n} \cos(\omega_n \tau) + \alpha_{I,n} \sin(\omega_n \tau)]. \quad (14.89)$$

В работе [4] показано, что $\alpha_{R,n}$ и $\alpha_{I,n}$ — случайные переменные, описываемые гауссовским распределением вероятностей:

$$f(\alpha_{R,n}, \alpha_{I,n}) = \frac{1}{2\pi \langle \alpha_n^2 \rangle} \exp \left[-\frac{(\alpha_{R,n}^2 + \alpha_{I,n}^2)}{2 \langle \alpha_n^2 \rangle} \right] \quad (14.90)$$

и

$$\langle \alpha_{R,n} \rangle = \langle \alpha_{I,n} \rangle = 0. \quad (14.91)$$

Кроме того, как показано в гл. 4, из условия стационарности следует

$$\langle \alpha_{R,n}^2 \rangle = \langle \alpha_{I,n}^2 \rangle = \langle \alpha_n^2 \rangle. \quad (14.92)$$

С учетом изложенного в разд. 14.5.1 получается следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_n \alpha_n^* \rangle &= \langle \alpha_{R,n}^2 \rangle + \langle \alpha_{I,n}^2 \rangle = 2 \langle \alpha_n^2 \rangle = \\ &= (1/\tau_p^2) \langle \hat{y}(\omega_n) \hat{y}^*(\omega_n) \rangle. \end{aligned} \quad (14.93)$$

Затем в соответствии с изложенным в разд. 14.5.3 получаем

$$2 \langle \alpha_n^2 \rangle = \lim_{\tau_p \rightarrow \infty} \frac{\phi(\omega_n)}{\tau_p} = \lim_{\tau_p \rightarrow \infty} \phi(\omega_n) \frac{\Delta\omega}{2\pi} \text{ при } n \neq 0, \quad (14.94)$$

где $\phi(\omega_n)$ — спектр мощности при частоте ω_n и $1/\tau_p = \Delta\omega/2\pi$. Однако если $\omega_n = 0$, то $\langle \alpha_{I,n}^2 \rangle = 0$, и вместо (14.94) получаем выражение

$$\langle \alpha_0^2 \rangle = \lim_{\tau_p \rightarrow \infty} \frac{\phi(0)}{\tau_p} = \lim_{\tau_p \rightarrow \infty} \phi(0) \frac{\Delta\omega}{2\pi}. \quad (14.95)$$

Используя преобразование переменных

$$\begin{aligned} \alpha_{R,n} &= \alpha_{p,n} \cos \varepsilon_n, \\ \alpha_{I,n} &= \alpha_{p,n} \sin \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (14.96)$$

находим

$$y(\tau) = \alpha_{p,0} \cos \varepsilon_0 + 2 \sum_{n=1}^{N/2} \alpha_{p,n} \cos(\omega_n \tau - \varepsilon_n). \quad (14.97)$$

Совместное распределение величин $\alpha_{p,n}$ и ε_n получим, подставляя соотношения (14.96) в (14.90):

$$f(\alpha_{p,n}, \varepsilon_n) d\alpha_{p,n} d\varepsilon_n = f(\alpha_{p,n}) d\alpha_{p,n} f(\varepsilon_n) d\varepsilon_n, \quad (14.98)$$

где

$$f(\alpha_{p,n}) d\alpha_{p,n} = \frac{\alpha_{p,n}}{\langle \alpha_n^2 \rangle} e^{-\alpha_{p,n}^2 / 2 \langle \alpha_n^2 \rangle} d\alpha_{p,n} \quad (14.99)$$

и

$$f(\varepsilon_n) d\varepsilon_n = (1/2\pi) d\varepsilon_n. \quad (14.100)$$

Отметим, что $da_{R,n}da_{I,n} = \alpha_{p,n}da_{p,n}d\varepsilon_n$. Случайные выборки величин, характеризуемых распределениями (14.99) и (14.100), можно получить [4], подставляя случайные числа R , равномерно распределенные между 0 и 1, в соотношения

$$\varepsilon_n = 2\pi R_{\varepsilon_n}, \quad (14.101)$$

$$\alpha_{p,n} = \left[2\langle \alpha_n^2 \rangle \ln \left(\frac{1}{R_{\alpha,n}} \right) \right]^{1/2}, \quad (14.102)$$

где $\langle \alpha_n^2 \rangle$ — параметры, определяемые равенствами (14.94) и (14.95).

14.5.5. Теоретические выражения для статистических моментов при моделировании с помощью дискретных рядов Фурье

Представляет интерес вычислить статистические моменты, получающиеся при моделировании с помощью дискретных рядов Фурье. Чтобы получить среднее значение переменной y , нужно осреднить по ансамблю равенство (14.97) и использовать тот факт, что переменные α и ε статистически независимы:

$$\langle y \rangle = \langle \alpha_{p,0} \rangle \langle \cos \varepsilon_0 \rangle + 2 \sum_{n=1}^{N/2} \langle \alpha_{p,n} \rangle \langle \cos (\omega_n \tau - \varepsilon_n) \rangle. \quad (14.103)$$

Используя распределение (14.100), получаем

$$\langle \cos \varepsilon_0 \rangle = \int_0^{2\pi} \cos \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_0}{2\pi} = 0, \quad (14.104)$$

$$\langle \cos (\omega_n \tau - \varepsilon_n) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos (\omega_n \tau - \varepsilon_n) \frac{d\varepsilon_n}{2\pi} = 0, \quad (14.105)$$

так что $\langle y \rangle = 0$.

Аналогичным образом можно вычислить статистические моменты второго порядка. Записывая равенства (14.97) для моментов времени τ и $\tau + \Delta\tau$ и вычисляя среднее по ансамблю от их произведения, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} \langle y(\tau) y(\tau + \Delta\tau) \rangle &= \langle [\alpha_{p,0} \cos \varepsilon_0 + 2 \sum_{n=1}^{N/2} \alpha_{p,n} \cos (\omega_n \tau - \varepsilon_n)] \times \\ &\times [\alpha_{p,0} \cos \varepsilon_0 + 2 \sum_{l=1}^{N/2} \alpha_{p,l} \cos (\omega_l (\tau + \Delta\tau) - \varepsilon_l)] \rangle. \end{aligned} \quad (14.106)$$

Так как произведения различных слагаемых обращаются в нуль вследствие статистической независимости переменных α и ε , соотношение (14.106) приводится к виду

$$\begin{aligned} R_{pp}(\Delta\tau) &= \langle \alpha_{p,0}^2 \rangle \langle \cos^2 \varepsilon_0 \rangle + \\ &+ 4 \sum_{n=1}^{N/2} \langle \alpha_{p,n}^2 \rangle \langle \cos (\omega_n \tau - \varepsilon_n) \cos (\omega_n (\tau + \Delta\tau) - \varepsilon_n) \rangle. \end{aligned} \quad (14.107)$$

Используя распределение (14.99), получаем

$$\langle \alpha_{p,n}^2 \rangle = \int_0^\infty \alpha_{p,n}^2 \frac{\alpha_{p,n}}{\langle \alpha_n^2 \rangle} (e^{-\alpha_{p,n}^2 / \langle \alpha_n^2 \rangle}) d\alpha_{p,n} = 2\langle \alpha_n^2 \rangle, \quad (14.108)$$

$$\langle \cos^2 \varepsilon_0 \rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varepsilon_0 \frac{d\varepsilon_0}{2\pi} = \frac{1}{2} \quad (14.109)$$

и

$$\begin{aligned} \langle \cos (\omega_n \tau - \varepsilon_n) \cos (\omega_n (\tau + \Delta\tau) - \varepsilon_n) \rangle &= \\ = \frac{1}{2} \langle \cos [\omega_n 2(\tau + \Delta\tau) - 2\varepsilon_n] \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos (\omega_n \Delta\tau) \rangle &= \\ = \frac{1}{2} \cos (\omega_n \Delta\tau). \end{aligned} \quad (14.110)$$

Чтобы убедиться, что с помощью рассматриваемых статистических распределений можно правильно моделировать автокорреляционную функцию, вычислим ее, используя соотношение

$$R_{yy}(\Delta\tau) = \langle \alpha_0^2 \rangle + 4 \sum_{n=1}^{N/2} \langle \alpha_n^2 \rangle \cos (\omega_n \Delta\tau). \quad (14.111)$$

Учитывая выражения (14.94) и (14.95), получаем

$$\begin{aligned} R_{yy}(\Delta\tau) &= \frac{1}{2\pi} \phi(0) \Delta\omega + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N/2} \phi(\omega_n) \cos (\omega_n \Delta\tau) \Delta\omega = \\ &= \lim_{\substack{\Delta\omega \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) \cos (\omega \Delta\tau) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\omega) e^{-i\omega \Delta\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (14.112)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае автокорреляционная функция выходного сигнала имеет заданный спектр мощности.

14.6. НЕГАУССОВСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В некоторых случаях необходимо получить сигнал с негауссовским распределением вероятностей. Для этого сначала нужно сформировать гауссовский сигнал и затем преобразовать его в сигнал с требуемым негауссовским распределением. Гауссовский сигнал $w(t)$ с заданным спектром подвергается соответствующему нелинейному преобразованию без эффектов запаздывания, в результате чего получается сигнал γ , имеющий желаемую плотность вероятностей p_γ . Это преобразование можно записать в виде $\gamma = g(w)$. Можно установить связь между функциями распределения сигналов γ и w , используя известное соотношение

$$\int_{g(-\infty)}^{g(w)} p_\gamma d\gamma = \int_{-\infty}^w p_w dw. \quad (14.113)$$

Спектр мощности генерируемого сигнала $\phi_{ww}(\omega)$ должен быть таким, чтобы при нелинейном преобразовании $\gamma = g(w)$ получался требуемый спектр мощности $\phi_{\gamma\gamma}(\omega)$.

Автокорреляционная функция генерируемого сигнала w выражается через автокорреляционную функцию нужного нам сигнала γ следующим образом.

Автокорреляционная функция генерируемого сигнала. Автокорреляционную функцию сигнала γ можно записать в виде [5]

$$R_{\gamma\gamma} = \langle \gamma_1(t_1) \gamma_2(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(w_1) g(w_2) p_{w_1 w_2} dw_1 dw_2, \quad (14.114)$$

где $p_{w_1 w_2}$ — нормальное распределение двух переменных,

$$p_{w_1 w_2} = \frac{\exp \left[-(w_1^2 - 2\rho_{ww} w_1 w_2 + w_2^2) / 2\sigma_w^2 (1 - \rho_{ww}^2) \right]}{2\pi\sigma_w^2 (1 - \rho_{ww}^2)^{1/2}}. \quad (14.115)$$

Здесь ρ_{ww} — нормированная автокорреляционная функция, равная R_{ww}/σ_w^2 , а σ_w^2 — дисперсия.

В работе [5] было показано, что $R_{\gamma\gamma}$ может быть записана в виде алгебраической функции переменной ρ_{ww} . Следовательно, если плотность вероятности гауссовского сигнала p_w и преобразование $\gamma = g(w)$ известны, то в результате нелинейного преобразования входного сигнала с автокорреляционной функцией ρ_{ww} будет получена требуемая автокорреляционная функция $R_{\gamma\gamma}$.

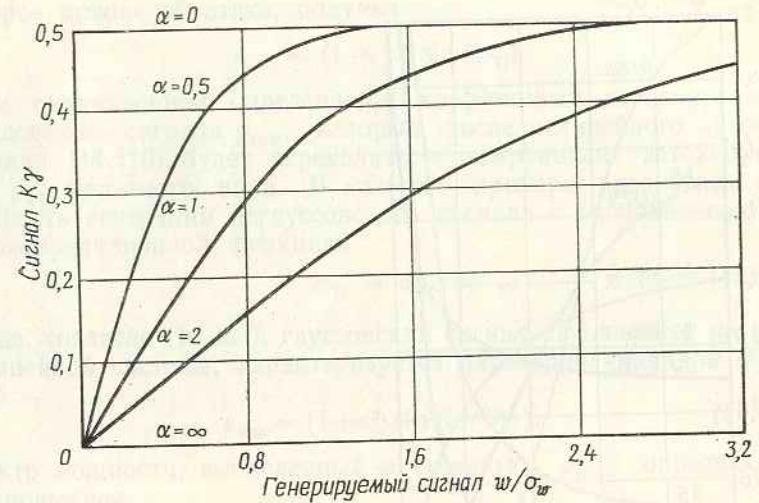


Рис. 14.4. Нелинейное преобразование генерируемого сигнала w в сигнал γ . Кривые антисимметричны относительно значения $w = 0$.

В работе [6] приводится простой метод вычисления ρ_{ww} для случая, когда нелинейное преобразование $\gamma = g(w)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma = g(w) &= \frac{1}{K\sigma_w^\alpha (2\pi)^{1/2}} \int_0^w e^{-u^2/2\sigma_w^2} du = \\ &= \frac{1}{K(\pi)^{1/2}} \int_0^{w/(2)^{1/2}\sigma_w^\alpha} e^{-\eta^2} d\eta. \end{aligned} \quad (14.116)$$

Здесь K и α — подгоночные параметры, с помощью которых можно аппроксимировать широкий класс соотношений γ с w .

Зависимости γ от w , определяемые преобразованием (14.116), приведены на рис. 14.4. Допустимы все значения w , однако значения γ ограничены интервалом $\pm 0,5/K$. Следовательно, параметр K ограничивает максимальную амплитуду сигнала γ . При $\alpha = 0$ все значения w преобразуются в значения $\pm 0,5/K$, так что сигнал γ имеет форму прямоугольной волны. При больших α из (14.116) следует, что $K\gamma \rightarrow w/(2\pi)^{1/2}\alpha\sigma_w$, т. е. $\gamma \sim w$.

Используя соотношения (14.113) и (14.116), плотность вероятности распределения переменной γ можно представить в виде

$$p_\gamma / K = \alpha e^{-w^2(1-\alpha^2)/2\sigma_w^2}. \quad (14.117)$$

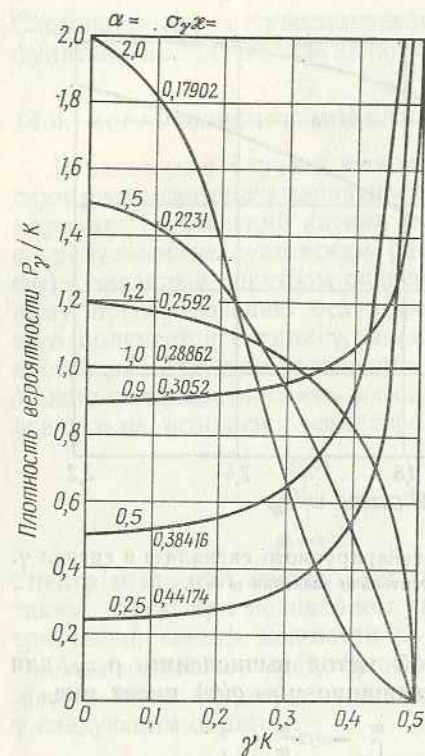


Рис. 14.5. Влияние параметра α и стандартного отклонения $\sigma_\gamma K$ на плотность вероятности сигнала γ .

Чтобы вычислить p_γ/K , используя равенство (14.117), нужно предварительно по заданному γ определить значение w из (14.116) и подставить его в (14.117). Зависимость p_γ/K от γK показана на рис. 14.5. Видно, что, варьируя параметры α и K , можно получить существенно различные плотности вероятности p_γ . Подставляя $\gamma = g(w)$ вида (14.116) в формулу (14.114), можно показать [6], что

$$R_{\gamma\gamma} = \frac{1}{2\pi K^2} \arcsin \left(\frac{\rho_{ww}}{1+\alpha^2} \right). \quad (14.118)$$

Полагая здесь $\tau = 0$, имеем

$$R_{\gamma\gamma}(\tau = 0) = \frac{\zeta}{2\pi K^2},$$

где

$$\zeta = \arcsin \left(\frac{1}{1+\alpha^2} \right). \quad (14.119)$$

Теперь можно записать соотношение

$$\rho_{\gamma\gamma} = \frac{1}{\zeta} \arcsin \left(\frac{\rho_{ww}}{1+\alpha^2} \right), \quad (14.120)$$

которое можно обратить, получая

$$\rho_{ww} = (1 + \alpha^2) \sin(\zeta \rho_{\gamma\gamma}). \quad (14.121)$$

Этим соотношением определяется коэффициент автокорреляции гауссовского сигнала ρ_{ww} , который после нелинейного преобразования (14.116) будет переходить в коэффициент автокорреляции $\rho_{\gamma\gamma}$ желаемого вида. В качестве примера рассмотрим возможность генерации негауссовского сигнала с экспоненциальной автокорреляционной функцией

$$R_{\gamma\gamma} = \sigma_\gamma^2 e^{-\gamma|\tau|}. \quad (14.122)$$

Тогда, согласно (14.121), гауссовский сигнал, подаваемый на вход нелинейной системы, характеризуется автокорреляционной функцией

$$\rho_{ww} = (1 + \alpha^2) \sin(\zeta e^{-\lambda|\tau|}). \quad (14.123)$$

Спектр мощности, вычисленный с помощью ρ_{ww} , определяется соотношением

$$\begin{aligned} \phi_{ww} &= (1 + \alpha^2) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\zeta e^{-\lambda|\tau|}) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= (1 + \alpha^2) \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\zeta^n}{n!} \frac{(-1)^{(n+3)/2} (2\lambda)^n}{[(n\lambda)^2 + \omega^2]}. \end{aligned} \quad (14.124)$$

Следовательно, для генерации негауссовского сигнала с плотностью вероятности в виде одной из кривых, показанных на рис. 14.5, и с экспоненциальной автокорреляционной функцией вида (14.122) нужно сначала создать гауссовский сигнал со спектром мощности вида (14.124) и затем преобразовать его, используя соотношение (14.116). Более подробное изложение этого метода дается в работе [5].

14.7. МНОГОМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Большую часть результатов, изложенных выше, можно распространить на многомерные задачи. Как и ранее, можно ввести двумерное преобразование Фурье

$$\eta(\chi, \psi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\eta}(x_\chi, x_\psi) e^{i(x_\chi \chi + x_\psi \psi)} dx_\chi dx_\psi \quad (14.125)$$

и соответствующее обратное преобразование

$$\hat{\eta}(x_\chi, x_\psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\chi, \psi) e^{-i(x_\chi \chi + x_\psi \psi)} d\chi d\psi. \quad (14.126)$$

Как и ранее [см. (14.3)], можно записать

$$\hat{\eta}(x_\chi, x_\psi) = H(x_\chi, x_\psi) \hat{I}(x_\chi, x_\psi), \quad (14.127)$$

где

$$\eta(x_\chi, x_\psi) = FT^{-2} [\hat{\eta}(x_\chi, x_\psi)], \quad (14.128)$$

I — двумерный гауссовский сигнал типа белого шума, а FT^{-2} — двумерное обратное преобразование Фурье. В этом случае H является передаточной функцией двумерной системы. Спектр мощности можно вычислить, используя соотношение

$$\begin{aligned} \langle \hat{\eta}(x_\chi, x_\psi) \hat{\eta}^*(x_\chi, x_\psi) \rangle = \\ = H(x_\chi, x_\psi) H^*(x_\chi, x_\psi) \langle \hat{I}(x_\chi, x_\psi) \hat{I}^*(x_\chi, x_\psi) \rangle, \end{aligned} \quad (14.129)$$

из которого следует

$$\phi(x_\chi, x_\psi) = H(x_\chi, x_\psi) H^*(x_\chi, x_\psi) \phi_I(x_\chi, x_\psi), \quad (14.130)$$

где ϕ — двумерный спектр мощности. Так как входной сигнал является двумерным гауссовским белым шумом с единичным спектром мощности, последнее соотношение принимает вид

$$\phi(x_\chi, x_\psi) = H(x_\chi, x_\psi) H^*(x_\chi, x_\psi). \quad (14.131)$$

Как и выше [см. (14.56)], запишем

$$H(x_\chi, x_\psi) = A(x_\chi, x_\psi) e^{i\theta(x_\chi, x_\psi)}. \quad (14.132)$$

Полагая фазу θ равной нулю, имеем

$$H(x_\chi, x_\psi) = A(x_\chi, x_\psi) = [\phi(x_\chi, x_\psi)]^{1/2}, \quad (14.133)$$

так как функции H и H^* совпадают в случае $\theta = 0$. Тогда для выходного сигнала y можно записать

$$\hat{y}(x_\chi, x_\psi) = [\phi(x_\chi, x_\psi)]^{1/2} \hat{I}(x_\chi, x_\psi). \quad (14.134)$$

Импульсную переходную функцию h можно представить в виде

$$h(\chi, \psi) = FT^{-2} \{ [\phi(x_\chi, x_\psi)]^{1/2} \}. \quad (14.135)$$

Следовательно, выходной сигнал определяется выражением

$$y(\chi, \psi) = FT^{-2} [\hat{y}(x_\chi, x_\psi)] = h(\chi, \psi) * I(\chi, \psi), \quad (14.136)$$

где $*$ обозначает свертку функций, или

$$y(\chi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\chi', \psi') I(\chi - \chi', \psi - \psi') d\chi' d\psi'. \quad (14.137)$$

Этот результат аналогичен соответствующему выражению для одномерного случая [см. равенство (14.60)]; кроме того, в двумерном случае могут использоваться другие соотношения и решения, аналогичные соответствующим результатам для одномерного случая. Следовательно, можно получить двумерный фильтр, позволяющий преобразовать входной сигнал типа двумерного гауссовского белого шума в двумерный сигнал y с заданным двумерным спектром мощности.

14.8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕОДНОРОДНОЙ АТМОСФЕРЫ

В качестве примера применения концепций, изложенных в предыдущих разделах, рассмотрим проблему моделирования турбулентности в пограничном слое неоднородной атмосферы. Для моделирования атмосферной турбулентности использовалось несколько методов [7]. Большинство этих методов основывается на гипотезе Драйдена об эйлеровой спектральной плотности турбулентных флуктуаций скорости [8] и на гипотезе Тейлора о замороженной турбулентности [9]. Основным недостатком существующих методов моделирования турбулентности в пограничном слое атмосферы является то, что они не позволяют учитывать статистическую неоднородность турбулентности по вертикали в пограничном слое атмосферы. Именно вследствие этой неоднородности, действующей на самолет на взлетно-посадочных режимах, турбулентность проявляется как нестационарный процесс. Ниже описывается общий метод моделирования случайных процессов, подобных атмосферной турбулентности, которые являются статистически однородными вдоль горизонтали и неоднородными вдоль вертикали. Этот метод является общим в том смысле, что его можно применить к широкому классу сходных задач. Подобно другим имеющимся методам, рассматриваемый метод основывается на гипотезе Драйдена (заметим, однако, что данный метод не ограничивается случаем спектральной плотности в форме, предложенной Драйденом, и может применяться к любым спектральным плотностям подходящего вида) и на гипотезе Тейлора о замороженной турбулентности; однако мы продвигаемся еще на один шаг дальше, используя некоторые свойства автомодельности спектральной плотности Драйдена, которые позволяют определить инвариантные относительно высоты фильтры. В свою очередь эти фильтры используются для генерации статистически однородных вдоль вертикали случайных процессов, с помощью которых можно

моделировать турбулентность на любой заданной высоте в пограничном слое и, следовательно, облегчить моделирование нестационарной турбулентности вдоль любой траектории, так как отпадает необходимость генерировать полное поле турбулентных пульсаций. Тем не менее в случае необходимости можно генерировать и полное поле.

14.8.1. Постановка задачи

Рассмотрим продольную составляющую турбулентной скорости $u(x, y, z, t)$ вдоль оси x (совпадающей с направлением вектора средней скорости ветра) в системе координат, движущейся со средней скоростью ветра, и запишем разложение u в одномерный интеграл Фурье:

$$u(x, y, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x, y, z, t) e^{ixx} dx, \quad (14.138)$$

где $\hat{u}(x, y, z, t)$ — преобразование Фурье функции $u(x, y, z, t)$ при волновом числе x (рад/м). Оси y и z ортогональны оси x , причем ось z направлена вертикально вверх. Предполагается, что энергетический спектр турбулентности является достаточно гладкой функцией, так что можно не рассматривать аналогичное (14.138) разложение в интеграл Фурье—Стилтьеса. Будут моделироваться турбулентные поля в плоскости (x, z) в фиксированный момент времени; поэтому зависимость от переменных y и t далее опускается. Несмотря на то что здесь рассматривается только продольная составляющая турбулентной скорости, данный метод является достаточно общим и может применяться также к моделированию поперечной и вертикальной составляющих турбулентной скорости.

Записывая равенство (14.138) для точки (x, z) и комплексно-сопряженное равенство для точки $(x+r, z-\Delta)$, перемножая их и вычисляя среднее по ансамблю от произведения, получим следующее выражение для продольной корреляционной функции:

$$R(r, \Delta, x, z) = \langle u(x, z) u(x+r, z-\Delta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{u}(x, z) \hat{u}^*(x', z-\Delta) \rangle e^{i(x-x')x - ix'r} dx' dx. \quad (14.139)$$

Ниже мы ограничимся случаем турбулентных процессов, однородных вдоль горизонтали, так что корреляционная функция фурье-амплитуд должна иметь вид (разд. 4.2.4)

$$\langle \hat{u}(x, z) \hat{u}^*(x', z-\Delta) \rangle = \phi(x', z-\Delta, z) \delta(x' - x), \quad (14.140)$$

где $\delta(x' - x)$ — дельта-функция Дирака, а $\phi(x', z-\Delta, z)$ —

спектральная плотность, являющаяся функцией двух высот. Комбинируя равенства (14.139) и (14.140), для однородной вдоль горизонтали корреляционной функции получим выражение

$$R(r, z-\Delta, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, z-\Delta, z) e^{-ixr} dx. \quad (14.141)$$

Теперь представим спектральную плотность $\phi(x, z-\Delta, z)$, зависящую от двух высот, через безразмерные функцию когерентности и фазу, а именно

$$\text{coh}(x, z-\Delta, z) = \frac{\phi(x, z-\Delta, z) \phi^*(x, z-\Delta, z)}{\phi(x, z, z) \phi(x, z-\Delta, z-\Delta)}, \quad (14.142)$$

$$\theta(x, z-\Delta, z) = \text{arctg} \left\{ -\frac{\text{Im}[\phi(x, z-\Delta, z)]}{\text{Re}[\phi(x, z-\Delta, z)]} \right\}, \quad (14.143)$$

так что

$$\phi(x, z-\Delta, z) = [\phi(x, z, z) \phi(x, z-\Delta, z-\Delta) \text{coh}(x, z-\Delta, z)]^{1/2} e^{i\theta(x, z-\Delta, z)}, \quad (14.144)$$

где $\phi(x, z, z)$ — спектральная плотность мощности. Таким образом, задание функций $\phi(x, z, z)$, $\text{coh}(x, z-\Delta, z)$ и $\theta(x, z-\Delta, z)$ полностью эквивалентно заданию функции $\phi(x, z-\Delta, z)$ и, вследствие равенства (14.141), вторых статистических моментов скорости $u(x, z)$. Ниже мы будем искать такой фильтр, который преобразует входной белый шум в выходной сигнал $v(x, z)$, обладающий одинаковыми статистическими моментами с реальным процессом $u(x, z)$. В дальнейшем изложении при синтезе такого фильтра будут использоваться функции $\phi(x, z, z)$, $\text{coh}(x, z-\Delta, z)$ и $\theta(x, z-\Delta, z)$.

14.8.2. Синтез фильтра

Разложение случайного поля $v(x, z)$ в одномерный интеграл Фурье дается выражением

$$v(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{v}(x, z) e^{ixx} dx. \quad (14.145)$$

Рассмотрим сначала n независимых однородных вдоль горизонтали процессов типа гауссовского белого шума $I_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Обозначим преобразование Фурье k -го шума через $I_k(x)$. Пропустим k -й шум через фильтр с передаточной функцией $H_k(x, z)$ и построим составной процесс $v_c(x, z)$ (рис. 14.6). Чтобы получить желаемый процесс $v(x, z)$, пропустим составной процесс через линейный фильтр с передаточной функцией $AH(x, z)$; тогда для пре-

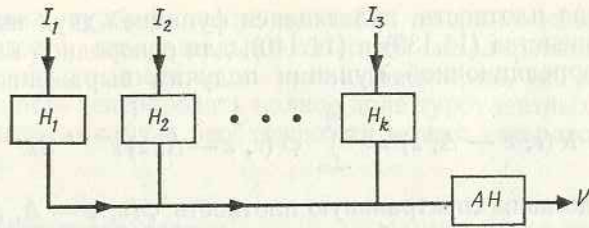


Рис. 14.6. Модельная система.

образования Фурье имеем

$$\begin{aligned} \hat{v}(x, z) &= AH(x, z) \hat{v}_c(x, z) = \\ &= AH(x, z) \sum_{k=1}^n H_k(x, z) \hat{I}_k(x), \end{aligned} \quad (14.146)$$

где A — множитель, который будет определен позднее. Умножая (14.146) на комплексно-сопряженное равенство, соответствующее значениям независимых переменных x' и $z - \Delta$, и осредняя полученное соотношение по ансамблю, получим

$$\begin{aligned} \langle \hat{v}(x, z) \hat{v}^*(x', z - \Delta) \rangle &= |A|^2 H(x, z) H^*(x', z - \Delta) \times \\ &\times \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \langle \hat{I}_k(x) \hat{I}_m^*(x') \rangle H_k(x, z) H_m^*(x', z - \Delta). \end{aligned} \quad (14.147)$$

Вследствие того что шумы являются статистически независимыми процессами и характеризуются единичной спектральной плотностью, их преобразования Фурье взаимно ортогональны:

$$\langle \hat{I}_k(x) \hat{I}_m^*(x') \rangle = \delta(x' - x) \delta_{km}, \quad (14.148)$$

где δ_{km} — символ Кронекера. Так как требуется, чтобы статистические моменты второго порядка процессов $v(x, z)$ и $u(x, z)$ совпадали, можно записать:

$$\langle \hat{v}(x, z) \hat{v}^*(x', z - \Delta) \rangle = \phi(x', z - \Delta, z) \delta(x' - x). \quad (14.149)$$

Следовательно, используя равенства (14.147) — (14.149), спектральную плотность процесса $u(x, z)$, зависящую от двух высот, можно выразить через передаточные функции элементов фильтра:

$$\begin{aligned} \phi(x, z - \Delta, z) &= \\ &= |A|^2 H(x, z) H^*(x, z - \Delta) \sum_{k=1}^n H_k(x, z) H_k^*(x, z - \Delta), \end{aligned} \quad (14.150)$$

или

$$\phi(x, z - \Delta, z) = |A|^2 \phi_H(x, z - \Delta, z) \phi_S(x, z - \Delta, z), \quad (14.151)$$

где

$$\phi_H(x, z - \Delta, z) = H(x, z) H^*(x, z - \Delta), \quad (14.152)$$

$$\phi_S(x, z - \Delta, z) = \sum_{k=1}^n H_k(x, z) H_k^*(x, z - \Delta). \quad (14.153)$$

14.8.3. Соответствие функций когерентности

Теперь определим вид функций $H_k(x, z)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Подставляя равенство (14.150) в (14.142), получим спектральное представление для функции когерентности в виде

$$\text{coh}(x, z - \Delta, z) = \frac{\phi_S(x, z - \Delta, z) \phi_S^*(x, z - \Delta, z)}{\phi_S(x, z, z) \phi_S^*(x, z - \Delta, z - \Delta)}, \quad (14.154)$$

или

$$\begin{aligned} \text{coh}(x, z - \Delta, z) &= \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n H_k(x, z) H_k^*(x, z - \Delta) \sum_{m=1}^n H_m^*(x, z) H_m(x, z - \Delta)}{\sum_{k=1}^n H_k(x, z) H_k^*(x, z) \sum_{m=1}^n H_m^*(x, z - \Delta) H_m(x, z - \Delta)}. \end{aligned} \quad (14.155)$$

Как и следовало ожидать, когерентность не зависит от функции $\phi_H(x, z - \Delta, z)$, так что вид функции $H(x, z)$ можно определить позднее, рассматривая вопрос о моделировании спектральной плотности в горизонтальной плоскости и фазы. Следовательно, можно добиться, чтобы функция когерентности процесса $u(x, z)$ совпала с функцией когерентности модельного процесса $v(x, z)$, подбирая соответствующим образом функции $H_k(x, z)$.

Ограничимся теперь классом процессов, функции когерентности которых зависят только от разности высот Δ и не зависят от высоты z , на том основании, что функции когерентности для турбулентности в приземном слое ($z \leq 150$ м), по-видимому, удовлетворяют этому условию. Позднее мы еще вернемся к этому вопросу.

При формулировании метода синтеза произвольной функции когерентности $\text{coh}(x, \Delta)$ можно предположить, что передаточная функция $H_k(x, z)$ соответствует чистому сдвигу, т. е.

$$H_k(x, z) = C_k e^{-ixz d_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (14.156)$$

Тогда, согласно (14.153), имеем

$$\phi_S(x, \Delta) = \sum_{k=1}^n C_k^2 e^{-ix \Delta d_k}, \quad (14.157)$$

или

$$\begin{aligned} \text{coh}(x, \Delta) = & \frac{\left\{ \sum_{k=1}^n b_k^2 + 2 \sum_{m=2}^n \sum_{k=1}^{m-1} b_k b_m \cos[(d_m - d_k)x\Delta] \right\}}{\left(\sum_{k=1}^n b_k \right)^2}, \quad (14.158) \end{aligned}$$

где

$$b_k = C_k^2. \quad (14.159)$$

Исследование функции когерентности (14.158), которая является суммой конечного числа косинусоидальных функций, показывает, что коэффициенты b_k и d_k можно определить, разлагая функцию когерентности в ряд Фурье по четным функциям в интервале $-\varepsilon_0 \leq x\Delta \leq \varepsilon_0$, где ε_0 — максимальное значение параметра $x\Delta$, рассматриваемое при моделировании. Приравняв коэффициенты и аргументы тригонометрических функций в этом разложении соответствующим величинам в равенстве (14.158), найдем значения коэффициентов b_k и d_k . Запишем разложение функции когерентности в ряд Фурье:

$$\text{coh}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cos(j\pi\xi), \quad (14.160)$$

где

$$\xi = x\Delta/\varepsilon_0, \quad (14.161)$$

$$A_j = \int_{-1}^1 \text{coh}(\xi) \cos(j\pi\xi) d\xi. \quad (14.162)$$

Положим теперь

$$d_k = \frac{\pi(k-1)}{\varepsilon_0} + \beta, \quad (14.163)$$

где β — постоянная, значение которой будет определяться при анализе моделирования фазы θ . Подставляя (14.163) в (14.158) и сравнивая почленно полученное выражение с первыми n членами разложения (14.160), имеем

$$A_0 = \left[1 + \sum_{k=2}^n \frac{b_k}{b_1} \right]^{-2} \left[1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{b_k}{b_1} \right)^2 \right], \quad (14.164)$$

$$A_j = 2 \left[1 + \sum_{k=2}^n \frac{b_k}{b_1} \right]^{-2} \left[\frac{b_{1+j}}{b_1} + \sum_{k=2}^{n-j} \frac{b_k b_{k+j}}{b_1^2} \right], \quad (14.165)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1.$$

В результате получается n уравнений с $n-1$ неизвестными b_k/b_1 , $k = 2, \dots, n$. Без потери общности произвольный параметр b_1 можно положить равным единице. Имеется несколько методов определения остальных коэффициентов b_k . Можно использовать прямой метод, заключающийся в решении первых $n-1$ уравнений для величин b_k , $k = 2, \dots, n$. Недостаток этого метода заключается в том, что при $n \geq 4$ алгебраические операции, используемые для решения указанных уравнений, чрезвычайно усложняются. Второй метод заключается в определении совокупности значений b_k , $k = 2, \dots, n$, удовлетворяющих n уравнениям (14.164) и (14.165) при дополнительном условии, что положительно определенная функция

$$J = \sum_{j=0}^{n-1} (A_j - A'_j)^2 \quad (14.166)$$

принимает минимальное значение. Здесь A_j — коэффициенты ряда Фурье (14.160), а A'_j — правые части уравнений (14.164) и (14.165). Процедура минимизации заключается в следующем. Сначала задаются некоторые начальные значения коэффициентов b_k и вычисляется значение J . Затем начальное значение коэффициента b_i изменяется и вычисляется новое значение J . Величина коэффициента b_i варьируется до тех пор, пока не будет получено минимальное значение J . Затем этот процесс повторяется со следующим коэффициентом b и т. д. до тех пор, пока не будет достигнут абсолютный минимум функции J .

14.8.4. Соответствие спектров мощности

Ниже определяется вид той части функции $H(x, z)$, которая позволяет получить желаемый спектр мощности $\phi(x, z, z)$ сигнала $v(x, z)$ моделирующего турбулентность. Полагая $\Delta = 0$ в равенстве (14.151), имеем

$$\phi(x, z, z) = |A|^2 \phi_H(x, z, z) \phi_S(x, z, z) = |H(x, z)|^2, \quad (14.167)$$

где множитель A выбирается таким, чтобы выполнялось условие

$$|A|^2 = |\phi_S(x, z, z)|^{-1} = \left[\sum_{k=1}^n C_k^2 \right]^{-1}. \quad (14.168)$$

Из уравнения (14.167) можно определить вид функции $H(x, z)$

только с точностью до произвольной фазы. Так, например, если $\phi(x, z, z)$ — мероморфная функция, то можно записать

$$\phi(x, z, z) = B^2 \left[\frac{(1 + i\alpha_0 x)(1 - i\alpha_0 x) \dots (1 + i\alpha_\lambda x)(1 - i\alpha_\lambda x)}{(1 + i\beta_0 x)(1 - i\beta_0 x) \dots (1 + i\beta_\nu x)(1 - i\beta_\nu x)} \right], \quad (14.169)$$

где λ может не совпадать с ν , а B — действительная положительная постоянная. С учетом (14.169) имеем

$$H(x, z) = H_p(x, z) H_\gamma(x, z), \quad (14.170)$$

где

$$H_p(x, z) = \frac{(1 + i\alpha_0 x) \dots (1 + i\alpha_\lambda x)}{(1 + i\beta_0 x) \dots (1 + i\beta_\nu x)} \quad (14.171)$$

и

$$H_\gamma(x, z) = e^{-i\theta_\gamma(x, z)}. \quad (14.172)$$

Зависящая от z и x функция θ_γ определяется из условий, налагаемых на перекрестную спектральную плотность фазы θ . Соответствующим подбором постоянных α и β можно добиться, чтобы спектры мощности процессов $v(x, z)$ и $u(x, z)$ были одинаковыми. Ниже будет дан пример определения этих постоянных.

14.8.5. Соответствие фаз

Здесь мы покажем, как можно моделировать экспериментальные данные о фазах турбулентных пульсаций [см. равенство (14.143)] с помощью фильтра. Используя полярную форму записи комплексных величин H_p , H_γ и ϕ_s с помощью множителя $e^{-i\theta}$, а также равенства (14.144), (14.151) и (14.170), получаем

$$\begin{aligned} & [\phi(x, z, z) \phi(x, z - \Delta, z - \Delta) \coth(x, z - \Delta, z)]^{1/2} \times \\ & \times e^{-i\theta(x, z - \Delta, z)} = |H_p(x, z)| e^{-i\theta_p(x, z)} |H_\gamma(x, z)| e^{-i\theta_\gamma(x, z)} \times \\ & \times |H_p^*(x, z - \Delta)| e^{i\theta_p(x, z - \Delta)} |H_\gamma^*(x, z - \Delta)| e^{i\theta_\gamma(x, z - \Delta)} |\phi_s(x, \Delta)| \times \\ & \times e^{-i\theta_s(x, \Delta)}. \end{aligned}$$

Приравняв показатели экспонент, имеем

$$\begin{aligned} \theta(x, \Delta, z) &= \theta_\gamma(x, z) - \theta_\gamma(x, z - \Delta) + \theta_p(x, z) - \\ & - \theta_p(x, z - \Delta) + \theta_s(x, \Delta). \end{aligned} \quad (14.173)$$

Функция θ_s определяется формулой

$$\theta_s(x, \Delta) = \arctg \left\{ \frac{\left[\sum_{k=1}^n b_k \sin \left(\frac{x\Delta}{\varepsilon_0} \pi(k-1) + \Sigma \right) \right]}{\left[\sum_{k=1}^n b_k \cos \left(\frac{x\Delta}{\varepsilon_0} \pi(k-1) + \Sigma \right) \right]} \right\}. \quad (14.174)$$

Коэффициенты b_k находятся из условия соответствия функций когерентности, а θ_p является известной функцией переменных x и z [равенство (14.171)]. Функция $\theta(x, z - \Delta, z)$ определяется по данным измерений, а величину Σ и функцию $\theta_\gamma(x, z)$ можно выбрать из условия соответствия фаз (14.173). Теперь, когда мы изложили основы теории, перейдем к рассмотрению некоторых примеров. Однако для этого потребуется некоторая информация о характеристиках турбулентности, которая приводится ниже.

14.8.6. Статистические характеристики турбулентных порывов

Чтобы можно было использовать метод моделирования, изложенный в предыдущих разделах, необходимо иметь некоторую информацию о спектральных характеристиках: продольном спектре мощности, а также функциях когерентности и фазы, соответствующих перекрестному продольному спектру, зависящему от двух высот. Далее рассматриваются эти статистические характеристики.

14.8.7. Продольный спектр мощности

Простейшим выражением для продольного спектра мощности, которое широко используется при моделировании атмосферной турбулентности, является спектр Драйдена [10]:

$$\phi(x, z, z) = \frac{\sigma^2 L}{\pi} \frac{1}{1 + (xL)^2}, \quad (14.175)$$

где σ^2 — дисперсия, равная $\langle u^2 \rangle$, а L — интегральный пространственный масштаб. Это выражение будет рассматриваться в целях иллюстрации результатов, однако для спектра мощности можно было бы использовать и любое другое выражение.

14.8.8. Стандартное отклонение и масштаб турбулентности

Как показано в работах [11] и [12], для нейтрального приземного слоя справедливы соотношения

$$\sigma = 2,5 \text{ и } \sigma_0, \quad (14.176)$$

$$L = K_1 z, \quad (14.177)$$

где $K_1 = 4,08$, а u_{*0} — значение динамической скорости на поверхности.

14.8.9. Когерентность и фаза

Исследования продольного спектра, зависящего от двух высот, и эквивалентных ему функций когерентности и фазы, определяемых соотношениями (14.142) и (14.143), начаты сравнительно недавно, и поэтому имеющиеся в настоящее время данные немногочисленны по сравнению с объемом данных по продольным спектрам мощности при совпадающих высотах. Результаты работы [13] и другие данные, относящиеся к функции когерентности и фазе, по-видимому, позволяют записать следующие соотношения для нейтрального приземного слоя:

$$\text{coh}(x, \Delta, z) = e^{-(a/2\pi)x\Delta}, \quad (14.178)$$

$$\frac{\theta(x, \Delta, z)}{x\Delta} = 1,0, \quad (14.179)$$

где $a \approx 19,0$.

14.8.10. Моделирование продольных порывов и его применение

Совместное рассмотрение теоретических результатов и эмпирической информации о статистических характеристиках продольных порывов ниже будет применяться к исследованию практических аспектов моделирования турбулентности. Мы будем использовать приближенную формулу Драйдена (14.175) для спектра мощности с параметрами σ и L , определяемыми равенствами (14.176) и (14.177), и выражения (14.178) и (14.179) для спектральных функций когерентности и фазы, зависящих от двух высот. Согласно последним соотношениям, зависящие от двух высот спектральные функции когерентности и фазы случайного процесса $v(x, z)$ определяются только через параметр $x\Delta$; следовательно, в случае нейтрально устойчивой атмосферы когерентность и фаза не зависят от переменной z . Далее мы ограничимся исследованием случая нейтрально устойчивой атмосферы.

14.8.11. Определение когерентности

Так как в случае нейтрально устойчивой атмосферы параметры x и Δ появляются только в виде произведения, ясно, что соотношение (14.178) можно записать в форме закона подобия (14.160).

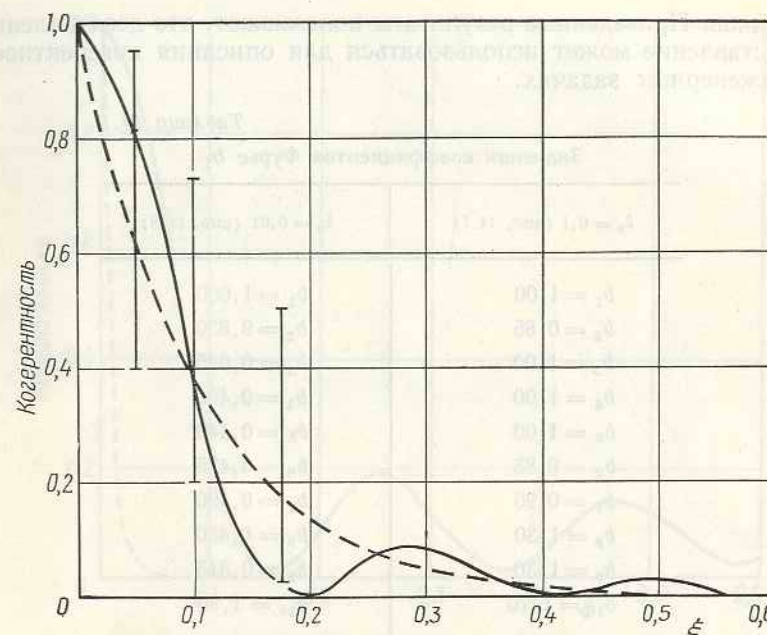


Рис. 14.7. Зависимость от ξ функций когерентности, вычисленных по экспериментальным данным и результатам моделирования (при $\xi_0 = 0,1$).

— — — экспериментальная функция когерентности; — модельная функция когерентности. Отрезками вертикальных прямых с засечками обозначены границы достоверности экспериментальных данных.

Выражая в соотношении (14.178) $x\Delta$ через зависимую переменную ξ [см. (14.161)], получаем

$$\text{coh}(\xi) = e^{-\xi/\xi_0}, \quad (14.180)$$

где

$$\xi_0 = 2\pi/a\xi_0. \quad (14.181)$$

Подставляя (14.180) в (14.162), имеем

$$A_j = \frac{2\xi_0[e^{-1/\xi_0}(-1)^{j+1} + 1]}{1 + (j\pi\xi_0)^2}. \quad (14.182)$$

На рис. 14.7 приведен пример функции когерентности модельной системы с $\xi_0 = 0,1$. В этом частном примере в фурье-разложении сохранено десять первых членов. В табл. 14.1 приведены значения коэффициентов b_k ($k = 1, 2, \dots, 10$), вычисленные по коэффициентам A_j , определяемым формулой (14.182). На этом рисунке приведены также типичные границы зоны 95%-ной достоверности экспериментальных данных по когерентности, заимствованных из ряда ис-

точников. Приведенные результаты показывают, что десятичленное представление может использоваться для описания когерентности в инженерных задачах.

Таблица 14.1

Значения коэффициентов Фурье b_i

$\xi_0 = 0,1$ (рис. 14.7)	$\xi_0 = 0,01$ (рис. 14.8)
$b_1 = 1,00$	$b_1 = 1,000$
$b_2 = 0,85$	$b_2 = 0,830$
$b_3 = 1,00$	$b_3 = 0,645$
$b_4 = 1,00$	$b_4 = 0,496$
$b_5 = 1,00$	$b_5 = 0,440$
$b_6 = 0,85$	$b_6 = 0,475$
$b_7 = 0,90$	$b_7 = 0,490$
$b_8 = 1,30$	$b_8 = 0,450$
$b_9 = 1,30$	$b_9 = 0,315$
$b_{10} = 1,70$	$b_{10} = 1,960$

На рис. 14.8 приведен пример функции когерентности с $\xi_0 = 0,01$, при определении которой снова использовалось десять членов фурье-разложения. В этом случае когерентность неудовлетворительно описывается моделью. Чтобы устранить этот недостаток, требуется увеличить в 5—10 раз число членов (случайных шумов) в фурье-разложении функции когерентности. Однако, так как когерентность близка к нулю почти при всех значениях ξ , можно считать, что значения скорости на различных высотах фактически не коррелируют между собой и что для генерирования скорости на каждой высоте можно использовать статистически независимые сигналы.

14.8.12. Факторизация спектра мощности

С учетом соотношений (14.171) и (14.175) функция $H_p(x, z)$ для рассматриваемого частного случая имеет вид

$$H_p(x, z) = \sigma \left(\frac{L}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{1 + ixL}, \quad (14.183)$$

где $L = K_1 z$. Этот результат будет использоваться в следующих разделах для определения фаз и автомодельного моделирования.

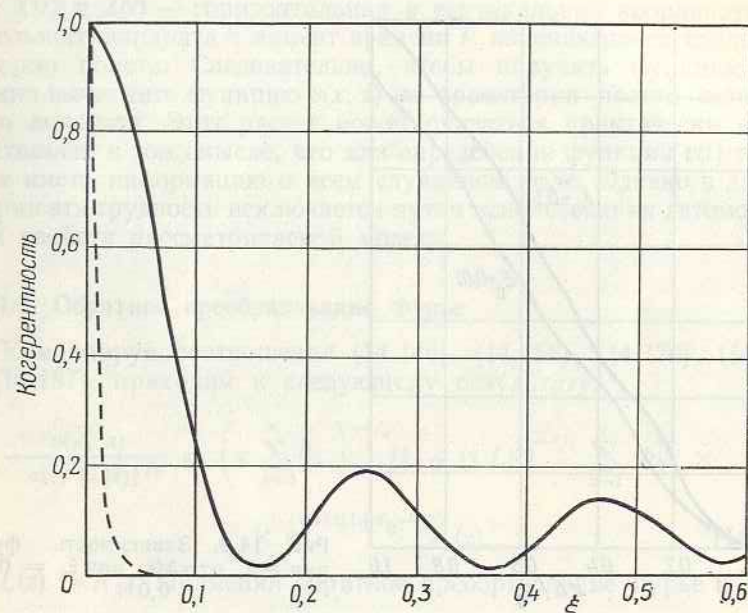


Рис. 14.8. Зависимость от ξ функций когерентности, вычисленных по экспериментальным данным и результатам моделирования (при $\xi_0 = 0,01$).
 --- экспериментальная функция когерентности; — модельная функция когерентности.

14.8.13. Определение фаз

Согласно соотношениям (14.173) и (14.179), для случая нейтральной атмосферы можно записать равенство

$$\theta(x, z) = x\Delta = \theta_p(x, z) - \theta_p(x, z - \Delta) + \theta_t(x, z) - \theta_t(x, z - \Delta) + \theta_s(x, \Delta), \quad (14.184)$$

где $\theta_s(x, \Delta)$ определяется выражением (14.174) и является известной функцией параметра $x\Delta$. Функции $\theta_p(x, \Delta)$ с $\xi_0 = 0,1$ и $0,01$ приведены на рис. 14.9. Видно, что для решения инженерных задач функцию $\theta_s(x, \Delta)$ можно аппроксимировать линейной зависимостью от $x\Delta$, т. е.

$$\theta_s(x, \Delta) = C(n, \epsilon_0) x\Delta, \quad (14.185)$$

где $C(n, \epsilon_0)$ — функция числа n случайных шумов и безразмерного граничного волнового числа ϵ_0 . Эту линейную аппроксимацию можно использовать при $3 \leq n \leq 10$ и $0,01 \leq \epsilon_0 \leq 0,1$.

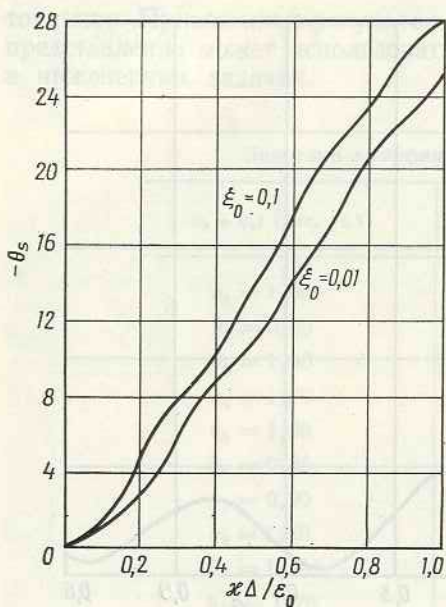


Рис. 14.9. Зависимость функции $-\theta_s$ от $x\Delta/\varepsilon_0$ при $\xi_0 = 0,1$ и $0,01$.

По определению функция $\theta_p(x, z)$ задается выражением

$$\theta_p(x, z) = \arctg(xL) = \arctg(xK_1z), \quad (14.186)$$

которое следует из (14.183).

Подставляя выражения (14.185) и (14.186) в (14.184), получим

$$\theta_p(x, z) = xz[1 - C(n, \varepsilon_0)] - \arctg(xK_1z) + G_0(x, z_r), \quad (14.187)$$

где $G_0(x, z_r)$ — произвольная функция параметра x и характерной высоты z_r . Для определенности мы полагаем эту функцию равной нулю.

14.9. АВТОМОДЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В предыдущих разделах мы определили передаточную функцию, соответствующую моделированию продольной турбулентной скорости, описываемой спектром мощности в форме Драйдена. Эта формальная математическая модель позволяет генерировать случайное поле $v(x, z)$. Такие поля рассматриваются во многих практических задачах; однако в приложениях к динамике полета самолетов или космических летательных аппаратов желательно иметь функцию вида

$$v(t) = v[X(t), Z(t)], \quad (14.188)$$

где $X(t)$ и $Z(t)$ — горизонтальная и вертикальная координаты летательного аппарата в момент времени t , изменяющиеся вдоль траектории полета. Следовательно, чтобы получить функцию $v(t)$, нужно вычислить функцию $v(x, z)$ на траектории полета летательного аппарата. Этот расчет может оказаться практически неосуществимым в том смысле, что для определения функции $v(t)$ требуется иметь информацию о всем случайном поле. Однако в данной теории эта трудность исключается путем использования автомодельных свойств рассматриваемой модели.

14.9.1. Обратное преобразование Фурье

Комбинируя соотношения (14.146), (14.156), (14.170), (14.183) и (14.187), приходим к следующему результату:

$$\frac{\hat{v}(x, z)}{\sigma(z)[L(z)]^{1/2}} = \left(\pi \sum_{k=1}^n b_k \right)^{-1/2} [1 + (xL)^2]^{-1/2} \sum_{k=1}^n b_k^{1/2} \times \\ \times e^{-ikz(1+d_k-c)} \hat{I}_k(x), \quad (14.189)$$

где $L(z) = K_1z$. Применяя обратное преобразование Фурье к функции $\hat{v}(x, z)$, получаем

$$\frac{v(x, z)}{\sigma(z)[L(z)]^{1/2}} = \left(\pi \sum_{k=1}^n b_k \right)^{-1/2} \sum_{k=1}^n b_k P_k [x - z(1 + b_k - c)], \quad (14.190)$$

где

$$P_k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{I}_k(x)}{[1 + (K_1zx)^2]^{1/2}} e^{ix\xi} dx, \quad (14.191)$$

или

$$P_k(\xi) = \frac{1}{K_1\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} K_0\left(\frac{|\xi'|}{zK_1}\right) I_k(\xi - \xi') d\xi'. \quad (14.192)$$

Здесь K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Теперь преобразуем случайный шум $I_k(x)$ из области x в область x/z и обозначим преобразованный процесс через $M_k(x/z)$, который по-прежнему является гауссовским белым шумом с единичной спектральной плотностью. Это преобразование позволяет записать уравнение (14.190) в виде

$$\frac{v(x, z)}{\sigma(z)[L(z)]^{1/2}} = \left(\pi \sum_{k=1}^n b_k \right)^{-1/2} \sum_{k=1}^n b_k P'_k \left[\frac{x}{z} - (1 + b_k - c) \right], \quad (14.193)$$

где P'_k — «универсальная» функция переменной x/z , которая определяется выражением

$$P'_k\left(\frac{x}{z}\right) = \frac{1}{K_1\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0\left(\frac{|\zeta'|}{K_1}\right) M_k\left(\frac{x}{z} - \zeta'\right) d\zeta' \quad (14.194)$$

и генерирует случайный процесс типа белого шума $M_k(\zeta)$. Рассматривая интегральную свертку этого процесса вида (14.194), вводя сдвиг переменной x/z на величину $(1 + b_k - c)$ и суммируя n таких выражений в соответствии с уравнением (14.193), получим «универсальную» случайную функцию $F(x/z)$ для случайной переменной $v(x, z)/\sigma(z)[L(z)]^{1/2}$. Короче говоря, мы преобразовали случайное поле $v(x, z)$, зависящее от двух переменных, в случайную функцию $F(x/z)$, зависящую от одной переменной; в этом смысле мы называем представление случайного ветра $v(x, z)/\sigma(z)[L(z)]^{1/2}$ с помощью функции $F(x/z)$ автомодельным моделированием.

14.9.2. Преобразование к переменной времени, характеризующей движение летательного аппарата

Как уже отмечалось, чтобы определить процесс $v(t)$ на траектории самолета или космического летательного аппарата, требуется лишь вычислить выражение (14.193), подставляя в него координаты летательного аппарата $X(t)$, $Z(t)$. В результате получаем

$$\frac{v(t)}{\sigma[Z(t)][L[Z(t)]]^{1/2}} = \left(\pi \sum_{k=1}^n b_k\right)^{-1/2} \sum_{k=1}^n b_k P'_k\left[\frac{X(t)}{Z(t)} - (1 + b_k - c)\right]. \quad (14.195)$$

Следовательно, при таком моделировании атмосферной турбулентности сохраняется ее нестационарный характер относительно восходящей или нисходящей траектории летательного аппарата и отпадает необходимость определения полного двумерного поля скоростей.

14.10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование нестационарной турбулентности и, в частности, свойства автомодельности можно считать новым эффективным методом решения этой старой проблемы. Хотя в данном изложении рассматривались случайные поля, характеризующие атмосферную турбулентность, мы полагаем, что представленный метод является достаточно общим и его можно применить к другим двумерным полям. Может оказаться, что эти поля не обладают свойством автомодельности; тем не менее к ним можно применить математические построения, предшествующие введению автомодельности.

Предлагаемый здесь метод может использоваться для решения практических задач. Данная модель не сложнее тех методов, которые используются в настоящее время при моделировании случайных процессов и в которых сопоставляются только характеристики спектров мощности атмосферной турбулентности.

Анализ указывает на недостаток эмпирической информации об атмосферной турбулентности. Результаты моделирования окажутся более надежными лишь в том случае, если будут проведены более точные измерения спектров мощности, когерентности и фазы. Из этих трех характеристик турбулентности последние две требуют дальнейшего исследования.

В этой главе была сделана попытка дать единое описание методов моделирования и проиллюстрировать широкие возможности этих методов. Чтобы усовершенствовать предложенный метод и более полно использовать его возможности, необходимо провести дополнительные исследования, относящиеся к характеристикам турбулентности, в частности метеорологической.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

a_{ij}, A_{ij}	— коэффициенты;
B, D	— постоянные;
C_n	— коэффициенты;
$\text{coh}(\)$	— функция когерентности;
d_i, e_i, D_i	— коэффициенты;
$f(\)$	— плотность вероятности;
f	— частота;
FT	— преобразование Фурье;
$h(t)$	— импульсная переходная функция;
$H(\omega)$	— передаточная функция;
$I(t)$	— случайный (гауссовский) белый шум;
k, l, m, n, r	— целые числа;
L_v	— масштаб длины;
M_k	— преобразование функции I_k ;
N	— число дискретных значений в выборке;
Pr	— вероятность;
r	— расстояние между точками вдоль оси x ;
R	— автокорреляционная функция;
$s = i\omega$	— среднеквадратическая функция [формула (14.53)];
S_y	— временной интервал;
T	— время;
t	— продольная составляющая скорости;
u	— случайное поле;
$v(t)$	— скорость;
V	— скорость;

$\hat{w}(t)$	— гауссовский сигнал;
w	— фурье-спектр;
x, y, z	— прямоугольные координаты;
X_i	— переменная состояния;
$y(t)$	— выходной сигнал;
z	— высота;
$() * ()$	— интегральная свертка функций;
$\langle \rangle$	— среднее по ансамблю;
$\hat{(\)}$	— преобразование Фурье функции;
$()^*$	— сопряженная функция;
α_i	— коэффициент;
β	— постоянная;
$\gamma = g(w)$	— негауссовский сигнал;
δ	— дельта-функция Дирака;
Δ	— расстояние между точками вдоль оси z ;
ε	— угол, определяемый формулами (14.96);
Λ	— функция, определяемая формулой (14.24);
θ	— фаза;
ρ	— случайный сигнал;
$\eta(t)$	— случайная переменная;
λ	— постоянная;
τ	— временной интервал;
ϕ	— спектр мощности;
σ	— стандартное отклонение;
ω	— угловая частота;
ξ	— переменная, определяемая формулой (14.161);
ζ	— безразмерная высота;
$'$	— обозначение дискретной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kendall M. G., Buckland W. R. (eds.), Dictionary of Statistical Terms, third edition, Hafner Press, New York, 1971.
2. Perlmutter M., Simulation of random wind fluctuations, NASA report № CR-120561, 1974.
3. Perlmutter M., Stochastic simulation of ocean waves for SRB simulation, Northrop Services Inc., report № TR230-1446, 1975.
4. Perlmutter M., Randomly fluctuating flow in a channel due to randomly fluctuating pressure gradients, NASA report № TND 6213, 1971.
5. Perlmutter M., Effect of randomly fluctuating pressure gradients, with arbitrary specified power spectrum and probability density on flow in channels; The Symposium on Turbulence in Liquids, University of Missouri at Rolla, Missouri, 1971.
6. Gujar U. G., Kavanagh R. J., Generation of random signals with specified probability density functions and power density spectra, *IEEE Trans. Autom. Control*, AC-13 (1968).
7. Reeves P. M., A Non-Gaussian turbulent simulation, report № AFFDL-TR-69-67, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1969.

8. Daniels G. E. (ed.), Terrestrial environment (climatic) criteria guidelines for use in space shuttle vehicle development, NASA report № TM-X-64589, (1971).
9. Lumley J. L., Panofsky H. A., The Structure of Atmospheric Turbulence, Interscience Publishers, New York, 1964. [Имеется перевод: Ламли Дж. Л., Пановский Г. А., Структура атмосферной турбулентности. — М.: Мир, 1966.]
10. Chalk C. R., et al., Background information and user guide for MIL-F-8785B (ASG), Military Specification — Flying qualities of piloted airplanes, report № AFFDL-TR-69-72, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1969.
11. Panofsky H. A., Pielke R. A., Mares E. V., Properties of wind and temperature at Round — Hill South Dartmouth, Mass., report № ECOM-0335-F, U. S. Army Electronics Command, Fort Huachuca, Arizona, 1967.
12. Fichtl G. H., Mc Vehil G. E., Longitudinal and lateral spectra of turbulence in the atmospheric boundary layer at Kennedy Space Center., *J. Appl. Meteorol.*, 9, 51–63 (1970).
13. Dutton J. A. et al., Statistical properties of turbulence at the Kennedy Space Center for Aerospace Vehicle Design, NASA report № CR-1889, 1971.
14. Fichtl G. H., Perlmutter M., Nonstationary atmospheric boundary layer turbulence simulation, AIAA Seventh Fluid and Plasma Dynamics Conference, paper № 74—587, 1974.

Ветер, турбулентность и наземные сооружения

Р. ЭЛЬСТНЕР¹⁾

Мне оказана большая честь принять участие в работе такого коллектива известных ученых. Однако, поскольку все вы знаете больше меня о предмете, я чувствую себя как кошка, которая завоевала главный приз на собачьей выставке. Имея это в виду, я хотел бы изложить несколько исходных положений для нашего обсуждения проблемы. По профессии я инженер-строитель, а не физик или математик. Я строю здания, и мой интерес к ветру и турбулентности связан только с горизонтальными нагрузками, которые возникают при их воздействии на здания.

Некоторые из вас могут удивиться, услышав мнение, что строительная механика не является точной наукой. Про нее можно сказать, что она является искусством, основанным на научных принципах. Когда я был студентом, один из моих профессоров так характеризовал строительство: «Каждый может построить мост или здание, но только квалифицированный инженер может построить их экономично и с необходимым коэффициентом безопасности». Безопасность и экономичность являются противоречивыми требованиями, и инженерная деятельность является искусством нахождения разумного компромисса между ними. Обычно считают, что коэффициент безопасности выбирается исходя из возможных перегрузок. Однако он учитывает также и другие вредные факторы. Этими факторами являются ошибки при строительстве, дефекты в материалах и ограниченность инженерных знаний. Улучшение контроля качества материалов и методов строительства, применение более точных расчетных методов, особенно в связи с появлением ЭВМ, позволило существенно уменьшить величину коэффициента безопасности в сооружениях.

За последние семьдесят лет был достигнут огромный прогресс.

¹⁾ R. C. Elstner, Wiss. Janney, Elstner, and Associates, Northbrook, Illinois.

Для иллюстрации этого утверждения я хочу сравнить два здания в Чикаго: Монаднок и Сирс Тауэр. Монаднок считается первым высотным зданием в мире. Оно было сооружено в конце прошлого столетия. На нижних этажах толщина наружных стен измеряется футами, а размер окон достаточен только для того, чтобы пропустить необходимое количество света. Конструкция настолько тяжела, что опрокидывание здания под действием ветра не может быть предметом беспокойства. Стены такие толстые, а окна маленькие, что проблема турбулентности сводится лишь к проблеме правильного написания этого слова.

За семьдесят лет техника строительства значительно усовершенствовалась, особенно с окончанием второй мировой войны. Появление высокопрочных бетонов и сталей, мощного строительного оборудования и численных методов расчета позволяет уменьшить вес и оправдывает уменьшение коэффициента безопасности.

Старый, неуклюжий Монаднок-билдинг уступил место современному, экстравагантному, легкому, изящному высотному зданию, великолепным образцом которого является Сирс Тауэр.

Без сомнения, конструкция современных высотных зданий безопасна, однако теперь мы сталкиваемся с другими проблемами, которых не возникало в старых зданиях. К числу таких проблем относятся: нежелательная эластичность полов, дискомфорт, связанный с раскачиванием здания, и течи и разбитые стекла в стенах здания. Последние вопросы являются новыми в моей профессии, и они, без сомнения, связаны с ветром и турбулентностью.

Таким образом, ветер является сравнительно новым фактором для инженера-строителя, хотя в существующей литературе имеется достаточно полное обсуждение профилей ветра, коэффициентов давления, формфакторов и т. д. Методы строительства включают научный подход к расчету ветровых нагрузок на здания и быстро совершенствуются. С другой стороны, турбулентность является совершенно новым фактором, который лишь недавно стал упоминаться в литературе и который может нагнать страху на рядового инженера-строителя.

Кроме того, стекло стало важным конструктивным элементом в высотных строениях. Хотя первым материалом, который начал производить человек, было стекло, мы очень мало знаем о его строительных свойствах. В моем учебнике по строительным материалам 145 страниц посвящено стали, 221 страница — бетону, 67 страниц — дереву и ни одной страницы — стеклу.

Стоит только посмотреть на несколько современных зданий, чтобы увидеть, что стекло стало любимым материалом архитекторов. Мы увидим большие окна, изолирующие, окрашенные, отражающие стекла, многочисленные облицовочные и конструктивные стеклянные элементы. Без сомнения, использование стекла в высотных зданиях превзошло возможности существующих расчетных методов.

Я думаю, теперь вы согласитесь, что строительная механика не является точной наукой и что старые эмпирические правила при определении ветровых нагрузок на здания больше неприменимы.

Около пятнадцати лет назад мы осознали необходимость проведения испытаний в аэродинамических трубах. Здесь надо отметить очень интересный момент: как раз в это время авиация переросла аэродинамические трубы и они стали выходить из употребления. Наша фирма использует аэродинамическую трубу, принадлежащую Лафайеттскому университету. Около десяти лет тому назад я просил ректора университета не демонтировать их аэродинамическую трубу. С тех пор в этой аэродинамической трубе было испытано около пятидесяти моделей наземных сооружений.

Поскольку аэродинамические трубы были предназначены для решения задач проектирования летательных аппаратов, в них создавался однородный ламинарный поток, соответствующий условиям на высоте ~ 3000 м. Нас же интересовало воспроизведение профиля ветра и турбулентности в приземном слое атмосферы на высотах до ~ 450 м.

Несколько месяцев назад по телевидению показывали фильм о жизни братьев Райт. Я хорошо помню кадры, на которых была показана их несовершенная аэродинамическая труба и трудности, с которыми они встречались при получении ламинарного потока. В течение последующих пятидесяти лет аэродинамики непрерывно улучшали характеристики ламинарного потока, получаемого в трубах; теперь, в течение последних десяти лет, для решения строительных задач мы пытаемся заменить ламинарный поток турбулентным.

За последние годы было построено несколько аэродинамических труб специально для испытаний моделей наземных сооружений. Я упомяну аэродинамические трубы, построенные Давенпортом в университете Западного Онтарио и Чермаком в университете шт. Колорадо, а также небольшую трубу в Иллинойском технологическом институте; возможно, есть и другие, о которых я просто не знаю. То, что в этих трубах действительно создается турбулентный поток с требуемыми параметрами, нуждается в подтверждении. Однако мы пытаемся сделать на имеющихся установках все от нас зависящее.

Наша фирма испытала свою первую модель в аэродинамической трубе около десяти лет назад при разработке проекта здания Первого национального банка в Чикаго. Это было пионерское начинание, которое можно сравнить с первыми перелетами через Ла-Манш. В испытаниях измерялось только статическое давление. Порывы ветра учитывались путем умножения статического давления на коэффициент, равный 1,3. Спектр обтекания определялся с помощью шелковинок, прикрепленных к поверхности модели. Мы знали о проблемах моделирования, например о необходимости обеспе-

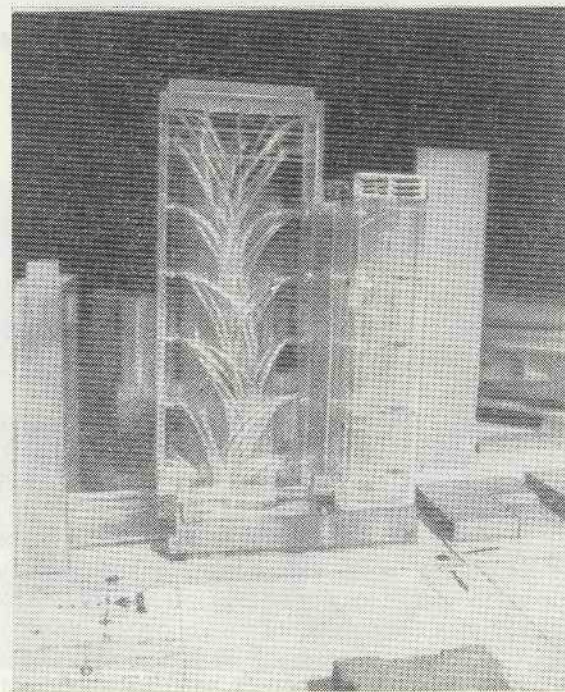
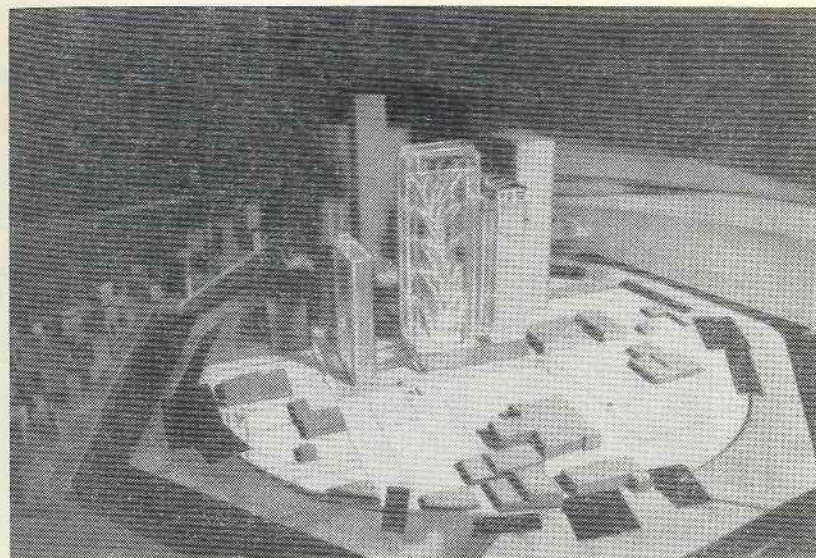


Рис. 15.1. Модель жилого комплекса, Даллас, шт. Техас.

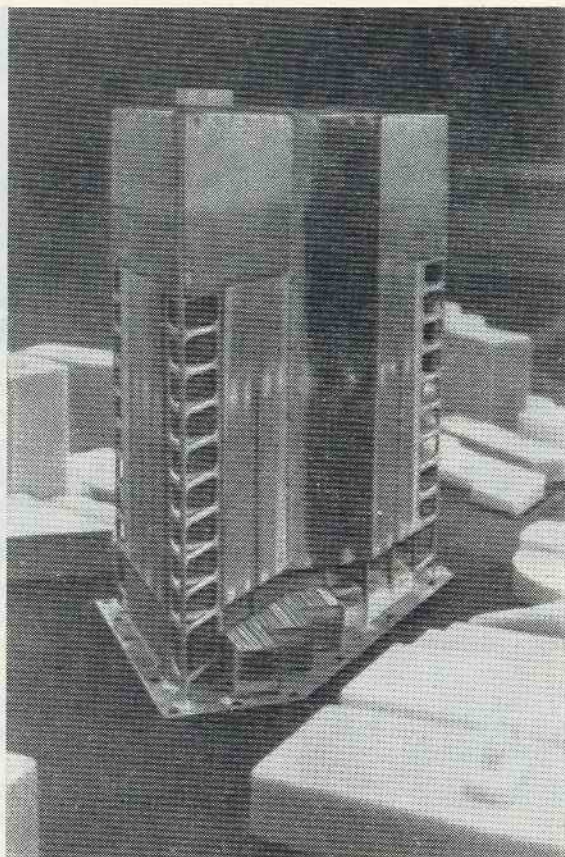


Рис. 15.2. Административное здание Пичтри-Сентр, Атланта, шт. Джорджия (с любезного разрешения проф. Дж. Палмера, Лафайеттский ун-т).

чения реального числа Рейнольдса, и решали их, правильно или нет, делая шероховатой поверхность модели.

По сегодняшним меркам эти методы были весьма приближенными. Однако сейчас я начинаю думать, являются ли наши нынешние тонкие приемы исследований в аэродинамических трубах действительно оправданными. У меня складывается впечатление, что ответы, которые дают исследования в аэродинамических трубах, в силу определенных толкований являются ультраконсервативными.

Вследствие этого перед нами встает важная проблема, которая состоит в перенесении результатов трубных испытаний на натуре.

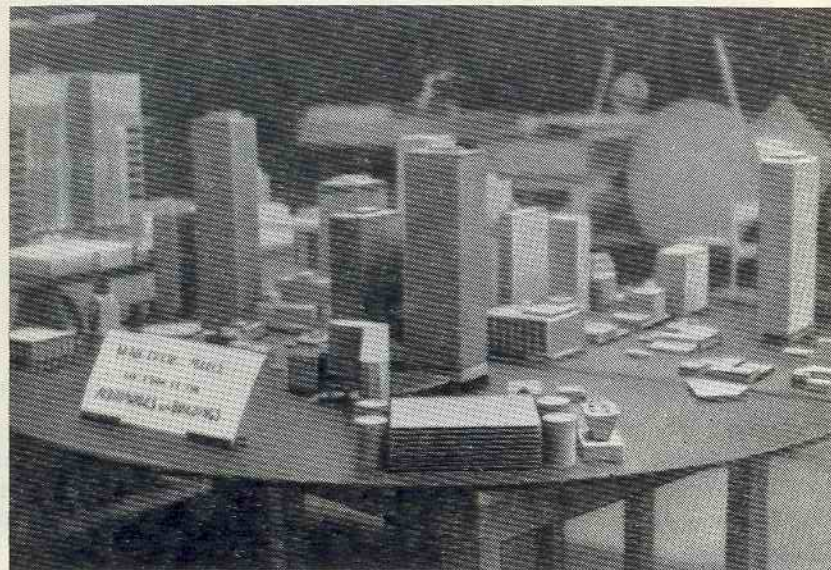


Рис. 15.3. Модель одного из районов Хьюстона, шт. Техас (с любезного разрешения проф. Джорджа Палмера, Лафайеттский ун-т).

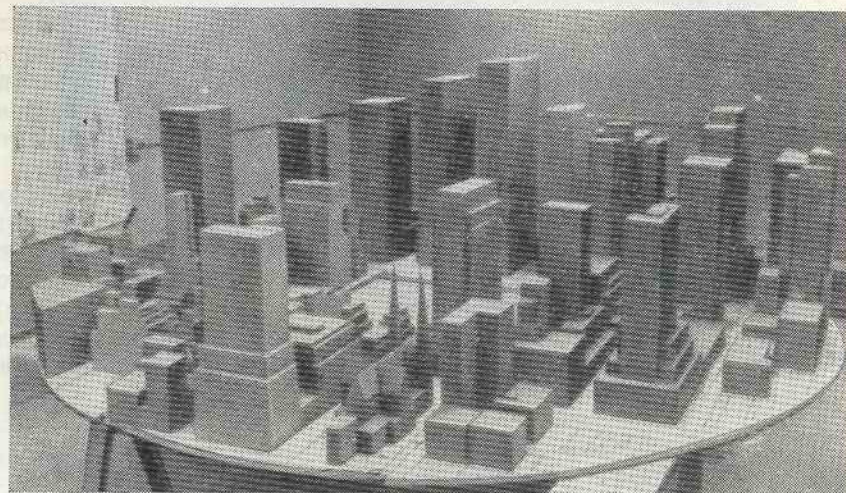


Рис. 15.4. Модель городской застройки около здания Американской радиовещательной корпорации, Нью-Йорк, шт. Нью-Йорк.

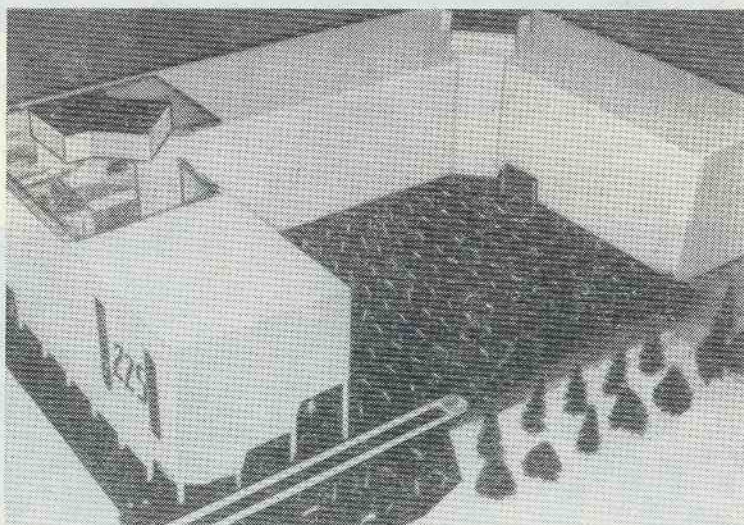
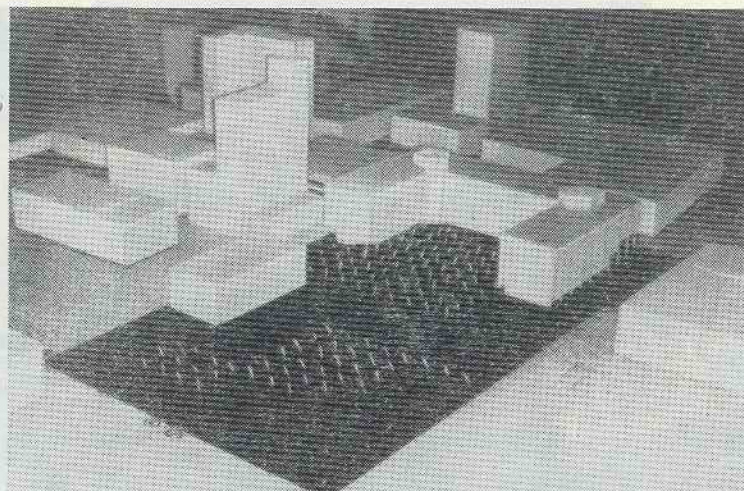


Рис. 15.5. Модель торгового центра и прилегающего района в Альбукерке, шт. Нью-Мехико.

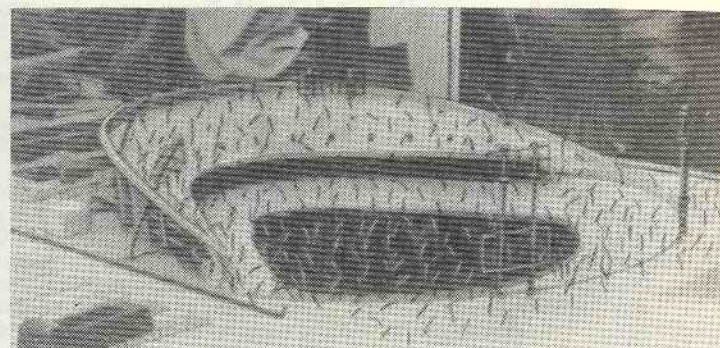


Рис. 15.6. Модель спортивного комплекса в Канзас-Сити, шт. Миссури.

Этот перенос можно осуществить только путем проведения всесторонних измерений на реальных строительных сооружениях. Эти измерения должны включать измерение давлений и скоростей, а также профилей скорости ветра. Данные должны собираться в течение большого промежутка времени и статистически обрабатываться. Наша фирма совместно с Университетом Северо-западных штатов представила в Национальный научный фонд проект оборудования измерительной аппаратурой шести зданий в Чикаго. Стоимость проекта 1,5 млн. долл., и, по моему мнению, он явится только хорошим отправным пунктом для решения проблемы.

Хотя строительная механика и механика жидкости далеко отстоят друг от друга, их интересуют одни и те же общие вопросы, касающиеся ветра, порывов, турбулентности, статистического анализа и т. п. Приятно сознавать, что инженеры-строители идут в ногу со временем, и вместе с тем становится не по себе от мысли, что мы находимся на передней линии огня.

На рис. 15.1—15.6 представлены фотоснимки различных моделей наземных сооружений, испытывавшихся в аэродинамических трубах. Обратите внимание, что на маломасштабных моделях отражены некоторые детали, а также близлежащие здания. В некоторых исследованиях проводились измерения давления, в других (например, торговый центр в Альбукерке и бейсбольный стадион в Канзас-Сити) изучались поля ветра с целью обеспечения комфортных условий для людей.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автокорреляционная функция 104, 122—124
 — — влияние дискретизации 480—484, 493
 — — нормированная 494
 — — спектральная плотность 123, 476
 — — — — перекрестная 124
 — — — — функция распределения 123
 Автомодельные профили характеристик турбулентного течения 280—289
 — — — в неустойчивом слое смешения 293—295
 Акустические доплеровские измерители скорости 443—445, 465—471
 — — системы импульсного действия 467—471
 — — — непрерывного действия 466, 467, 471
 Акустический измеритель скорости, температуры и концентрации 415—420
 Анемометр акустический 376—378, 409
 — крыльчатый 378, 409, 411—413, 416, 457—459
 — с тензометром для измерения пульсаций количества движения 421, 422
 — — тлеющим разрядом 381, 382
 — флюгерный 378, 409, 411—413
 — чашечный 378, 409, 411—413, 421
 Ансамбль реализаций 75
 Атмосферная турбулентность, методы измерения 409
 — — энергетический спектр 348
 Атмосферный пограничный слой 289—292, 299—301
- Бесселя* функция 513
Био—Савара интеграл 177
Блазиуса неустойчивый слой 174
 — профиль пограничного слоя 181, 287
Бодэ диаграммный синтез 475
Брандта—Вайсяля период 302
Брэгга ячейка 449
Брэдишоу модель переноса кинетической энергии турбулентного движения 209, 211, 217—224
 — функции эмпирические 219
Буссинеска приближение 263
- Ван-Дриста* демпфирующий множитель 204
 — — закон стенки 215
 Взаимодействия адиабатические 157, 161
 Виртуальная звуковая температура 377, 378
 Вихревая дорожка (пелена) 11, 28, 167
 — линия 177, 178
 Вихревые образования минимального размера 17, 22, 66
 — трубки, механизм растяжения 35, 66—69
 Вихри, энергетический спектр 71, 72
 Вихрь дочерний 149, 150
 — кольцевой 179
 — материнский 149, 150
 Водородных пузырьков метод 371, 372
 Волновое число 130, 131
 Волновой пакет 149—152, 174
 Вращающегося зеркала метод 371
 Вязкий подслой 200
 Вязких (рейнольдсовских) напряжений тензор 209

- Гауссовский дискретный белый шум 482
 Гигрометр конденсационный 422
Грина функция 47
- Датчик концентрации атомов 397, 398
 — с крыловым профилем 379, 380
 — тонкопленочный теплового потока и касательного напряжения 400, 401
 Демпфирование вязкое 170
 Дефект скорости 282
Дирака дельта-функция 500
Дирдорфа модель планетарного пограничного слоя 296
 Диссипация вязкая 187, 348, 349
 Диффузия турбулентная 143, 144, 160—162
 — — подход *Тейлора* 143, 144
 — частиц 146—148
 Длина перемешивания (путь смешения) 51, 202, 335, 349
 Доплеровский сдвиг частоты 367, 444
Драйдена спектральная плотность 499, 512
Дюбуа—Реймонда лемма 18, 20, 22
- Закон следа, область действия 29
 — сохранения массы 17
 Замыкания метод в задачах с известными начальными условиями 190
 — методы 209—215
 — — ПСС 209
 — — ПХТ 209
 — проблема системы уравнений турбулентного движения 51, 184, 205, 262—264
 — схемы 201, 202, 269, 297
- Измерение атмосферной турбулентности, методы волновые 413—421
 — — — самолетные 423—438
 — концентрации по рассеянию света 399
 — корреляций температуры и скорости 385, 386
 — пульсаций поверхностного касательного напряжения тепловыми методами 399—401
 — спектров атмосферной турбулентности 432—438
 — турбулентности, электрохимические методы 373—375
- Импульсная осевая схема ЛДИС 461
 — переходная функция 484—486, 498
 Импульсный модулятор 479, 485
 Инвариантное моделирование, приближение локально равновесное 296—304
 — — — сверхравновесное 297—299
 — — турбулентного движения 262, 299—305
 Инерциальная платформа, применение для измерений атмосферной турбулентности 424
 Инерционная подобласть энергетического спектра, 136, 137, 159, 162, 316
 Интегральный масштаб турбулентности 270, 507
- Кармана* формула для автомодельного режима течения 202, 203
 Каскадный вихревой процесс переноса энергии 27, 70—72, 154—156
 Катарометр 395—398
 Клинья турбулентности 173, 174
Кнудсена число 387
Коважного метод пульсационных диаграмм 386
 Когерентная крупномасштабная структура 13
 Когерентности функция 501, 503—505, 508—511
Колмогорова закон для энергетического спектра в инерционной подобласти 155, 318, 319
 — *Тейлора* микромасштаб турбулентности 155, 158, 265
 Колмогоровская локальная изотропность 135, 348, 349
 — теория турбулентности 70, 155, 325
 Корреляции пульсаций давления (двухточечные) 266—268
 — флуктуаций скорости 268
 Корреляционная функция двухточечная 187, 266
 — — спектр одномерный поперечный 130, 131
 — — — продольный 130, 131
 Корреляционные функции трех-, четырех- и пятиточечные 187, 188
Коулса закон стенки 278, 286
 Коэффициент автокорреляции гауссовского сигнала 497
 — безопасности 519
 — температуропроводности 159

- турбулентного обмена, измерение 436
- турбулентной вязкости 338, 342, 343
- — диффузии 161, 274
- Крейчмана* приближение прямых взаимодействий 152, 155, 156, 326—337
- Критический неустойчивый слой 172, 176
- Кронекера* символ 20, 502
- Крупномасштабное турбулентное движение 208, 339
- Лагерра* полином 313
- Лагранжа* функция структурная 145, 158
- Лазерный доплеровский измеритель скорости (ЛДИС) 366—369, 386—392, 415, 443—465
- — — принцип действия 366, 367, 448, 449
- — — схемы двухлучевые 461—463
- — — с опорным лучом 446, 447, 450—460
- Лазеры ЛДИС, характеристики 463
- Лаймановский α -гигрометр 422
- Ламинаризация 243
- Ландау* механизм демпфирования 167—171
- Лапласа* преобразование 479
- Лаундера* модели переноса турбулентной кинетической энергии 239—245
- модель «*ke1*» 240—245
- — «*ke2*» 242—244
- Лежандра* полином 314
- Линеаризатор термоанометра 360
- Ли—Харша* модель переноса турбулентной кинетической энергии 225—229
- Макромасштаб турбулентности 270—272, 350
- Масштаб времени интегральный лагранжев 144
- диссипации энергии 316—318
- турбулентности 229, 270—281, 349
- Масштабы горизонтальные атмосферных явлений 408
- Маха* число 387—390
- Мачта анемометрическая 411
- Мелкомасштабное турбулентное движение 208, 339
- Мелкомасштабные движения, саморегулирование 317, 318
- Метод биений 449
- сращиваемых асимптотических разложений 52
- Механизм маскирующего эффекта 130—132, 139
- Микромасштаб турбулентности 350
- частиц 147, 148
- Ми-рассеяние 456, 462
- Модели переноса турбулентной вязкости 212—215, 255
- — — кинетической энергии 207—256
- — — — сопоставление 247—254
- Моделирование турбулентности 473, 497—499, 512—414
- — — атмосферной 473, 499—512
- Модель пробного поля (МПП) 326, 327, 337
- турбулентной вязкости 209
- Моменты статистические 89—97
- — двухточечные 90, 91, 96, 266
- — ковариация 92, 93
- — корреляционная функция 92—96, 109
- — — — поперечная 93, 94, 140
- — — — продольная 93, 94, 140
- — — коэффициент корреляции, 93—96
- — — — временной 94, 95
- — — — пространственный 96
- — — — обычные 89, 90
- — — пространственно-временные 91, 92
- — — совместные 91
- — — центральные 90, 91
- Монина—Обухова* масштаб атмосферной турбулентности 290
- Морела* модель переноса турбулентной кинетической энергии 224, 225
- Навье—Стокса* уравнения 38, 39, 187, 207, 311—313
- — — конечно-разностный метод решения 313—315, 328, 329
- — — спектральный метод решения 312—315, 328, 329
- Наименьший масштаб турбулентного движения 156
- Найквиста* интервал 488
- Не—Сполдинга* модель переноса турбулентной кинетической энергии 236—239
- Невзглядова—Драйдена* (НД) мо-

- дели переноса турбулентной кинетической энергии 216—236
- Нейтральной устойчивости точка 175
- Ни—Коважного* модели переноса турбулентной кинетической энергии 212, 214,
- Нуссельта* число 387
- Орра—Зоммерфельда* уравнение 171, 172
- Осредненное (основное) течение 208
- Отражений метод 321
- Парсевала* равенство 148
- Пейтла—Хэда* модель переноса турбулентной кинетической энергии 220—223
- Передающая функция системы 475, 477, 484
- Переход ламинарного течения в турбулентное 23—30, 164—166
- Петерса—Фареса* модель переноса турбулентной кинетической энергии 211, 230—235
- Пито* трубка 424
- ПКЭ/ПНР комбинированные модели турбулентного движения 211
- Прандтля—Колмогорова* (ПК) модели переноса турбулентной кинетической энергии 216, 236—245
- — модель длины перемешивания (турбулентной вязкости) 209, 210, 335, 336
- число турбулентное 237, 279
- Пространство состояний системы 477—480
- Профиль турбулентного пограничного слоя 181
- Пульсации давления 46
- концентрации 354, 394—399
- плотности и давления 353, 386—394
- поверхностного касательного напряжения 354, 399—401
- скорости 351—355
- — измерение трассирующими частицами 365, 366, 369—371
- температуры 353, 382—386
- ПХТ/ПКЭ модели турбулентного движения 209—212
- ПХТ/ПНР модели турбулентного движения 209—212
- Пятна турбулентные 173
- Рассеивающий объем дистанционного измерителя турбулентности 419
- Рассеяние звука в сухом воздухе 465
- Реализация измерений 73—75
- стационарного действительного случайного процесса 114
- Рейнольдса* критерий перехода 166, 171
- напряжения 288, 335, 336, 352
- тензор напряжений 199—201, 252
- уравнения для средних значений 208, 338, 352
- число 21, 167, 230, 244, 273, 324
- Рефрактометр микроволновый 422
- Ричардсона* закон 162
- число 273, 279, 290—292, 297
- — для приземного слоя атмосферы 303—305
- Роди—Сполдинга* модель переноса турбулентной кинетической энергии 236—239
- Росби* число 273, 295
- Ротта* уравнение переноса масштаба турбулентности 210
- Саффмена* модель турбулентного движения 212, 214
- Сдвиговое турбулентное течение 192
- Силы, поверхностные, определение 19
- Сканирование двухточечное 464
- Скорость генерации турбулентной энергии 195
- диссипации турбулентной энергии 152, 195, 239, 244, 324—328
- — энтропии 325—328
- След осесимметричный 282—285
- плоский 282
- стратифицированный 301—303
- Следа турбулентного зона 200, 203, 235
- Слой смешения 13, 167—170, 239, 246, 282, 292, 293, 332—336
- Случайная функция точки 121
- Случайного поля концепция 84, 88
- Случайное поле 88
- — векторное 89
- — скалярное 89
- Случайный процесс 80—84
- — стационарность 82—84, 111—114
- — эргодичность 82—84
- Солитоны 178, 179
- Спектр частотный 124—127
- Радона—Никодима* теорема 16
- Рао* модель вязких напряжений 288

- энергетический взаимный 127
- — одномерный 138—140
- — трехмерный 133—138, 140, 186
- Спектральная плотность мощности (энергии) 125—127, 145, 433, 475, 481—488, 505—507
- Спектральные функции 99—106, 130
- — спектр амплитудный 101
- — — комплексный 100, 101
- — — фазовый 101
- — — энергетический 104, 105, 110
- Сплошной среды понятие 14
- Среднее по ансамблю 75, 81
- Стационарный случайный процесс, спектральное разложение 115—122
- Стилтьеса интеграл 117—121
- Стоксовское течение 356
- Структурная схема системы 478
- Стэнтона число 199—201
- Суперслой 180
- Схема конического сканирования 460, 464
- Тейлора гипотеза замороженной турбулентности 87, 88, 127—130, 499
- — — критерий Линя 87
- Грина вихрь 324, 327
- Температура торможения 383, 384
- Теория сильных взаимодействий 152
- устойчивости классическая 23
- Термоанемометр, режим постоянного тока 355, 387
- — постоянной температуры 355, 387
- с нагретой нитью 355—364
- — — пленкой 355, 364, 365
- — — «расщепленной» 365
- Термометр сопротивления 382—384
- Течение ламинарное сдвиговое 11
- Толмина—Шлихтинга неустойчивость 170, 171, 175, 176, 323
- Томсона закон касательного напряжения на стенке 221
- Турбулентная вязкость 51, 180, 181, 201, 214, 240
- Турбулентное движение, масштаб времени интегральный 95, 96
- — — длины 36, 56—58, 219
- — — — интегральный 140
- — — — колмогоровский 36
- — — — микромасштаб временной 96
- Турбулентности масштаб 213, 216
- первый закон 154
- Турбулентность однородная изотропная 85, 134
- спектральный анализ 99—141
- физическая модель 66—73
- Турбулентный пограничный слой 52—62
- — — область действия дефекта скорости 55, 61
- — — — перемежаемости 27, 35, 43
- — — — пристеночная 27, 55
- — — — теория 25
- Уравнение диффузии 354
- для касательного напряжения 273, 278
- — напряжений Рейнольдса 217, 276
- — средних значений 43
- переноса масштаба турбулентности 237, 276, 277, 279
- — скорости диссипации 237
- — турбулентной вязкости 213
- — — кинетической энергии 218
- Уравнения спектральные 185, 186
- Условных выборок метод 35, 43
- Устройство задержки нулевого порядка 478, 479
- Формпараметр пограничного слоя 220
- Фруда число 302, 303
- Функция диссипации энергии 136
- переноса 187
- Фурье закон теплоотдачи 395
- интеграл 106—110
- преобразование 109, 133, 144—146
- — дискретное 487—489
- — обратное 109, 123, 124, 133, 513
- — подход волновой механики, 148—150
- — статистических моментов трехмерное 132
- ряды 99—101, 106—110
- спектр 487—489
- — связь со спектром мощности 489
- Стилтьеса интеграл 121, 132, 500
- Ханжалика—Лаундера модели уравнений переноса 245

- Харша модель переноса турбулентной кинетической энергии 210
- Чебышева полином 313, 314
- Шмидта число 204, 233
- Шредингера уравнение 178
- Экмана атмосферный слой 295
- Энергии перенос, эффект диссипативный 190
- — — инерционный 190
- Эрмита полином 313
- х-распределение, зависящее от времени 75—77

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому переводу	5
Предисловие	6

1

ЯВЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

1.1. Введение	9
1.2. О движении жидкости в рамках механики сплошной среды	14
1.3. Дополнительные замечания о турбулентности	23
1.4. О содержании последующих глав	30
Литература	31

2

ВВЕДЕНИЕ В ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

2.1. Введение	33
2.2. Основные уравнения движения	36
2.3. Подход Рейнольдса	40
2.4. Корреляционные функции и условия замыкания задачи	49
2.5. Турбулентный пограничный слой	52
2.6. Заключительное замечание	62
Литература	63

3

СТАТИСТИЧЕСКИЕ КОНЦЕПЦИИ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

3.1. Исходная физическая модель турбулентности	66
3.2. Статистические определения	73
3.3. Статистические моменты	89
Литература	98

4

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

4.1. Введение	99
4.2. Гармонический анализ	99
4.3. Частотные спектры	124
4.4. Спектры в пространстве волновых чисел	127
4.5. Характеристики энергетических спектров	135
Литература	141

5

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ: ДИФфуЗИЯ, СТАТИСТИКА, ДИНАМИКА СПЕКТРОВ

5.1. Введение	142
5.2. Турбулентная диффузия	143
5.3. Преобразования Фурье	144
5.4. Диффузия частиц	146
5.5. Другой подход к преобразованиям Фурье	148
5.6. Об интерпретации частоты	151
5.7. Сильные взаимодействия	152
5.8. Завихренность и скорость	152
5.9. «Первый закон» турбулентности	153
5.10. Каскадный перенос энергии	154
5.11. Некоторые поучительные ошибки	156
5.12. Другие инерционные интервалы	158
5.13. Пересмотр проблемы турбулентной диффузии	160
5.14. Заключение	162
Литература	163

6

ПЕРЕХОД

6.1. Введение	164
6.2. Волны с малой амплитудой в простых течениях	166
6.3. Взаимодействие нескольких возмущений в ламинарном течении	172
6.4. Рост начальных возмущений	175
6.5. Возмущения с большой амплитудой в простых течениях	177
6.6. Статистические модели	180
6.7. Заключение	181
Литература	182

7

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОСТЫЕ СХЕМЫ ЗАМЫКАНИЯ

7.1. Введение	184
7.2. Теоретические положения	184
7.3. Заключительные замечания	205
Литература	205

8

МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

8.1. Введение	207
8.2. Модели переноса турбулентной вязкости	212
8.3. Модели переноса турбулентной кинетической энергии	215
8.4. Заключительные замечания и выводы	255
Литература	258

9

МЕТОД ИНВАРИАНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

9.1. Введение	262
9.2. Вывод модельных уравнений	263
9.3. Оценки величин коэффициентов модельных членов	273
9.4. Проверка модели	280
9.5. Локально равновесное приближение	296
9.6. Результаты применения	299
9.7. Заключительные замечания	305
Литература	306

10

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

10.1. Введение	311
10.2. Методы	311
10.3. Задачи	316
10.4. Некоторые применения	324
10.5. Сравнение с другими методами	336
10.6. Дальнейшие перспективы	344
Литература	345

11

АППАРАТУРА, ИСПОЛЗУЕМАЯ В ЛАБОРАТОРНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

11.1. Введение	348
11.2. Измерение пульсаций скорости	354
11.3. Измерение пульсаций температуры	382
11.4. Измерение пульсаций плотности и давления	386
11.5. Измерение пульсаций концентрации	394
11.6. Измерение пульсаций поверхностного касательного напряжения	399
Литература	402

12

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

12.1. Введение	407
12.2. Основные принципы, приборы, платформы и методы измерений	410
12.3. Самолетные методы измерения	423
12.4. Самолетные измерения в турбулентных воздушных потоках с подветренной стороны горного хребта	425
12.5. Профили в пограничном слое атмосферы около горы Элк	432
12.6. Уменьшение коэффициента турбулентного обмена вследствие искривления пограничного слоя при огибании препятствия	434
12.7. Турбулентные воздушные потоки около зданий	438
12.8. Заключительные замечания	439
Литература	439

13

ОПТИЧЕСКИЕ И АКУСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ

13.1. Введение	443
13.2. Основные принципы и предпосылки	443
13.3. Лазерные доплеровские методы	446
13.4. Акустические доплеровские системы	465
Литература	472

14

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

14.1. Введение	473
14.2. Моделирование на основе теории систем управления	474
14.3. Использование передаточных функций стандартных элементов	475
14.4. Моделирование с помощью цифровых фильтров	484
14.5. Дискретные ряды Фурье	487
14.6. Негауссовское моделирование	494
14.7. Многомерное моделирование	497
14.8. Моделирование пограничного слоя неоднородной атмосферы	499
14.9. Автомодельное моделирование	512
14.10. Заключение	514
Литература	516

15

ВЕТЕР, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И НАЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

Предметный указатель	526
----------------------	-----